

3차원 층구조체의 복합해석 및 컴퓨터 프로그램의 개발

Development of Composite Theory and Computer
Program for 3-D Layered System

임종균* · 박문호** · 김진규***

Lim, Chong Kyun · Park, Moon Ho · Kim, Jin Kyu

Abstract

An equivalent homogeneous 3-D linear composite analysis and accompanying finite element program is presented for elastomeric bearings. This study is limited to the 3-D layered system with linear, elastic, isoparametric small deformation. And we used method of multiscale to model the 3-dimensional configurations and overall response of the layered elastomeric bearings with global and local coordinates. The primary dependent variables for the theory have been selected that require only C_0 continuity of the finite element analysis. As a result, it is very simple and computationally economical. The presented theory can also be applied easily to the analysis of nonlinear behavior of layered systems. And those of past are not applicable to nonlinear analysis, because it uses superposition theory. Numerical examples are presented to verify the theory and to illustrate potential applications of the analysis.

요 지

본 연구는 3차원 층구조체의 복합이론 및 유한요소해석 프로그램의 개발에 목적이 있다. 3차원 층구조체는 선형, 탄성, 등방성의 작은 변위에 제한을 두었으며, 변위를 나타내기 위하여 global 좌표 축외에 local 좌표축을 사용하는 multiscale의 방법을 이용하였다. 유한요소법의 적용시 요구되는 주종속 변수들은 C_0 연속성을 만족하도록 택하여 해석하였으며 그결과 해석이 아주 간편하였으며 계산과정이 매우 경제적이었다. 지금까지 개발되어온 대개의 복합이론은 중첩의 원리를 사용하여 비선형 해석에는 쉽게 적용될 수 없었으나 본 연구에서 개발한 복합이론은 비선형해석에 용이하게 적용할 수 있다. 본 연구에서 개발된 복합이론의 정당성과 사용성을 입증하기 위하여 2차원 및 3차원의 탄성받침을 해석하여 이산화해석의 결과치와 비교, 검토하였다.

* 정희원 · 경북대학교 토목공학과 교수

** 정희원 · 경북대학교 토목공학과 교수

*** 정희원 · 경북대학교 토목공학과 박사과정 수료

1. 서론

강성과 연성의 물질이 서로 층층이 교차하며 이루어진 층구조체는 교량의 탄성받침,⁽¹⁾ 로켓의 flex-seal,⁽²⁾ 헬리콥터의 rotor bearing,⁽³⁾ 흙과 토질섬유로 이루어진 보강토 구조물⁽⁴⁾ 등 여러 분야에서 사용되고 있다. 층구조체는 구조체를 이루고 있는 두 물질의 강성의 차이가 크고 여러 층으로 형성되어 있기 때문에 해석의 어려움이 있으며, 또한 연성 물질의 비선형과 비탄성의 성질을 고려하면 해석이 더욱 어려워지나 본 연구에서는 선형, 탄성 해석에 제한을 두었다. 층구조체의 해석 방법은 크게 이산화해석과 복합해석으로 나눌 수 있으며, 이산화해석은 일반적으로 사용되는 유한요소법으로서 층구조체를 해석함에 있어 각 재료 사이의 경계선이 요소의 경계와 일치하도록 구조체를 분할하여 해석하는 방법으로서 많은 수의 요소를 필요로 한다. 3차원 층구조체를 이산화 방법으로 해석한다면 소요의 정확도를 얻는데 어려움이 클 뿐 아니라 엄청난 컴퓨터 시간을 필요로 한다.^(3,5) 한편 복합해석은 층구조체를 등가 균질성, 이방성의 물체로 취급할 수 있는 복합이론에 근거⁽⁶⁾를 두므로 이산화해석과는 달리 구조체를 이루고 있는 층을 고려하지 않고 임의의 요소 분할을 할 수 있어 결과적으로 아주 적은 요소를 가지고도 해석이 가능하게 된다. 이와같이 간편하고 경제적인 3차원 복합해석의 개발이 본 연구의 목적이며 이론은 이미 개발된 2차원 복합해석⁽⁷⁾에 근거를 두었다.

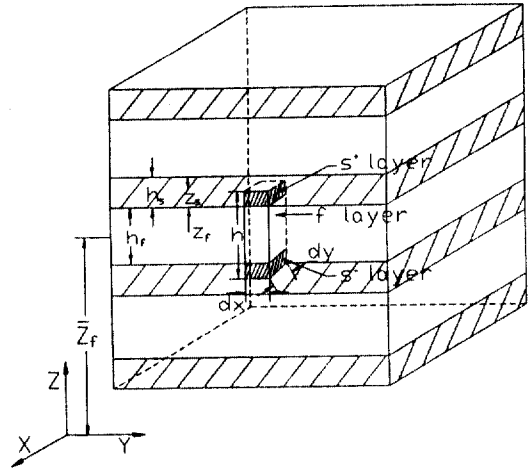


그림 1. 층구조체의 좌표축 및 단위세포.

$$\tau_{xyi} = G_i \gamma_{xyi} \quad (2)$$

식 (1), (2) 중 β , R_i 및 α_i 는 다음과 같다.

$$\beta = \frac{3K_s + 4G_s}{3} = \frac{E_s(1-\nu_s)}{(1+\nu_s)(1-2\nu_s)} \quad (3)$$

$$R_i = \begin{cases} 1, & i=f \\ R = \frac{3K_i + 4G_s}{3K_s + 4G_s}, & i=s \end{cases} \quad (4)$$

$$\alpha_i = \frac{3K_i - 2G_i}{3K_i + 4G_i} = \frac{\nu_i}{1-\nu_i} \quad (5)$$

여기서 K , G , ν 는 각각 체적계수, 전단계수, 포아손비를 나타내며 선형 및 탄성 3차원에서의 변형률과 변위의 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon_{xi} = u_{i,x} \quad (6)$$

$$\gamma_{xyi} = u_{i,y} + v_{i,x}, \text{ etc.} \quad (7)$$

2.2 복합이론

일반적으로 3차원 구조체의 어느 특정한 점에서의 변위는 x , y , z 방향의 평균 변위만으로 정의될 수 있으나 비균질인 층구조체를 등가 균질로 취급하는 복합이론에서는 이들 평균적 의미의 변위만으로는 충분하지 못하며 추가의 변수가 필요하다. 본 연구에서는 이들 추가의 변수들을 이미 개발된 2차원 층구조체⁽⁷⁾의 경우와 같이 평균 변위와 강성재료의

2.1 변위 및 기호

선형, 탄성, 등방성, 작은 변위를 일으키며 완전히 부착된 3차원 층구조체를 이루고 있는 단위세포(unit cell)와 좌표축을 그림 1에 나타내었다.

강성 물질을 "s" 연성 물질을 "f"로 표시하며 x , y , z 축 방향으로의 변위를 각각 u , v , w 로 표시하고 복합이론에 사용되는 평균적 의미의 각 축방향으로의 변위는 \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} 를 사용한다. 3차원으로 표시되는 i 재료의 응력과 변형률의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{xi} = \beta R_i [\epsilon_{xi} + \alpha_i(\epsilon_{xi} + \epsilon_{yi})] \quad (1)$$

실제 변위와의 차이를 나타내는 δ 와 강성재료의 상대적 회전을 나타내는 ϕ 를 사용하여 정립하였으며 이들은 그림 2와 그림 3에 각각 도시하였다.

이와같이 3차원 층구조체의 변위를 정확히 나타내기 위해서는 평균적인 거동을 해결하기 위한 global 좌표축과 국부적으로 일어나는 각 층의 실제적인 변위를 나타내는 local 좌표축을 가지는 multiscale의 방법이 사용되어야 하며 이들은 그림 1에 도시하였다. 즉, global 좌표축은 x, y, z 이고 local 좌표축은 z_i 와 z_s 로서 각각 “f”층과 “s”층의 중심에 원점을 두며 상하 경계면에서 ± 1 의 값을 갖도록하였다.

$$z_i = \frac{2}{h_i} (z - \bar{z}_i) \quad (8)$$

변위의 근사표현은 평균적 의미의 global 좌표축 함수와 local 좌표축 z_i, z_s 를 독립 변수로 하는 다항식으로 나타내며 이들 global 좌표축의 변수들은 단위세포내에서 서서히 변화하므로 Taylor 급수의 처음 4항만으로 표현될 수 있다. 즉, g 를 평균 변위를 의미하는 global 변수의 하나로 보면

$$g(x, y, z) = g^f + g^f_x X + g^f_y Y + g^f_z (z - \bar{z}_i) \quad (9)$$

$$-\frac{\Delta x}{2} \leq X \leq \frac{\Delta x}{2} ; -\frac{\Delta y}{2} \leq Y \leq \frac{\Delta y}{2} ;$$

$$-\frac{h}{2} \leq z - \bar{z}_i \leq \frac{h}{2}$$

$$g_x = g^f_x ; \text{etc.} \quad (10)$$

$$g_{xx} = 0 ; \text{etc.} \quad (11)$$

“+s”층과 “-s”층 중심에서의 값은 다음과 같다.

$$g^{+s} = g^f \pm \frac{h}{2} g^f_z \quad (12)$$

$$g^{+s}_z = g^f_z \quad (13)$$

위와 같은 근사표현에 따라 “s”층의 변위를 평판이론에 근거하여 정립하면 다음과 같다.

$$u^s = \bar{u}^s - \delta_x^s - \frac{h_s}{2} \phi_x^s z_s \quad (14)$$

$$v^s = \bar{v}^s - \delta_y^s - \frac{h_s}{2} \phi_y^s z_s \quad (15)$$

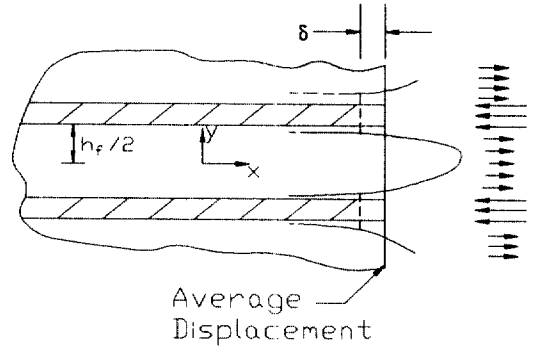


그림 2. 복합이론에 사용되는 추가의 변수 δ .

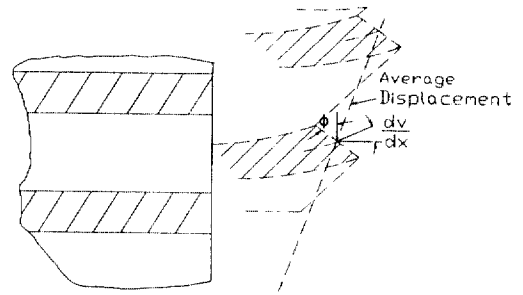


그림 3. 복합이론에 사용되는 추가의 변수 ϕ .

$$w^s = \bar{w}^s + B_0^s + B_1^s z_s + \alpha_s \frac{h_s^2}{2} (\phi_{x,x}^s + \phi_{y,y}^s) z_s^2 \quad (16)$$

여기서 $\delta_x^s, \delta_y^s, B_0^s$ 는 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 가 평균 변위를 나타내기 위하여 포함되었으며 ϕ_x^s, ϕ_y^s 는 “s”층에 생기는 휨과 전단변형을 고려한 것이다. B_1^s 항은 z방향의 등분포 응력에 대한 비균등 변형률을 고려한 것이며 식 (16)의 마지막 항은 휨 변형에 의한 포아손의 영향을 표현한 것이다. 식 (12)와 (13)을 이용하여 “±s”층에 대한 변위를 나타내면 다음과 같다.

$$u^{+s} = \bar{u}^f \pm \frac{h}{2} \bar{u}^f_z - \delta_x^f \mp \frac{h}{2} \delta_{x,z}^f - \frac{h_s}{2} (\phi_x^f \pm \frac{h}{2} \phi_{x,z}^f) z_s \quad (17)$$

$$v^{+s} = \bar{v}^f \pm \frac{h}{2} \bar{v}^f_z - \delta_y^f \mp \frac{h}{2} \delta_{y,z}^f - \frac{h_s}{2} (\phi_y^f \pm \frac{h}{2} \phi_{y,z}^f) z_s \quad (18)$$

$$w^{+s} = \bar{w}^f \pm \frac{h}{w} \bar{w}^f_z + B_0^f \pm \frac{h}{2} B_{0,z}^f + \frac{h}{2} (B_1^f \pm \frac{h}{2} B_{1,z}^f) z_s + \alpha_s \frac{h_s^2}{2} (\phi_{x,x}^f + \phi_{y,y}^f) z_s^2 \quad (19)$$

한편 “f” 층의 근사 변위를정립하면 다음과 같다.

$$u^f = \bar{u}^f + C_0^f + C_1^f z_f + C_2^f z_f^2 \quad (20)$$

$$v^f = \bar{v}^f + D_0^f + D_1^f z_f + D_2^f z_f^2 \quad (21)$$

$$w^f = \bar{w}^f + E_0^f + E_1^f z_f - \frac{h_f}{2} (C_{1,x}^f + D_{1,y}^f) z_f^2 - \frac{h_f}{6} (C_{2,x}^f + D_{2,y}^f) z_f^3 \quad (22)$$

여기서 C_0, D_0, E_0 는 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 가 평균 변위가 될 수 있도록 조정하기 위하여 포함된 항이며 C_1, D_1 항은 등분포 전단응력을 받을 경우 평균 변위와 실제 변위와의 차이를 나타내기 위한 항이다. C_2, D_2 항은 “f” 층의 변위를 2차곡선으로 가정한 것이며 E_1 항은 z방향으로의 비 등분포 변형률을 고려한 것이다. 식 (22)의 나머지 2항은 C_1, C_2, D_1, D_2 항에 대한 포아손의 영향을 고려한 것으로 “f” 물질의 높은 체적 팽창계수로 인하여 체적 변화가 z방향으로 상수이어야 한다는 가정에서 나온것이다. 다항식으로 표현된 각 층의 변위는 “f” 층의 평균 변위로 표현되므로 편의상 계수에 나타난 첨자 “f”를 생략하였으며 이들 계수를 결정하기 위하여 다음과 같은 세가지 조건들을 적용하였다.

① $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 는 는 층구조체의 평균 변위를 나타내므로 단위세포내에서 다음의 식을 만족시켜야 한다.

$$\frac{h_s}{2} \int_0^1 (u^{-s} - \bar{u}) dz_s + \frac{h_f}{2} \int_{-1}^1 (u^f - \bar{u}) dz_f + \frac{h_s}{2} \left(\int_{-1}^0 (u^{+s} - \bar{u}) dz_s = 0 \right) \quad (23)$$

식 (17)과 (20)을 위의 식 (23)에 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$-\rho \delta_x + C_0 + \frac{1}{3} C_2 + \frac{h_s^2(1+\rho)}{8} \phi_{x,z} = 0 \quad (24)$$

여기서 $\rho = h_s/h_f$ 를 나타내며 같은 방법을 \bar{v}, \bar{w} 에도 적용시키면 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$-\rho \delta_y + D_0 + \frac{1}{3} D_2 + \frac{h_s^2(1+\rho)}{8} \phi_{y,z} = 0 \quad (25)$$

$$\rho B_0 + \frac{\alpha_s \rho h_s^2}{24} (\phi_{x,x} + \phi_{y,y}) - \frac{h_s}{12} (C_{1,x} + D_{1,y})$$

$$- \frac{h_s(1+\rho)}{4} B_{1,z} + E_0 = 0 \quad (26)$$

② “f”와 “s” 층 경계면에서 변위의 연속조건을 적용시킨다.

$$u^f \left(-\frac{h_f}{2} \right) = u^{-s} \left(\frac{h_s}{2} \right), \quad u^f \left(\frac{h_f}{2} \right) = u^{+s} \left(-\frac{h_s}{2} \right) \quad (27)$$

식 (17)과 (20)을 위의 두식에 적용하면 다음의 식을 얻는다.

$$C_0 + C_2 = -\delta_x + \frac{h_s h}{4} \phi_{x,z} \quad (28)$$

$$C_1 = \frac{h_s}{2} \bar{u}_z - \frac{h}{2} \delta_{x,z} + \frac{h_s}{2} \phi_x \quad (29)$$

식 (24)와 (28)을 이용하면 다음과 같은 식이 정립된다.

$$C_0 = \frac{(1+\rho)}{2} \delta_x - \frac{h_s h_f (1+\rho)(2+3\rho)}{16} \phi_{x,z} \quad (30)$$

$$C_2 = -\frac{3(1+\rho)}{2} \delta_x + \frac{3h_s h_f (1+\rho)(2+3\rho)}{16} \phi_{x,z} \quad (31)$$

이들 연속조건을 \bar{v}, \bar{w} 에도 적용하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$D_0 = \frac{(1+3\rho)}{2} \delta_y - \frac{h_s h_f (1+\rho)(2+3\rho)}{16} \phi_{y,z} \quad (32)$$

$$D_1 = \frac{h}{2} \bar{v}_z - \frac{h}{2} \delta_{y,z} + \frac{h_s}{2} \phi_y \quad (33)$$

$$D_2 = -\frac{3(1+\rho)}{2} \delta_y + \frac{3h_s h_f (1+\rho)(2+\rho)}{16} \phi_{y,z} \quad (34)$$

$$B_0 = \frac{h_f(1+\rho)}{2} B_{1,z} + \frac{\alpha_s h_s^2}{8} (\phi_{x,x} + \phi_{y,y}) =$$

$$E_0 - \frac{h_f}{4} (C_{1,x} + D_{1,y}) \quad (35)$$

$$\frac{h_f(1+\rho)}{2} \bar{w}_z + \frac{h_f(1+\rho)}{8} B_{0,z} - B_1 =$$

$$E_1 - \frac{h_f}{6} (C_{2,x} + D_{2,y}) \quad (36)$$

식 (29), (33), (36)을 x, y, z에 관해 미분하고 이를 이용하여 식 (26)과 (35)의 B_o , E_o 에 대해 풀면 식 (37)과 식 (38)과 같다.

$$B_o = -\frac{h_s h_f}{24(1+\rho)} [2 + \rho \alpha_s (3 + \rho)] (\phi_{x,x} + \phi_{y,y}) - \frac{h_f (1 + \rho) (2 + \rho)}{4} E_{1,z} \quad (37)$$

$$E_o = -\frac{h_s h_f}{24(1+\rho)} [1 + \rho (3 + 2\alpha_s \rho)] (\phi_{x,x} + \phi_{y,y}) - \frac{h_f \rho (1 + \rho)}{4} E_{1,z} \quad (38)$$

식 (37)을 z에 대해 미분하면 $B_{o,z} = 0$ 가 되며 따라서 식 (36)은 다음과 같이 된다.

$$B_1 = -E_1 + \frac{h_f (1 + \rho)}{2} \bar{w}_z - \frac{h_f (1 + \rho)}{4} (\delta_{x,x} + \delta_{y,y}) \quad (39)$$

③ 층 경계면에서 응력의 평형조건을 적용시킨다.

$$\sigma_{z_s} \left(-\frac{h_s}{2} \right) + \sigma_{z_s} \left(-\frac{h_s}{2} \right) = \sigma_{zf} \left(-\frac{h_f}{2} \right) + \sigma_{zf} \left(\frac{h_f}{2} \right) \quad (40)$$

식 (1)을 이용하여 각 층의 응력을 계산한 후 식 (40)에 적용하면 식 (41)과 같이 정리된다.

$$\frac{2\beta}{h_s} B_1 + \beta \alpha_s [(\bar{u}_x + \bar{v}_y) - (\delta_{x,x} + \delta_{y,y})] = \beta R \left[\alpha_f (\bar{u}_x + \bar{v}_y + C_{o,x} + D_{o,y}) + \frac{2}{h_f} E_1 \right] \quad (41)$$

식 (30), (32), (39)을 위식에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$E_1 = \frac{h_s}{2(1+\rho R)} \left\{ \frac{1+\rho}{\rho} \bar{w}_z + (\alpha_s - R\alpha_f) (\bar{u}_x + \bar{v}_y) - \left[\alpha_s + \frac{R\alpha_f(1+3\rho)}{2} + \frac{1+\rho}{2\rho} \right] (\delta_{x,x} + \delta_{y,y}) \right\} \quad (42)$$

위의 식 (42)을 식 (35)~(39)에 대입하여 모든 계수를 구한 후 식 (14)~(16)과 (20)~(22)에 대입하면 다음과 같이 변위에 대해 정립된 결과식을 얻을 수 있다.

$$u_s = \bar{u} - \delta_x - \frac{h_s}{2} \phi_{x,z_s} \quad (43)$$

$$v_s = \bar{v} - \delta_y - \frac{h_f}{2} \phi_{y,z_s} \quad (44)$$

$$w_s = \bar{w} - \frac{h_s h_f}{24(1+\rho)} [2 + \rho \alpha_s (3 + \rho)] (\phi_{x,x} + \delta_{y,y}) + \frac{h_s}{2(1+\rho R)} \left\{ R(1+\rho) \bar{w}_z - (\alpha_s - R\alpha_f) (\bar{u}_x + \bar{v}_y) + (\alpha_s + \rho R\alpha_f) (\delta_{x,x} + \delta_{y,y}) \right\} z_s + \frac{\alpha_s h_s^2}{8} (\phi_{x,x} + \phi_{y,y}) z_s^2 \quad (45)$$

$$u_f = \bar{u} + \frac{(1+3\rho)}{2} \delta_x - \frac{h_s h_f (1+\rho) (2+3\rho)}{16} \phi_{x,z} + \left\{ \frac{h_f (1+\rho)}{2} \bar{u}_z - \frac{h_f (1+\rho)}{2} \delta_{x,z} + \frac{h_s}{2} \phi_x \right\} z_f + \left\{ -\frac{3(1+\rho)}{2} \delta_x + \frac{3h_s h_f (1+\rho) (2+\rho)}{16} \phi_{x,z} \right\} z_f^2 \quad (46)$$

$$v_f = \bar{v} + \frac{(1+3\rho)}{2} \delta_y - \frac{h_s h_f (1+\rho) (2+3\rho)}{16} \phi_{y,z} + \left\{ \frac{h_f (1+\rho)}{2} \bar{v}_z - \frac{h_f (1+\rho)}{2} \delta_{y,z} + \frac{h_s}{2} \phi_y \right\} z_f + \left\{ -\frac{3(1+\rho)}{2} \delta_y + \frac{3h_s h_f (1+\rho) (2+\rho)}{16} \phi_{y,z} \right\} z_f^2 \quad (47)$$

$$w_f = \bar{w} + \frac{h_s h_f}{24(1+\rho)} [1 + \rho (3 + 2\alpha_s \rho)] (\phi_{x,x} + \phi_{y,y}) + \frac{h_s}{2(1+\rho R)} \left\{ \frac{1+\rho}{\rho} \bar{w}_z + (\alpha_s - R\alpha_f) (\bar{u}_x + \bar{v}_y) - \left[\alpha_s + \frac{R\alpha_f(1+3\rho)}{2} + \frac{1+\rho}{2\beta} \right] (\delta_{x,x} + \delta_{y,y}) \right\} z_f - \frac{h_s h_f}{8} (\phi_{x,x} + \phi_{y,y}) z_f^2 + \frac{(1+\rho) h_f}{4} (\delta_{x,x} + \delta_{y,y}) z_f^3 \quad (48)$$

2.3 복합해석

층구조체의 변형에너지는 "s"층들과 "f"층들 각각의 변형에너지의 합으로 나타낼 수 있으며 이때 변형률은 식 (6)과 (7)을 이용하여 구한다. 층구조

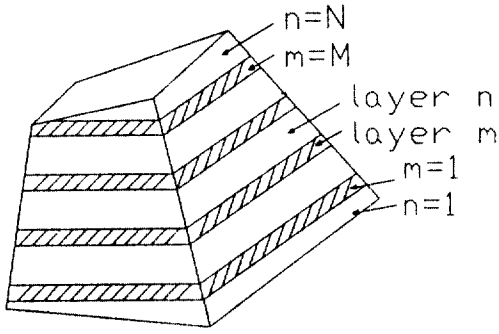


그림 4. 3차원 층구조체의 체적.

체가 그림 4와 같은 형상이라면 “f”물질의 변형에너지는 다음과 같다.

$$U_f = \sum_{n=1}^N \int_{v_n} \frac{1}{2} \{ \beta R [\epsilon_{x_f}^2 + \epsilon_{y_f}^2 + \epsilon_{z_f}^2 + 2\alpha_f (\epsilon_{x_f} \epsilon_{y_f} + \epsilon_{x_f} \epsilon_{z_f} + \epsilon_{y_f} \epsilon_{z_f})] + G_f (\gamma_{xy_f}^2 + \phi_{xz_f}^2 + \gamma_{yz_f}^2) \} dx dy dz \quad (49)$$

“s”층도 마찬가지로 방법으로 구하며 이때 위의 변형에너지는 다음과 같은 항을 포함하게 된다.

$$\int_{v_n} \bar{u}_x \delta_{x,x} z^2 dV = \int_{A_n} \bar{u}_x \delta_{x,x} \left\{ \frac{h_f}{2} \int_{-1}^1 z^2 dz \right\} dy dz \quad (50)$$

또한 V_n' 를 N번째의 “f”층을 포함하는 단위세포의 부피라 한다면 다음의 식이 정립된다.

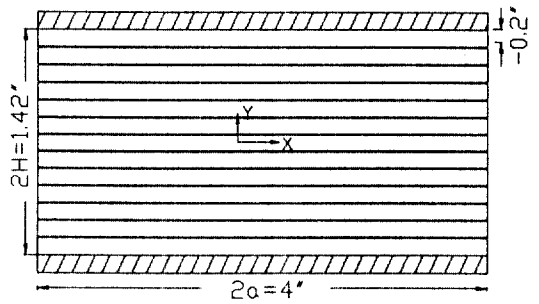
$$h_f \int_{A_n} \bar{u}_x \delta_{x,x} dx dy = \frac{h_f}{h} \int_{v_n} \bar{u}_x \delta_{x,x} dV \quad (51)$$

따라서 각 “f”층에서의 V_n' 의 1에서 N까지의 합은 층구조체의 전체 부피가 된다. “s”층에 대해서도 같은 방법이 적용되며 이와같은 방법으로 총 변형에너지를 구하면 다음과 같이 표현된다.

$$U = \frac{1}{1+\rho} \int_{v_2} \frac{1}{2} \langle d \rangle [D] \{ d \} dV \quad (52)$$

여기서 $\langle d \rangle = \langle \bar{u}_x \ \bar{u}_y \ \bar{u}_z \ \bar{v}_x \ \bar{v}_y \ \bar{v}_z \ \bar{w}_x \ \bar{w}_y \ \bar{w}_z \ \delta_{x,x} \ \delta_{x,y} \ \delta_{x,z} \ \delta_y \ \delta_{y,x} \ \delta_{y,y} \ \delta_{y,z} \ \phi_x \ \phi_{x,x} \ \phi_{x,y} \ \phi_{x,z} \ \phi_y \ \phi_{y,x} \ \phi_{y,y} \ \phi_{y,z} \rangle$ 이며 $\langle D \rangle$ 는 부록 I에 나타내었다.

층구조체의 유한요소해석을 위하여 식 (52)을 이용하여 minimum potential energy의 원리를 적용시켰으며 이때 변수들의 연속은 C_0 연속이다. 3-D,



Properties :

$$\begin{aligned} E_s &= 10^7 \text{ psi} & E_f &= 10^4 \text{ psi} \\ \nu_s &= 0.25 & \nu_f &= 0.49 \\ h_s &= 0.01' & h_f &= 0.1' \end{aligned}$$

그림 5. 2차원 탄성받침의 형상 및 재료의 성질.

8 node isoparametric 요소를 사용하였으며 각 node당의 미지수는 7개이다. δ_{xzs} 와 γ_{yzs} 에 의해 변형에너지에 포함된 항들에 대해서는 “s”층에 생길 수 있는 허구의 전단 변형을 피하기 위해 reduced integration을 사용하였으며 그 외의 모든 항에 대해서는 8점 적분을 사용하였다.

3. 해석 및 고찰

본 연구에서 개발된 복합이론 및 이를 이용한 유한요소해석의 효율성을 증명하기 위해 2차원 및 3차원의 예제를 해석하여 이산화 해석의 결과치와 비교하였다.

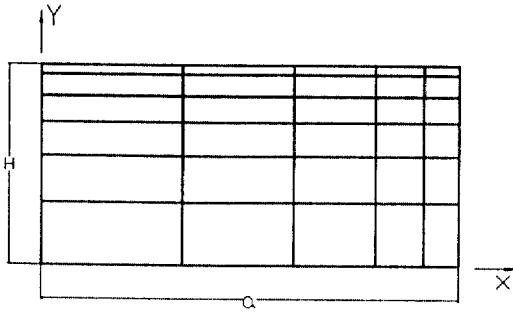
3.1 2차원 층구조체의 해석

3.1.1 Edge cover가 없는 교량의 탄성받침

상 하에 강판을 가지고 있고 총 25개의 금속과 고무층으로 이루어진 교량의 탄성받침이 plane strain 압축을 받는 그림 5의 경우를 해석하였다.

본 연구에서 개발된 복합해석과 이산화해석에 의한 결과를 그림 7, 8에 나타내었으며, 이산화해석에서는 133개의 8 node 요소를 복합해석에서는 30개의 4 node 요소를 사용하였다. 대칭을 이용하여 전체 층구조체의 1/4만을 해석하였으며 해석에 사용된 요소분할과 경계조건을 그림 6에 나타내었다.

그림 7에서는 자유단에서의 평균 변위를 구하였



Boundary conditions :

$$x = 0 \quad \bar{u} = \delta = \phi = 0$$

$$y = 0 \quad \bar{v} = \phi = 0$$

$$y = H \quad \bar{u} = \delta, \bar{v} = -0.1, \phi = 0$$

그림 6. 요소분할 형상 및 경계조건.

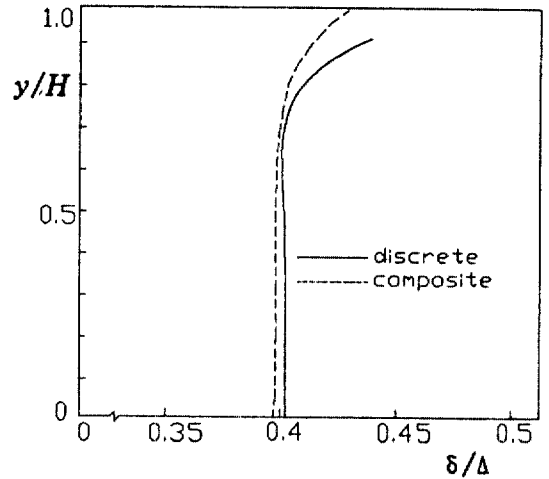


그림 8. 자유단에서의 "f"층 최대변위.

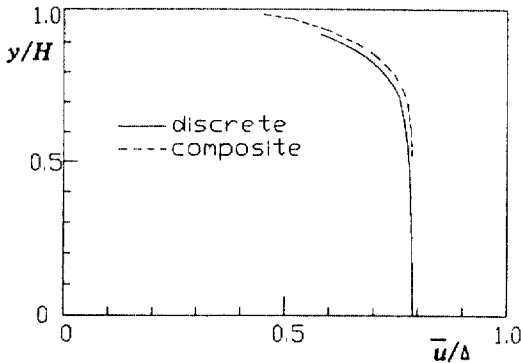


그림 7. 자유단에서의 \bar{u} 의 변화.

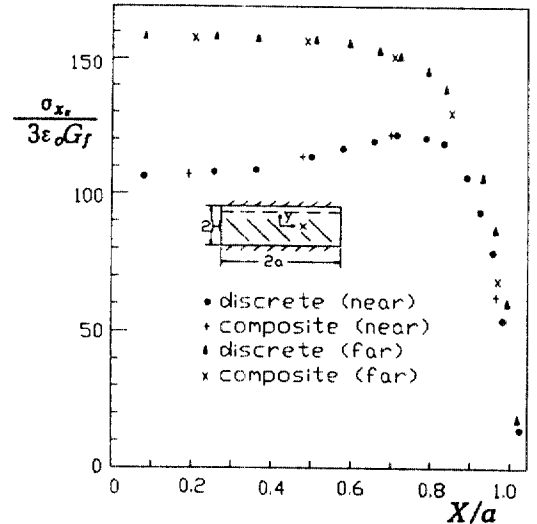


그림 9. "s"층 δ_x 의 x축으로의 변화.

으며 그림 8은 자유단에서의 "f"층들의 최대 변위를 나타내었다. 두 경우 모두 이산화해석과 복합해석의 결과가 매우 근접함을 알 수 있다. 단 복합해석을 함에 있어 $y=H$ 에서의 경계조건을 $u_s=0$ 즉, $\bar{u}=\delta$ 로 하였으나 엄격한 의미에서 정확한 경계조건이라 할 수가 없으며 그 결과 $y=H$ 경계면에서 이산화해석의 결과와 약간의 차이를 나타냄을 알 수 있다. 그러나 이것은 적은수의 요소로 구조체를 해석할 수 있는 복합해석의 장점에 비해 아주 미미한 것이다. 그림 9는 강판에서 가장 가까운 금속층과 가장 멀리 떨어진 금속층에 대해 x방향으로의 σ_x 의 변화를 표시하였으며 두 해석 방법의 결과가 거의 완벽하게 일치함을 알 수 있다.

3.1.2 Edge cover가 있는 교량의 탄성받침

대부분의 탄성받침은 금속층의 부식을 방지하기 위해 최소한의 edge cover가 요구된다. 이러한 edge cover가 전체 탄성받침에 미치는 영향을 조사하기 위해 그림 10의 탄성받침을 해석하였다. 3.1.1에서 사용된 탄성받침에 edge cover 0.1 inch를 부착시켜 복합해석 및 이산화해석을 행하였다. 대칭조건을 고려하여 전체의 1/4만을 해석하였으며 복합해석에서는 36개의 요소 즉, 6개의 요소가 edge cover를 위해 추가 되었으며 요소분할 및 경계조건은 그림 6과 동일하다. 복합해석을 함에있어 "f"물질로 이

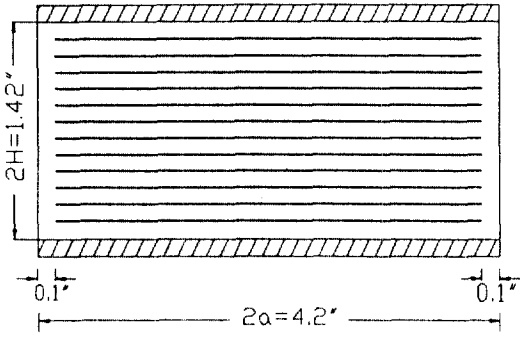


그림 10. Edge cover가 있는 교량의 탄성받침.

표 1. Compression stiffness의 비교

해석방법	탄성받침	Compression stiffness(psi)
이산화 해석	Edge cover가 없을 경우	1.501×10^6
“	Edge cover가 있을 경우	1.543×10^6
복합 해석	Edge cover가 없을 경우	1.513×10^6
“	Edge cover가 있을 경우	1.543×10^6

투어진 edge cover는 “s”물질을 “f”물질과 동일시 취급하면 된다. 이산화해석에서는 171개의 요소를 사용 하였으며 edge cover가 있는 경우와 없는 경우의 compression stiffness를 각각 두가지 방법에 의해 구한 후 표 1에 나타내었다. 그 결과 edge cover가 있는 경우가 약간 더 강하다는 것을 알 수 있었다.

그림 11은 탄성받침 중앙 부근의 금속판에 생기는 σ_x 의 y방향으로의 변화를 나타낸 것이다. Edge cover에서 떨어진 곳의 응력이므로 예상된 바와 같이 edge cover가 없는 경우와 차이를 거의 나타내지 않는다. 따라서 edge cover는 탄성 받침의 거동에 대해 거의 영향을 미치지 않으며 edge cover가 없는 것으로 보고 해석을 할 수가 있으며 이경우 다소 안정적인 해석이 된다.

3.2 3차원 응구조체의 해석

3차원 탄성받침에 대해 본 연구에서 개발된 복합해석과 범용 프로그램인 ANSYS를 이용하여 이산화해석을 하였다. 연구 대상의 탄성받침은 위, 아래 roller support로 지지되어 있으며 압축을 받고 있다. 이경우 “f”와 “s”층의 거동은 각각 어느 층

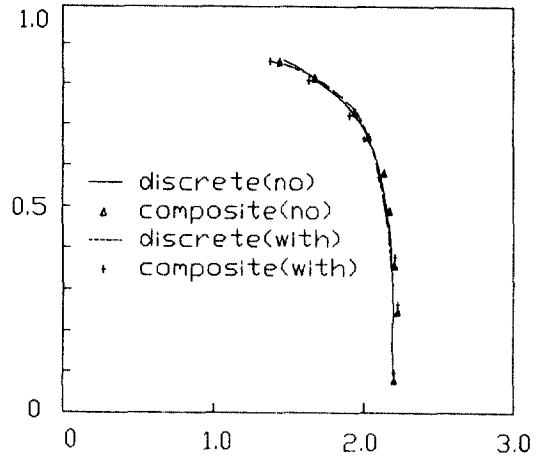
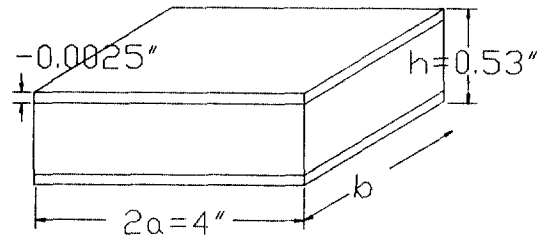


그림 11. “s”층 σ_x 의 y방향으로의 변화($x=0.139$).

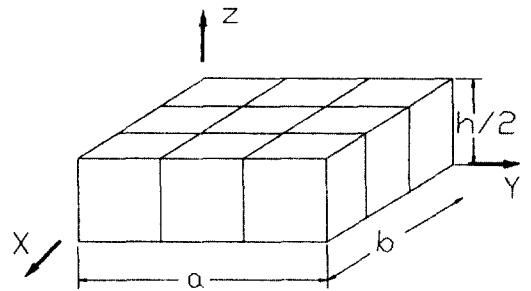


Properties :

$$E_s = 3 \times 10^7 \text{ psi} \quad E_f = 300 \text{ psi}$$

$$\nu_s = 0.3 \quad \nu_f = 0.49$$

$$h_s = 0.03 \text{ " } \quad h_f = 0.5 \text{ " }$$



Boundary condition :

$$x = 0 \quad \bar{u} = \delta_x = \phi_x = 0$$

$$y = 0 \quad \bar{v} = \delta_y = \phi_y = 0$$

$$z = 0 \quad \bar{w} = \phi_x = \phi_y = 0$$

$$z = h/2 \quad \bar{w} = \Delta/2, \phi_x = \phi_y = 0$$

그림 12. 3차원 탄성받침의 요소분할 형상 및 재료의 성질.

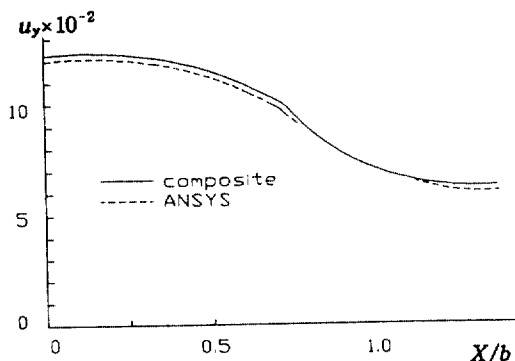


그림 13. (2, y, 0)에서 "f"층의 y방향 최대변위.

이나 동일하다는 것을 쉽게 알 수 있다. 따라서 위, 아래 roller support를 가지며 한개의 "f"층과 두개의 "s"층으로 이루어진 그림12의 층구조체를 해석함으로써 전체 탄성받침의 거동을 알 수가 있다. 이때 "s"층의 두께는 물론 $h_s/2$ 를 사용하며 x, y, z축에 대한 대칭을 고려 전체 탄성받침의 1/8만을 해석한다. 이산화해석에서는 18개의 요소를 사용하였으며 복합해석에서는 9개의 요소를 사용하였다. 그림 13은 자유단에서의 "f"층의 최대 변위를 그렸으며 그림 14와 15는 "f"층의 z방향으로의 변위를 각각 모서리와 중간 위치에서 구한 것이다.

4. 결 론

3차원 층구조체의 선형, 등가균질의 연속체 이론 및 이를 이용한 유한요소해석법을 개발하였다. 이론 및 해석방법은 탄성받침과 같은 층구조체에 대해 모두 적용이 되며 다음과 같은 연구 결과를 얻을 수 있었다.

- ① 본 연구에서 개발된 복합이론 및 유한요소해석은 지금까지의 연구된 이산화해석에 비해 요소분할을 매우 간편하게 할수가 있으며 결과치의 정확도 역시 입증되었다.
- ② 2차원 층구조체는 물론 3차원 층구조체를 해석함에 있어서 상대적으로 매우 적은 요소를 사용하여도 소요의 정확도를 얻을 수 있다. 3차원 층구조체의 해석에 있어 연립방정식의 숫자로 볼때 이산화해석에 비해 1/100-1/1000범위로 컴퓨터 소요 시간을 줄일 수 있다.
- ③ 기존에 개발된 복합해석 방법은 C_1 연속이

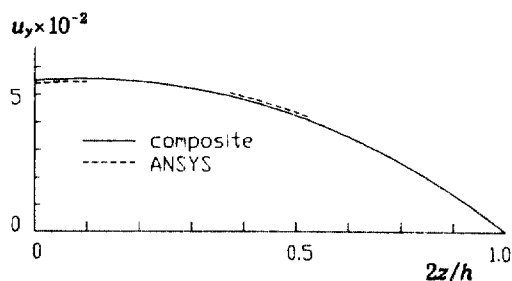


그림 14. (2, 2, z)에서 "f"층의 z방향 변위.

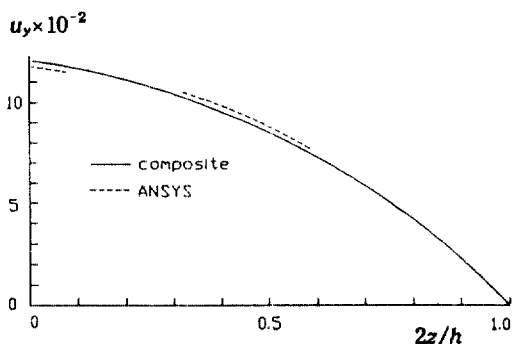


그림 15. (0, 2, z)에서 "f"층의 y방향 변위.

요구되어 유한요소법의 적용이 복잡하였으나 본 연구에서 사용된 변수는 모두 C_0 의 연속만이 요구되므로 유한요소법의 적용이 간단하며 컴퓨터 소요 시간 역시 적어진다.

④ 대부분의 탄성받침에서 요구되는 edge cover는 전체 구조체의 거동에 거의 영향을 미치지 못하므로 무시하고 해석을 해도되며 이 경우는 다소 안정적인 해석결과를 얻게 된다.

Multiscale의 방법을 이용한 본 연구의 과정은 비선형 층구조체의 해석에도 적용시킬 수 있을 것으로 생각되며 이는 장래의 연구 과제가 될 것이다.

감사의 글

본 연구는1990년도 문교부지원 학술진흥재단의 지방대육성 학술연구조성비에 의한 것으로서 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

1. Clark, E.V. and Moulthrop, K., "Load-Deformation

- Characteristics of Elastomeric Bridge Bearing Pads," *Highway Research Record* 34, 1963.
2. "Development of an Elastomeric Seal for Omniaxial Movable Nozzles (lockseal)." *Technical Report No. AFRPLTR-66-112*, Lockheed Propulsion Co., 1966.
 3. Kulkarni, S.B., "Design Criteria for Elastomeric Bearings, Volume II-Design Manual," Thiokol/Wasatch Division, AD/A-024767, March 1976.
 4. Derham, C.J. and Thomos, A.G., "The Design and Use of Rubber Bearing for Vibration Isolation and Seismic Protection of Structure," *Engineering Structure*, Vol. 2, No. 3, July 1980.
 5. Herrmann, L.R., "Finite Element Modeling of Composite Edge Effect," ASCE, 7th Conf. on Electronic Computations, St. Louis, August 1979.
 6. Tasi, S.W. and Hahn, H.T., *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publishing Co., Westport, Conn., 1980.
 7. 임종균, 복합체에 대한 연속체 방정식 및 유한요소 프로그램의 개발, *대한토목학회 논문집*, 제 8권 2호, 1987.
 8. Soni, M.L., "A Microstructure Continuum Theory for Laminated Elastic Composites," Ph.D. Dissertation, Univ. of Texas Austin, May 1977.

(接受: 1993. 7. 22)

부록 I.

[D] Matrix의 0이 아닌 lower triangular 부분의 계수

$$D_{1,1} = D_{5,5} = \beta[R + \rho(1 - a_1 a_2^2)]$$

$$D_{5,1} = \beta(\rho \alpha_s + R \alpha_f - \rho a_1 a_2^2)$$

$$D_{9,1} = D_{9,5} = D \beta a_1 (1 + \rho)(\alpha_f + \rho \alpha_s)$$

$$D_{11,1} = D_{16,5} = \rho \beta (a_1 a_2 a_3 + R - 1)$$

$$D_{16,1} = D_{11,5} = \rho \beta a_2 (a_1 a_3 - 1)$$

$$D_{2,2} = D_{4,2} = D_{4,4} = D_{7,7} = D_{8,8} = \rho G_s + G_f$$

$$D_{12,2} = D_{12,4} = D_{15,2} = D_{15,4} = D_{18,7} = D_{22,8} = \rho(G_f - G_s)$$

$$D_{3,3} = D_{6,6} = D_{13,13} = D_{17,17} = G_f(1 + \rho)^2$$

$$D_{7,3} = D_{8,6} = G_f(1 + \rho)$$

$$D_{13,3} = D_{17,6} = -G_f(1 + \rho)^2$$

$$D_{18,3} = D_{22,6} = G_f \rho(1 + \rho)$$

$$D_{13,7} = D_{17,8} = -G_f(1 + \rho)$$

$$D_{9,9} = \beta R(1 + \rho)^2 a_1$$

$$D_{11,9} = D_{16,9} = \beta \rho a_1 R(1 + \rho)(\alpha_f - \alpha_s)$$

$$D_{10,10} = D_{14,14} = 12 G_f(1 + \rho)^2 / h^2$$

$$D_{11,11} = D_{16,16} = \beta[\rho a_1 a_3^2 + R(1 + \rho)^2(1 - \alpha_f)^2 / 5 + \rho / a_1]$$

$$D_{16,11} = D_{11,11} + \beta[R a_4(\alpha_f - 1) + \rho(\alpha_s - 1)]$$

$$D_{12,12} = D_{15,12} = D_{15,15} = a_4 G_f + \rho G_s$$

$$D_{18,13} = D_{22,17} = -G_f \rho(1 + \rho)$$

$$D_{18,18} = D_{22,22} = \rho(G_s + \rho G_f)$$

$$D_{19,19} = D_{24,24} = \beta h_s^2[\rho(1 - \alpha_s^2 + 2R(1 - \alpha_f))] / 12$$

$$D_{24,19} = \beta h_s^2[\rho(1 - \alpha_s)\alpha_s + R(1 - \alpha_f)] / 12$$

$$D_{20,20} = D_{23,20} = D_{23,23} = h_s^2(\rho G_s + G_f) / 12$$

$$D_{21,10} = D_{25,14} = -3\rho(2 + \rho)(1 + \rho)^2 G_f / 2$$

$$D_{21,21} = D_{25,25} = 3h_s^2(1 + \rho)^2(2 + \rho)^2 G_f / 16$$

여기서 $a_1 = 1/(1 + \rho R)$

$$a_2 = \alpha_s - \alpha_f R$$

$$a_3 = \alpha_s + \rho \alpha_f R$$

$$a_4 = (1 + 2\rho + 6\rho^2) / 5 \text{이다.}$$