

内部힌지효과를 考慮한 平面 뼈대構造의 幾何學的인 非線形 有限要素解析

Geometric Nonlinear F.E. Analysis of Plane Frames Including Effects of the Internal Hinge

金 文 榮*

Kim, Moon Young

Abstract

Two beam/column elements are developed in order to analyze the geometric nonlinear plane frames including the effects of internal hinge and transverse shear deformation. In the case of the first element (finite segment method), tangent stiffness matrix is derived by directly integrating the equilibrium equations whereas in the case of the second element (finite element method) elastic and geometric stiffness matrices are calculated by using the hermitian polynomials including the effects of internal hinge and shear deformation as the shape function. Numerical results are presented for the selected test problems which demonstrate that both elements represent reliable and highly accurate tools.

要 旨

本 論文에서는 内部힌지가 있는 平面 뼈대構造의 幾何學的인 非線形 解析을 수행하기 위한 두 가지 解析方法 즉, 有限分節法과 有限要素法을 제시한다. 有限分節法의 경우에는 内部힌지에 대한 境界條件이 고려된 平衡方程式과 힘-變位 關係式을 直接 積分하여 엄밀한 接線剛度 매트릭스를 유도한다. 有限要素法의 경우에는 内部힌지와 剪斷變形의 영향이 고려된 Hermitian 多項式을 形狀函數로 사용하여 彈性 및 幾何學的인 剛度매트릭스를 산정한다. 제시된 理論의 正確성과 妥當성을 立證하기 위하여, 선택된 例題의 解析結果를 제시한다.

1. 序 論

電子計算機의 발달과 더불어 平面뼈대 構造의 幾何學的인 非線形 解析에 관한 研究는 최근까지 활발한 研究結果를 나타내었다. 대체로 이러한 연구

들은 要素의 變位場을 절점변위에 대한 形狀函數로 나타내어 彈性剛度 매트릭스와 幾何學的인 剛度매트릭스를 얻는 有限要素法과 軸方向力을 받는 뼈대 부재의 平衡方程式을 積分하여 剛度매트릭스를 嚴密하게 유도하는 有限分節法으로 요약할 수 있다.

非線形 有限要素法을 이용하여 뼈대構造物을 해석한 文獻들은 비교적 최근에 발표된 Wen과 Rahi-

* 정회원 · 成均館大學校 土木工學科 助教授

mzadeh⁽¹⁾의 論文에서 찾아 볼 수 있다. 보-기둥 理論을 이용하는 有限分節法에 관한 연구로는, Saafan⁽²⁾이 휨으로 야기된 水平節點變位の 변화(bowwing effect)를 고려하여 平面 뼈대에 대한 剛度 매트릭스를 유도하였고 Oran^(3,4)은 이를 平面 및 空間 뼈대로 확장시켜서 接線剛度 매트릭스를 유도하였다. Connor⁽⁵⁾는 剪斷變形을 고려함으로써 더욱 일반화시켰다. 또한, 金과 張^(6,7)은 變位 및 荷重增分 알고리즘을 사용하여 平面 뼈대構造의 幾何學的인 非線形解析을 수행하였다.

本 論文에서는 内部힌지가 있는 平面 뼈대構造의 幾何學的인 非線形 有限要素解析을 수행하기 위하여, 内部힌지의 영향을 고려할 수 있는 有限分節法과 有限要素法을 제시한다. 有限分節法에서는 보-기둥에 대한 平衡方程式, 휨-變位關係式 그리고 内部힌지에 대한 境界條件式을 고려하고, 이 方程式의 解를 구하여 有限分節法에 대응하는 接線剛度 매트릭스를 엄밀하게 유도한다. 有限要素法에서는 内部힌지 효과가 고려되는 Hermitian 多項式을 形狀函數로 사용하여 彈性 및 幾何學的인 剛度 매트릭스를 산정한다. 또한 内部힌지가 있는 要素의 材端力 算定方法을 제시한다. 内部힌지가 있는 平面 뼈대構造의 大變形 및 後挫屈問題를 해석하고, 解析結果를 고찰함으로써 本 論文에서 제시된 理論의 妥當性을 立證한다.

2. 有限分節法의 경우에 接線剛度 매트릭스의 誘導

그림 1은 x_1 - x_2 면내에서 뼈대부재의 재단변위벡터 ($U_c = \langle U^p, V^p, \omega^p, U^q, V^q, \omega^q \rangle$)와 재단력벡터 ($F_c = \langle F_1^p, F_2^p, M^p, F_1^q, F_2^q, M^q \rangle$)를 나타낸다. 여기서 x_1, x_2 는 부재 좌표계 (local coordinate)를 표시한다. 초기의 축방향력 0F_1 이 작용하는 경우에, 전단변형을 고려하는 평면 뼈대부재의 평형방정식, 힘-변위 관계식 그리고 경계조건식은 아래와 같이 표시된다 (문헌⁽⁶⁾ 참조).

$$\begin{aligned} F_1' &= 0, \quad F_1 = EA \cdot U_x' \\ [F_2 + {}^0F_1 \cdot U_y']' &= 0, \quad M' + F_2 = 0 \\ F_2 &= \frac{GA}{I_s} (U_y' - \omega), \quad M = EI \cdot \omega' \end{aligned} \quad (1)$$

경계조건 :

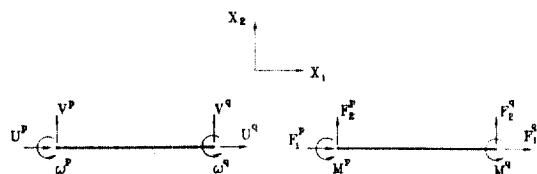


그림 1. Member displacement and member force vector.

$$\begin{aligned} U_x(0) &= U^p \quad \text{또는} \quad F_1(0) = -F_1^p \\ U_x(L) &= U^q \quad \text{또는} \quad F_1(L) = F_1^q \\ U_y(0) &= V^p \quad \text{또는} \quad {}^0F_1 \cdot U_y'(0) + F_2 = -F_2^p \\ U_y(L) &= V^q \quad \text{또는} \quad {}^0F_1 \cdot U_y'(L) + F_2 = F_2^q \\ \omega(0) &= \omega^p \quad \text{또는} \quad M(0) = -M^p \\ \omega(L) &= \omega^q \quad \text{또는} \quad M(L) = M^q \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 U_x, U_y 는 x_1, x_2 축방향의 단면강체이동변위이며 ω 는 단면의 강체회전변위를 나타낸다. F_1, F_2, M 은 각각 축방향력, 전단력 그리고 휨모멘트를 표시한 것이며 $EA, EI, GA/I_s$ 는 축강성, 휨강성 그리고 전단강성을 나타낸다. (')는 괄호의 x_1 에 대한 미분을 의미하며 I_s 는 전단계수이다.

2.1 兩端이 모두 剛節인 경우의 接線剛度 매트릭스

양단이 모두 강절인 경우에 평면 뼈대부재의 접선 강도 매트릭스의 유도과정은 문헌⁽⁶⁾에 제시되어 있다. 이때 x_1 - x_2 면내 휨거동에 대한 재단력-재단변위 관계식은 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{pmatrix} F_1^p \\ M^p \\ F_2^p \\ M^q \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12\phi_1 & 6L\phi_2 & -12\phi_1 & 6L\phi_2 \\ & 4L^2\phi_3 & -6L\phi_1 & 2L^2\phi_4 \\ \text{Symm.} & & 12\phi_1 & -6L\phi_2 \\ & & & 4L^2\phi_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V^p \\ \omega^p \\ V^q \\ \omega^q \end{pmatrix} \quad (3)$$

여기서 $\phi_i, i=1, 2, 3, 4$ 는 양단이 모두 강절인 경우의 안정함수(stability function)를 나타내며 구체적인 결과식은 문헌⁽⁶⁾을 참조할 수 있다.

2.2 오른쪽端은 滑節이고 왼쪽端은 剛節인 경우의 接線剛度 매트릭스

오른쪽단이 활절인 경우에 $x_1=0$ 에서 휨모멘트가 0이므로 식 (3)의 두번째식은 다음과 같이 표시된

다.

$$M^p = \frac{EI}{L^2} (6\phi_2 V^p + 4L\phi_3 \omega^p - 6\phi_1 V^q + 2L\phi_4 \omega^q) = 0 \quad (4)$$

이때 식 (4)를 ω^p 에 관하여 표시하면 식 (5)가 된다.

$$\omega^p = -\frac{EI}{4\phi_3 L^3} (6\phi_2 V^p - 6\phi_1 V^q + 2L\phi_4 \omega^q) \quad (5)$$

이제 식 (5)를 식 (3)의 첫번째, 세번째 그리고 네번째식에 대입하여 ω^p 를 소거하고, 그 결과를 정리하면 아래와 같이 식 (6)을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} F_2^p \\ M^p \\ F_2^q \\ M^q \end{pmatrix} = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & -\psi_1 & L\psi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Symm.} & \psi_1 & -L\psi_2 & \\ & & L^2\psi_2 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V^p \\ \omega^p \\ V^q \\ \omega^q \end{pmatrix} \quad (6)$$

여기서 ψ_1 과 ψ_2 는 내부힌지가 있는 평면뼈대부재의 안정함수를 나타내며, 자세한 결과식은 부록에 표로 제시하였다. 식 (6)과 재단력 및 재단변위벡터를 고려하면, 오른쪽단은 활절이고 왼쪽단은 강절인 경우에 뼈대부재의 접선강도 매트릭스는 아래와 같이 표시된다.

$$K_1 = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & b_1 & \cdot & \cdot & -b_1 & b_2 \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ \text{symm.} & & & & b_1 & -b_2 \\ & & & & & b_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서

$$a = \frac{EA}{L}, \quad b_1 = \frac{3EI}{L^3} \psi_1, \quad b_2 = \frac{3EI}{L^2} \psi_2, \quad b_3 = \frac{3EI}{L} \psi_2$$

2.3 오른쪽단은 剛節이고 왼쪽단은 滑節인 경우의 接線剛度매트릭스

왼쪽단이 활절인 경우에 $x_1=L$ 에서 휨모멘트가 零이므로 식 (3)의 네번째식의 재단모멘트가 零이

된다. 이 결과를 이용하면, 2.2절과 동일한 유도과정을 통하여 오른쪽단은 강절이고 왼쪽단은 활절인 경우의 접선강도 매트릭스를 유도할 수 있다. 결과적인 강도매트릭스는 다음과 같이 표시된다.

$$K_2 = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & b_1 & b_2 & \cdot & -b_1 & \cdot \\ & & b_3 & \cdot & -b_2 & \cdot \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ \text{symm.} & & & & b_1 & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서

$$a = \frac{EA}{L}, \quad b_1 = \frac{3EI}{L^3} \psi_1, \quad b_2 = \frac{3EI}{L^2} \psi_2, \quad b_3 = \frac{3EI}{L} \psi_2$$

3. 有限要素法の 경우에 接線剛度매트릭스의 誘導

전단변형을 고려하는 경우에 축방향력을 받는 평면뼈대부재에 대한 가상일의 원리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_0^L [EA U_x' \delta U_x' + EI \omega' \delta \omega' + \frac{GA}{f_s} (U_y' - \omega) \delta (U_y' - \omega)] dx_1 + \int_0^L {}^0F_1 U_y' \delta U_y' dx_1 = F_e \cdot \delta U_e^T \quad (9)$$

식 (9)를 사용하여 뼈대부재의 오른쪽단 또는 왼쪽단이 활절인 경우에 대응하는 접선강도 매트릭스를 유도하기 위하여, 본 장에서는 세가지 경계조건에 대한 형상함수를 유도하고 각 경우에 대응하는 탄성 및 기하학적인 강도매트릭스의 결과식을 제시한다.

3.1 兩端이 모두 剛節인 경우의 接線剛度매트릭스

양단이 모두 강절인 경우의 형상함수 및 강도매트릭스는 문헌⁽⁶⁾에 제시되어 있으며, 접선강도 매트릭스에 대한 결과식은 다음과 같다.

$$K_e = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_1 & c_2 & \cdot & -c_1 & c_2 \\ \cdot & \cdot & c_3 & \cdot & -c_2 & c_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot \\ \text{symm.} & \cdot & \cdot & \cdot & c_1 & -c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_3 \end{bmatrix}$$

$$K_g = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & m_1 & m_2 & \cdot & -m_1 & m_2 \\ \cdot & \cdot & m_3 & \cdot & -m_2 & m_4 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{symm.} & \cdot & \cdot & \cdot & m_1 & -m_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서 $a = EA/L$

$$b_1 = 12EI/(TL^3), \quad b_2 = 6EI/(TL^2)$$

$$b_3 = 4EI(1+3S)/(TL), \quad b_4 = 2EI(1-6S)/(TL)$$

$$c_1 = 12P(12S^2+2S+0.1)/(T^2L), \quad c_2 = P/(10T^2)$$

$$c_3 = 4LP(3S^2+S/2+1/30)/T^2$$

$$c_4 = -2LP(6S^2+S+1/60)/T^2$$

$$S = f_s \cdot EI/(GAL^2), \quad T = 1+12S$$

3.2 오른쪽단은 滑節이고 왼쪽단은 剛節인 경우의 接線剛度매트릭스

일반적인 경계조건식 (2)로부터, 오른쪽단은 활절이고 왼쪽단은 상절인 경우에 대응하는 경계조건은 다음과 같이 표시된다.

경계조건 :

$$U_x(0) = U^p, \quad U_x(L) = U^q, \quad U_y(0) = V^p,$$

$$U_y(L) = V^q, \quad EI\omega'(0) = 0 = M^p, \quad \omega(L) = \omega^q \quad (11)$$

축방향력을 零으로 놓고 식 (1)을 적분하여 경계조건식 (11)을 적용하면 다음과 같이 부재변위성분 (U_y, ω)을 구할 수 있다.

$$U_y = H_1 \cdot V^p + H_2 \cdot \omega^p + H_3 \cdot V^q + H_4 \cdot \omega^q$$

$$\omega = K_1 \cdot V^p + K_2 \cdot \omega^p + K_3 \cdot V^q + K_4 \cdot \omega^q \quad (12)$$

여기서 $H_1 = [\beta^3 - 3\beta^2 - 6S\beta + 2T]/(2T)$

$$H_2 = [-\beta^3 + 3\beta^2 - 2\beta]L/(2T)$$

$$H_3 = [-\beta^3 + 3\beta^2 + 6S\beta]/(2T)$$

$$H_4 = 0.0 \quad (13)$$

$$K_1 = [-3\beta^2 + 6\beta]/(2TL)$$

$$K_2 = [3\beta^2 - 6\beta + 2T]/(2T)$$

$$K_3 = [3\beta^2 - 6\beta]/(2TL)$$

$$K_4 = 0.0$$

$$T = 1 + 3S, \quad S = f_s \frac{EI}{GAL^2}, \quad \beta = \frac{x_1}{L}$$

재단변위와 형상함수로 표시된 변위성분식 (12)을 식 (9)에 대입하여 적분을 행하고, 그 결과를 정리하면 식 (14)를 얻는다.

$$\delta U_e^T \cdot [K_e + K_g] \cdot U_e = \delta U_e^T \cdot F_e \quad (14)$$

여기서 K_e, K_g 는 각각 탄성 및 기하적인 강도매트릭스를 표시하며 자세한 결과는 식 (15)에 나타내었다.

$$K_e = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_1 & \cdot & \cdot & -c_1 & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a & \cdot & \cdot \\ \text{symm.} & \cdot & \cdot & \cdot & c_1 & -c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_3 \end{bmatrix}$$

$$K_g = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & m_1 & \cdot & \cdot & -m_1 & m_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{symm.} & \cdot & \cdot & \cdot & m_1 & -m_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & m_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

여기서 $a = EA/L, \quad c_1 = 12EI/(TL^3)$

$$c_2 = 6EI/(TL^2), \quad c_3 = 4EI/(TL)$$

$$m_1 = 3P(3S^2+2S+0.4)/(T^2L), \quad m_2 = P/(5T^2)$$

$$m_3 = LP/(5T^2), \quad T = 1+3S$$

3.3 오른쪽단은 剛節이고 왼쪽단은 滑節인 경우의 接線剛度매트릭스

오른쪽단은 강절이고 왼쪽단은 활절인 경우에 대응하는 경계조건은 다음과 같이 표시된다.

경계조건 :

$$U_x(0) = U^p, \quad U_x(L) = U^q, \quad U_y(0) = V^p,$$

$$U_y(L) = V^q, \quad \omega(0) = \omega^p, \quad EI\omega'(L) = 0 = M^q \quad (16)$$

3.2절의 경우와 마찬가지로 식 (1)을 적분하여

경계조건식 (16)을 적용하면 다음과 같이 부재변위 성분(U_y, ω)을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} U_y &= H_1 \cdot V^p + H_2 \cdot \omega^p + H_3 \cdot V^q + H_4 \cdot \omega^q \\ \omega &= K_1 \cdot V^p + K_2 \cdot \omega^p + K_3 \cdot V^q + K_4 \cdot \omega^q \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $H_1 = [\beta^3 - 3(1+2S)\beta + 2T]/(2T)$

$$H_2 = 0.0$$

$$H_3 = [-\beta^3 + 3(1+2S)\beta]/(2T)$$

$$H_4 = [\beta^3 - \beta]L/(2T)$$

$$K_1 = [3\beta^2 - 3]/(2TL)$$

$$K_2 = 0.0$$

$$K_3 = [-3\beta^2 + 3]/(2TL)$$

$$K_4 = [3\beta^2 + 6S - 1]/(2T)$$

$$T = 1 + 3S, \quad S = f_s \frac{EI}{GAL^2}, \quad \beta = \frac{x_1}{L}$$

변위성분식 (17)을 식 (9)에 대입하여 적분을 행하면 다음과 같이 오른쪽단은 강절이고 왼쪽단은 활절인 경우에 대응하는 탄성 및 기하학적인 강도 매트릭스를 얻을 수 있다.

$$K_e = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & -a & \cdot & \cdot \\ & c_1 & c_2 & \cdot & -c_1 & \cdot \\ & & c_3 & \cdot & -c_2 & \cdot \\ & & & a & \cdot & \cdot \\ \text{symm.} & & & & c_1 & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix}$$

$$K_g = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & m_1 & m_2 & \cdot & -m_1 & \cdot \\ & & m_3 & \cdot & -m_2 & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{symm.} & & & & m_1 & \cdot \\ & & & & & \cdot \end{bmatrix} \quad (19)$$

여기서 $a = EA/L, c_1 = 12EI/(TL^3)$

$$c_2 = 6EI/(TL^2), c_3 = 4EI/(TL)$$

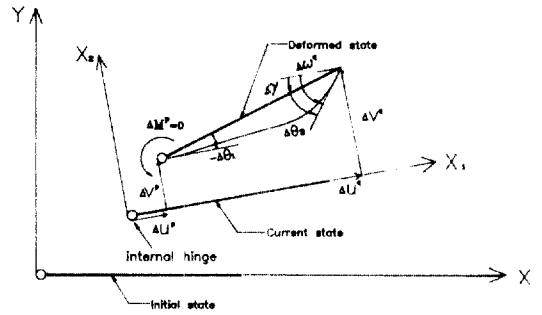
$$m_1 = 3P(3S^2 + 2S + 0.4)/(T^2L)$$

$$m_2 = P/(5T^2)$$

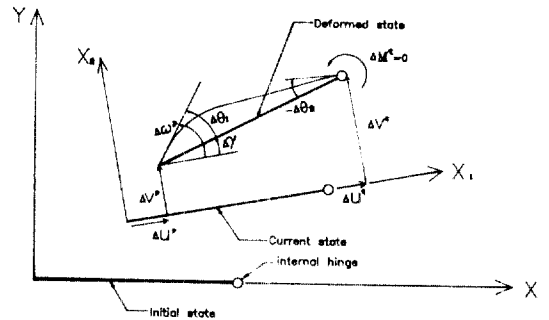
$$m_3 = LP/(5T^2), \quad T = 1 + 3S \quad (19)$$

4. 不平衡荷重의 算定

기하적인 비선형 해석에서 사용되는 증분방정식은



(a) beam element with hinged-rigid edge



(b) beam element with rigid-hinged edge

그림 2. Configuration of beam element in initial, current and deformed state.

다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_T \cdot \Delta U = \Delta R \quad (20)$$

여기서 K_T 는 구조물 접선강도매트릭스, ΔU 는 증분 변위벡터, 그리고 ΔR 은 증분하중 또는 불평형 하중벡터에 해당한다. 비선형해석에서는 불평형하중을 정확히 산정하는 것이 중요하다. 오른쪽단 또는 왼쪽단이 힌지인 경우에 updated Lagrangian formulation에 따른 평면요소 불평형하중 산정방법은 다음과 같다.

(1) 증분방정식 (20)을 풀어서 구조물의 증분변위 벡터를 구하고 각 부재에 대응하는 재단증분변위를 부재좌표계로 좌표변환시킨다.

(2) 그림 2를 참조하여 강제회전변위($\Delta\gamma$)를 구하고, 이를 이용하여 새로운 좌표변환 매트릭스를 구성한다.

$$\Delta\gamma = (\Delta V^q - \Delta V^p)/L \quad (21)$$

(3) 부재양단의 경계조건에 따라 세가지 경우에

대응하는 순수변형성분($\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\Theta$)과 재단력증분($\Delta P, \Delta M^p, \Delta M^q$)을 구한다.

경우 1) 양단이 모두 강절인 경우 : 문헌⁽⁶⁾ 참조

경우 2) 오른쪽단은 활절이고 왼쪽단은 강절인 경우(그림 2a 참조) :

$$\Delta\theta_1 = \Delta\omega^p - \Delta\gamma, \quad \Delta\theta_2 = -\Delta\theta_1 D_4 / (2D_3)$$

$$\Delta U = \Delta U^q - \Delta U^p + \Delta\delta \quad (21)$$

$$\frac{\Delta\delta}{L} = (\Delta\theta_1^2 + \Delta\theta_2^2) \frac{6S^2 + S + 1/15}{(1 + 12S)^2}$$

$$- \Delta\theta_1 \Delta\theta_2 \frac{12S^2 + 2S + 1/30}{(1 + 12S)^2}$$

$$\Delta M^p = (4D_3 \Delta\theta_1 + 2D_4 \Delta\theta_2) \cdot EI/L$$

$$\Delta M^q = (2D_4 \Delta\theta_1 + 4D_3 \Delta\theta_2) \cdot EI/L = 0.0$$

$$\Delta P = \Delta U \cdot EA/L$$

여기서 유한분절법의 경우에는 $D_3 = \frac{EI}{L} \phi_3$, $D_4 = \frac{EI}{L} \phi_4$ 로 산정하고, 유한요소법의 경우에는 $D_3 = c_3 + {}^0F_1 \cdot m_3$, $D_4 = c_4 + {}^0F_1 \cdot m_4$ 로 얻는다. 그리고 $\Delta\delta$ 는 휨으로 인한 축방향의 상대적인 변위성분을 나타낸다. 경우 3) 오른쪽단은 강절이고 왼쪽단은 활절인

경우(그림 2b 참조) :

$$\Delta\theta_1 = -\Delta\theta_2 D_4 / (2D_3), \quad \Delta\theta_2 = \Delta w^q - \Delta\gamma$$

$$\Delta U = \Delta U^q - \Delta U^p + \Delta\delta$$

$$\Delta M^p = (4D_3 \Delta\theta_1 + 2D_4 \Delta\theta_2) \cdot EI/L = 0.0$$

$$\Delta M^q = (2D_4 \Delta\theta_1 + 4D_3 \Delta\theta_2) \cdot EI/L$$

$$\Delta P = \Delta U \cdot EA/L \quad (22)$$

여기서 D_3, D_4 는 경우 2)와 같다.

(4) 이전의 재단력벡터에 단계 (3)에서 구한 재단력증분을 더하여 총재단력벡터를 구한다.

(5) 외력벡터와 재단력벡터의 차이로써 불평형하중을 산정한다.

5. 數値解析例

본 연구에서 제시한 이론의 타당성을 검증하기 위하여 컴퓨터 프로그램(FARC)을 개발하였다. 그림 3과 같은 내부힌지를 갖는 평면뼈대 구조에 대하여 대변형 유한요소해석을 수행하였으며, 이러한 구조의 후좌굴거동을 추적하기 위하여 변위 및 하중증분 알고리즘⁽⁷⁾을 적용하였다. 내부힌지가 있는 평면뼈

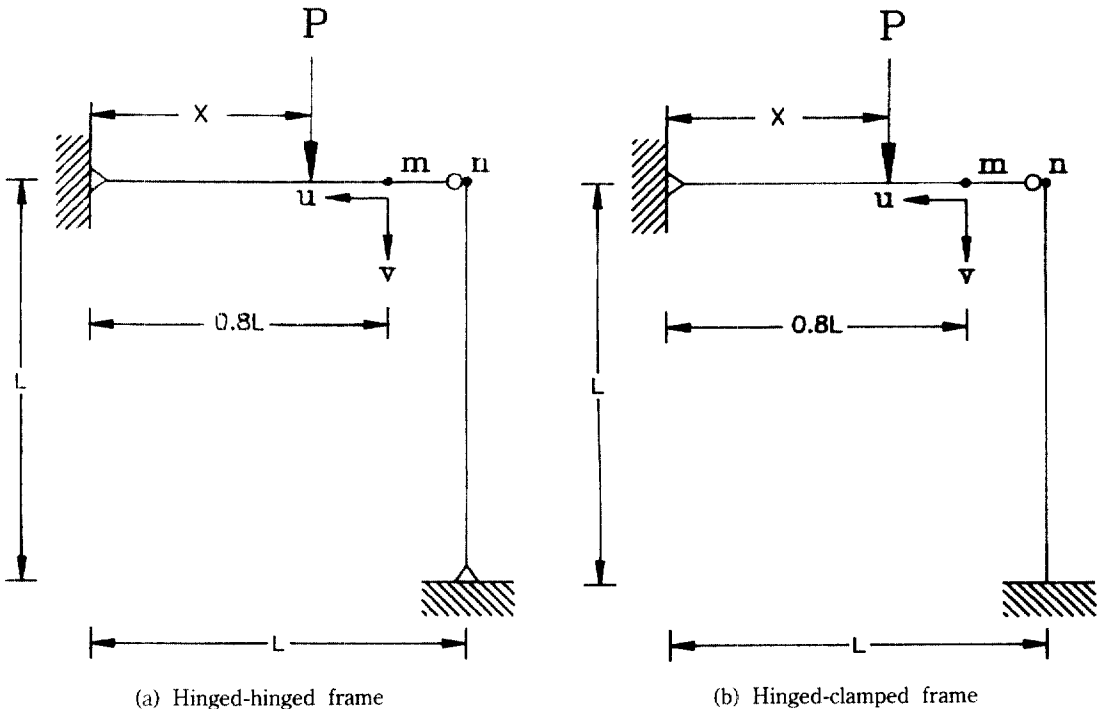


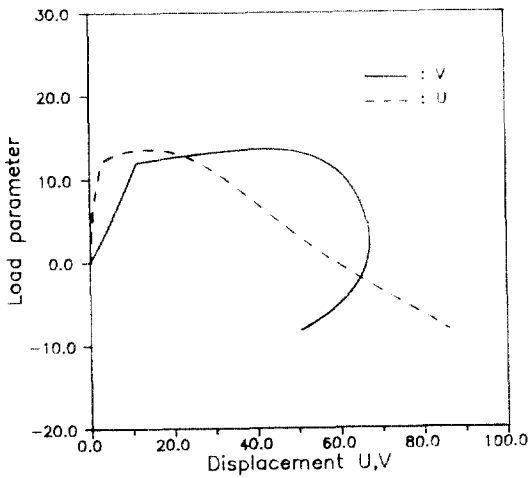
그림 3. Hinged right-angled frame with internal hinge.

대구조의 좌굴해석의 경우에, 유한분절법에 의한 점선강도매트릭스는 부재당 한개의 요소만을 사용하여도 유한분절법에 의한 점선강도매트릭스는 엄밀해와 동일한 임계하중값이 얻어지지만 유한요소법에 의한 탄성 및 기하학적인 강도매트릭스는 부재당 여러개의 요소로 분할하여야 엄밀해에 근접하는 임계하중값이 산출되었다. 한편, 내부 힌지가 있는 평면뼈대구조의 대변형해석의 경우에는 유한분절법과 유한요소법에 의한 해석결과가 거의 일치하

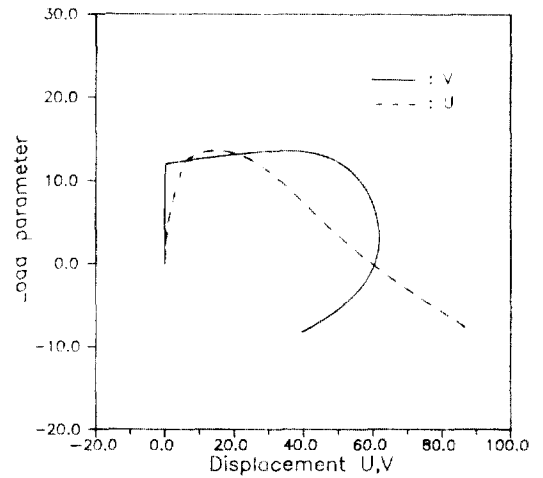
였다. 따라서 본 장에서 다루는 예제에서는 유한분절법에 의한 해석결과만을 제시한다.

그림 3은 왼쪽의 힌지로부터 거리 x 만큼 떨어진 지점에서 횡하중을 받는 양단 힌지 및 힌지-고정인 직각뼈대 구조물을 나타낸 것이다. 수평, 수직부재를 각각 10개의 유한요소로 분할하여 비선형해석을 수행하였으며 해석에 사용된 재원된 다음과 같다.

$$L = 120 \text{ cm}, E = 7.2 \times 10^6 \text{ N/cm}^2, A = 6 \text{ cm}^2, I = 2 \text{ cm}^4$$

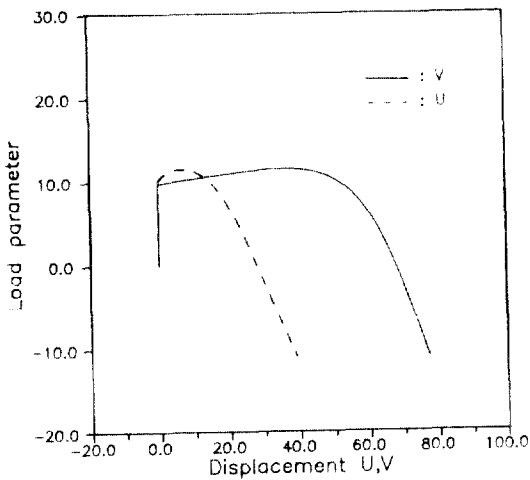


(a) Load-deflection curves of point m

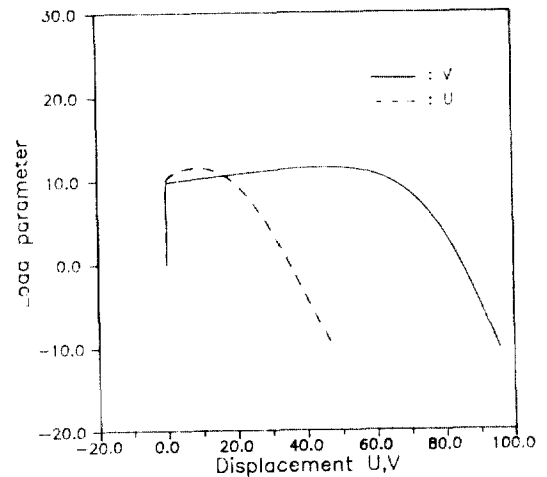


(b) Load-deflection curves of point n

그림 4. Hinged right-angled frame with internal hinge subjected to a lateral force at $x=0.8L$.

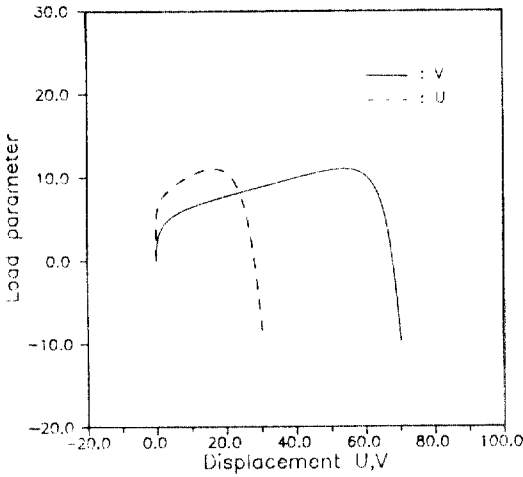


(a) Load-deflection curves of point m

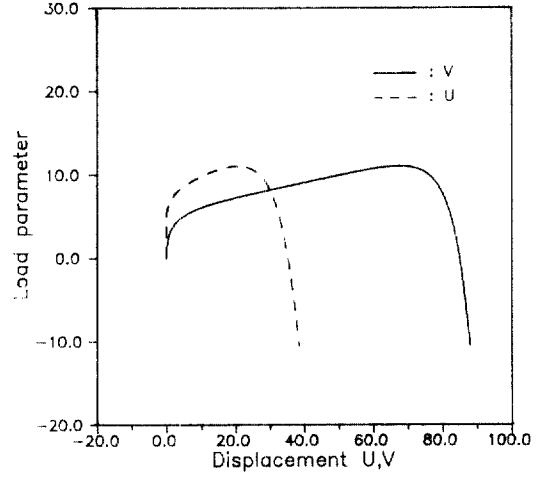


(b) Load-deflection curves of point n

그림 5. Hinged right-angled frame with internal hinge subjected to a lateral force at $x=L$.

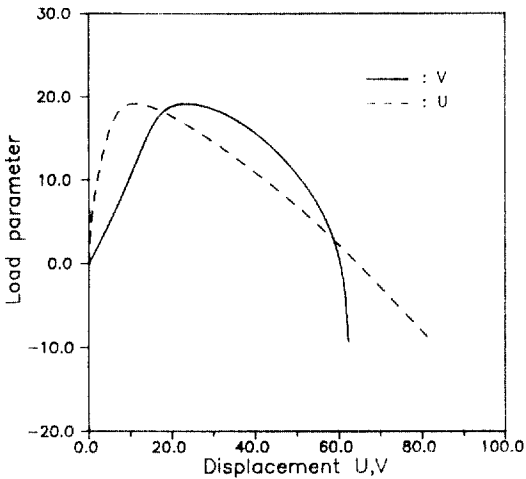


(a) Load-deflection curves of point m

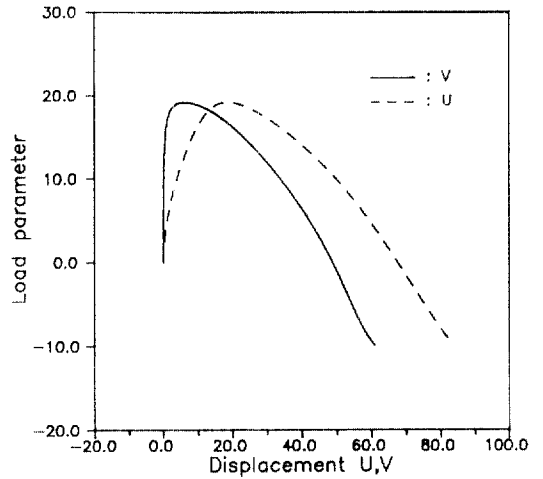


(b) Load-deflection curves of point n

그림 6. Hinged right-angled frame with internal hinge subjected to a lateral force at $x=1.2L$.



(a) Load-deflection curves of point m



(b) Load-deflection curves of point n

그림 7. Hinged-clamped right-angled frame with internal hinge subjected to a lateral force at $x=0.8L$.

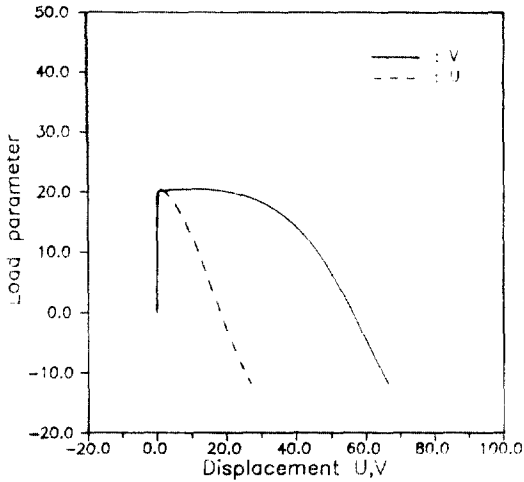
표 1. Limit loads of hinged-hinged frame according to the variation of distance

x	0.6L	0.7L	0.8L	0.9L	1.0L	1.1L	1.2L
Limit load ($\lambda=PL^2/EI$)	17.016	14.770	13.608	12.653	11.529 (9.851)	10.889	11.021

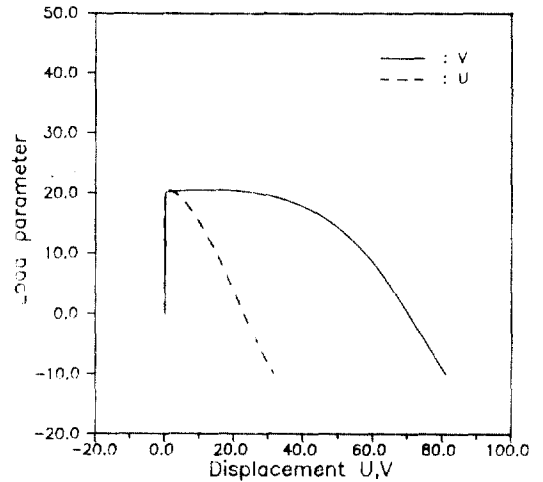
5.1 兩端 힌지인 直角뿔대 構造物

그림 4a, 4b와 그림 6a, 6b는 각각 $x=0.8L, 1.2L$ 에 횡하중 P가 작용할 때 양단힌지인 직각뿔대 구조 (그림 3a)의 m점과 n점의 수평, 수직변위와 하중과

의 관계를 곡선으로 나타낸 것이다. 그림 5는 후좌 굴거동의 추적이 가능하도록하기 위하여 $x=L$ 의 위치에 횡하중 P와 함께 수직부재의 중양점에 수평하중 $0.001P$ 를 추가로 작용시켰을 때의 해석결과

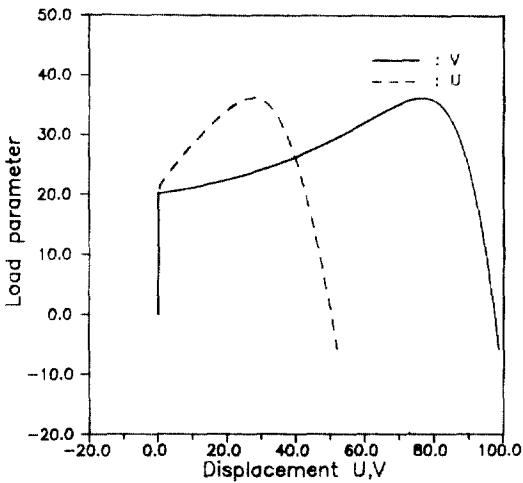


(a) Load-deflection curves of point m

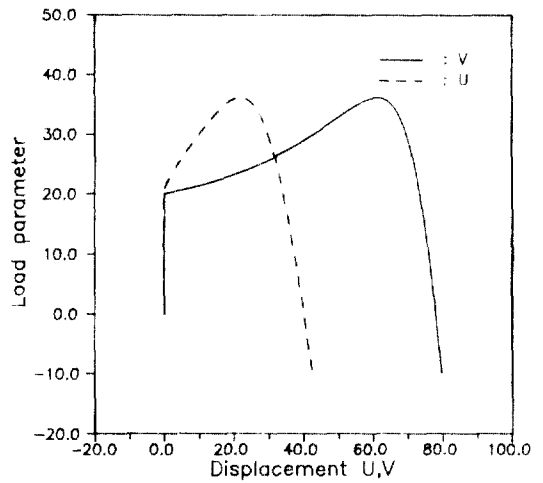


(b) Load-deflection curves of point n

그림 8. Hinged-clamped right-angled frame with internal hinge subjected to a lateral force at $x=L$ and a horizontal force in the right direction.



(a) Load-deflection curves of point m



(b) Load-deflection curves of point n

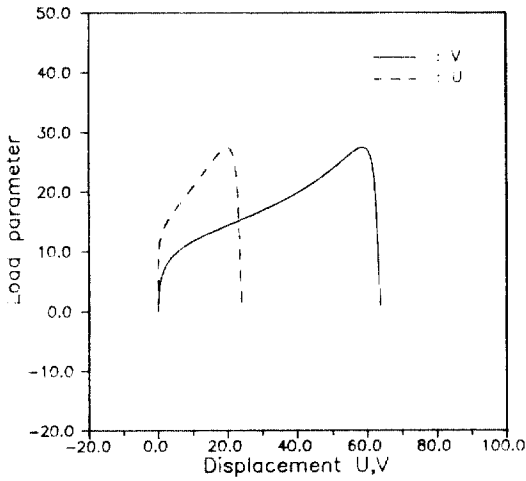
그림 9. Hinged-clamped right-angled frame with internal hinge subjected to a lateral force at $x=L$ and a horizontal force in the left direction.

를 표시한 것이다. 이때 m점과 n점의 변위가 수평 하중의 방향에 상관없이 거의 동일한 결과를 보였기 때문에, 그림 5는 수평하중이 오른쪽으로 작용하는 경우에 대응하는 결과만을 나타낸 것이다. 표 1은 횡하중의 위치의 변화에 따른 상부극한하중의 크기를 표로 정리한 것이다. 여기서 괄호안의 값은 그림 5에서 기울기가 급격히 변하는 지점의 하중값을 나타낸 것이며 엄밀한 임계하중값($\lambda_{cr}=9.870$)과 거

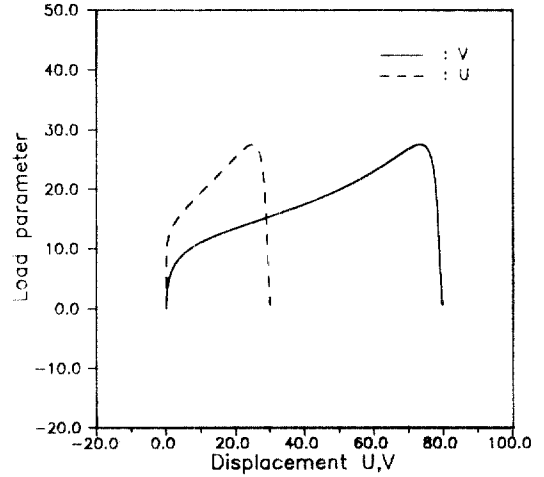
의 일치함을 알 수 있다.

5.2 一端 힌지, 他端 固定인 直角띠대 構造物

그림 7a, 7b와 그림 10a, 10b는 각각 $x=0.8L$, $1.2L$ 에 횡하중 P 가 작용할 때 일단힌지, 타단고정인 직각띠대 구조(그림 3b)의 m점과 n점의 수평, 수직 변위와 하중과의 관계를 나타낸 것이다. 후좌굴거동의 추적이 가능하도록 하기 위하여, 그림 8a, 8b와



(b) Load-deflection curves of point n



(a) Load-deflection curves of point m

그림 10. Hinged-clamped right-angled frame with internal hinge subjected to a lateral force at $x=1.2L$.

표 2. Limit loads of hinged-clamped frame according to the variation of distance

x	0.6L	0.7L	0.8L	0.9L	1.0L	1.1L	1.2L
Limit load ($\lambda = PL^2/EI$)	18.824	18.166	19.167	20.677	20.505* 36.103**	46.449	27.485

그림 9a, 9b는 각각 $x=L$ 의 위치에 횡하중 P와 함께 수직부재의 중앙점에 수평하중이 오른쪽, 왼쪽으로 작용하는 경우에 대응하는 해석결과를 표시한 것이다. 또한, 표 2는 횡하중의 위치의 변화에 따른 상부극한하중의 크기를 표로 정리한 것이다. 표 2에서 *, **로 표시된 값들은 각각 수평하중이 오른쪽(그림 8a, 8b), 왼쪽(그림 9a, 9b)으로 작용하는 경우에 대응하는 극한하중값을 나타낸 것이며, 특히 *로 표시된 값은 유한분절법에 의한 임계하중값($\lambda=20.190$) 및 유한요소법에 의한 임계하중값($\lambda=20.207$)과 잘 일치함을 알 수 있다.

6. 結 論

内部힌지의 효과와 初期의 軸方向力을 고려한 2次元 보-기둥의 平衡方程式, 힘-變位關係式으로부터 嚴密한 接線剛度 매트릭스를 유도하고 幾何學的인 非線形 解析에 적용시키는 有限分節法과 内部힌지를 고려하는 Hermitian 多項式을 이용하여 彈性 및

幾何學的인 剛度매트릭스를 산정하고 이를 非線形 解析에 사용하는 有限要素法을 제시하였다. 이러한 두가지의 보-기둥 要素들을 變位 및 荷重増分 알고리즘과 결합시켜 平面 뼈대 構造의 大變形 및 後挫 屈解析에 적용하였다. 그 結果 本 研究에 제시한 解析理論 및 方法이 内部힌지가 존재하는 平面 뼈대 構造의 幾何學的인 非線形 解析에 適用될 수 있다고 判斷된다.

參考文獻

1. Wen, R.K. and Rahimzadeh, J., "Non-linear Elastic Frame Analysis by Finite Element", *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 109, No. 8, August, 1983, pp. 1952-1971.
2. Saafan, S.A., "Non-linear Behavior of Structural Plane Frames", *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 89, No. ST4, August, 1963, pp. 557-579.
3. Oran, C., "Tangent Stiffness in Plane Frames", *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 99, No. ST6, June, 1973, pp. 973-985.

4. Oran, C., "Tangent Stiffness in Space Frames", *J. Struct. Div.*, ASCE, Vol. 99, No. ST6, June, 1973, pp. 987-1001.
5. Connor, J.J., *Analysis of Structural Member Systems*, The Ronald Press Company, New York, 1976, pp. 585-603.
6. 金文榮, 張丞弼, "剪斷變形을 고려한 平面剛架 構造物의 幾何的인 非線形 解析", *大韓土木學會論文集*, 第10卷, 第1號, 1990, pp. 27-36.
7. 金文榮, 張丞弼, "保存力 및 非保存力을 받는 構造物의 幾何的 非線形 有限要素解析을 위한 變位 및 荷重増分 알고리즘의 開發", *大韓土木學會論文集*, 第10卷, 第2號, 1990, pp. 211-22.
8. Timoshenko, S.P. and Gear, J.M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1961, pp. 46-162. (接受: 1993. 10. 28)

부록. Stability function for a beam element with the internal hinge

$^{\circ}F_c < 0$	$^{\circ}F_1 > 0$
$\beta > 0.01$	$\beta > 0.01$
$\psi_1 = \frac{\beta^3 \cos\beta}{3 \psi^-} (sf+1)^2$ $\psi_2 = \frac{\beta^3 \sin\beta}{3 \psi^-} (sf+1)$	$\psi_1 = \frac{\beta^3 \cosh\beta}{3 \psi^+} (sf+1)^2$ $\psi_2 = \frac{\beta^3 \sinh\beta}{3 \psi^+} (sf+1)$
$0 < \beta < 0.01$	$0 < \beta < 0.01$
$\psi_1 = \frac{1}{1+3S} - \beta^2 \frac{3S^2+2S+2/5}{(1+3S)^2}$ $\psi_2 = \frac{1}{1+3S} - \beta^2 \frac{1/15}{(1+3S)^2}$	$\psi_1 = \frac{1}{1+3S} + \beta^2 \frac{3S^2+2S+2/5}{(1+3S)^2}$ $\psi_2 = \frac{1}{1+3S} + \beta^2 \frac{1/15}{(1+3S)^2}$

여기서 $\psi^- = \sin\beta - \beta \cos\beta (sf+1)$

$\psi^+ = -\sinh\beta + \beta \cosh\beta (sf+1)$

$sf = f_s \cdot ^{\circ}F_1 / (GA)$, $S = f_s \cdot EI / (GA \cdot L^2)$

$\beta = L \cdot \sqrt{|^{\circ}F_1| / [EI \cdot (1+sf)]}$