

# 축대칭 층구조체의 복합이론 및 유한요소해석프로그램의 개발

## Composite Finite Element Analysis of Axisymmetric Layered Systems

임종균\* · 박문호\*\* · 김진규\*\*\*

Lim, Chong Kyun · Park, Moon Ho · Kim, Jin Kyu

### Abstract

Linear composite theory as well as a finite element program is developed for axisymmetric elastomeric bearings. This study is limited to axisymmetrically loaded horizontal layered systems with linear, elastic, small deformation conditions. A multiscale method is used in the development of the composite theory which enables us to model inhomogeneous layered composites as equivalent homogeneous, orthotropic material. Only continuity of the prime variables is required for the finite element analysis, allowing the use of simple  $C_0$  elements whereas rather complicated theories presented in the past need more requirements. Four node isoparametric elements are used in the study. The developed theory of this paper is limited to linear conditions, however, the analysis can be extended to nonlinear behavior of flexible material in elastomeric bearing by using multiscale method presented here. Two numerical examples are examined and compared to the results of discrete and previously obtained composite analysis to verify the theory.

### 요 지

본 연구는 축대칭 층구조체의 복합이론 및 유한요소해석 프로그램의 개발에 목적이있다. 연구대상인 축대칭 층구조체는 회전축에 수직으로 층을 이루고 있으며 선형, 탄성, 작은변형 및 축대칭 하중조건의 제한을 두었다. 개발된 복합이론은 multiscale의 방식을 사용하여 비균등질 층구조체를 등가 균등질로 취급할 수 있도록 하였으며 이 과정에서 주 변수들의 연속성만을 필요로 하였다. 그결과 종전에 사용되어온 비교적 복잡한 이론들과는 달리  $C_0$  연속의 유한요소 프로그램의 개발이 가능하였으며 4 node isoparametric 요소를 사용하였다. 본 연구의 복합이론은 선형조건에 제한하였으나, 본 연구에서 제안한 multiscale 해석법을 이용하면 교량용 받침에 대한 연성재료의 비선형거동의 해석도 가능하게된다. 본 연구에서의 복합이론 및 유한요소해석의 타당함을 보이기위하여 두가지 하중조건 하에서 축대칭 층구조체를 해석하여 기존의 복합이론 및 이산화해석의 결과치와 비교하였다.

\* 정회원 · 경북대학교 토목공학과 교수

\*\* 정회원 · 경북대학교 토목공학과 교수

\*\*\* 정회원 · 경북대학교 토목공학과 박사과정 수료

# 1. 서론

강성과 연성의 재료가 서로 층층이 교차하며 이루어진 층구조체는 매우 높은 압축강도와 매우 약한 전단강도를 가지므로 여러 분야에서 많이 사용되고 있다. 특히 본 연구의 축대칭 층구조체는 로켓트 노즐의 flexseal,<sup>(1)</sup> 헬리콥터의 rotor bearing,<sup>(2)</sup> 건물의 isolation pad<sup>(3)</sup> 등으로 널리 사용되고 있으며 이러한 층구조체를 해석하는 방법은 크게 이산화해석과 복합해석으로 분류된다. 이산화해석은 지금까지 주로 사용되어온 해석방법으로 층구조체를 이루고 있는 두 재료의 서로 다른 성질을 감안, 비균등질 구조체로 취급하는 방법으로 요소분할시 한 요소에 하나의 재료만을 포함하도록 하며 큰 강도의 차이로 인한 두 재료 사이의 복잡한 상호작용을 해석하기 위해서는 많은 수의 요소가 필요하며 3차원 해석에서는 불가능한 경우도 생기게 된다. 이에 반해 복합해석은 층구조체를 등가 이방성 균질 물체로 취급하므로 한 요소가 하나의 재료만을 포함할 필요가 없으며 훨씬 적은 수의 요소로 층구조체를 해석할 수가 있다. 이와같이 이산화해석의 정확도를 유지하면서도 간편하고 경제적인 복합해석<sup>(4,5)</sup>이 개발되어 왔으나 기본 변형상태와 단부영향에 의한 변형상태의 중첩을 이용함으로써 비선형 해석에는 사용되지 못하였다. 따라서 본 연구에서는 기본 변형상태와 단부영향에 의한 변형상태를 포함하여 정확도를 높이는 동시에 multiscale의 방법을 사용함으로써 비선형 해석에도 이용될 수 있는 복합이론의 개발에 목적이있다.

## 2. 복합이론

### 2.1 기본변형 및 단부영향에 의한 변형상태

중첩의 원리를 이용한 문헌<sup>(4,5)</sup>의 복합이론에서 밝혀진 단부영향에 의한 변형상태와 그림 1에 표시된 균질성 재료의 기본 변형상태에 해당되는 축대칭 층구조체의 4가지 기본 변형상태를 중첩함으로써 평면 변형률 상태 하의 복합체에 대한 모든 변형조건을 나타낼 수가 있다.

그림 1의 (a), (b), (c)와 중첩되어 radial 방향으로 변위가 고정된 면에서 등분포응력을 나타낼 수 있는 단부영향이 그림 2에 나타나 있으며 층구조체의

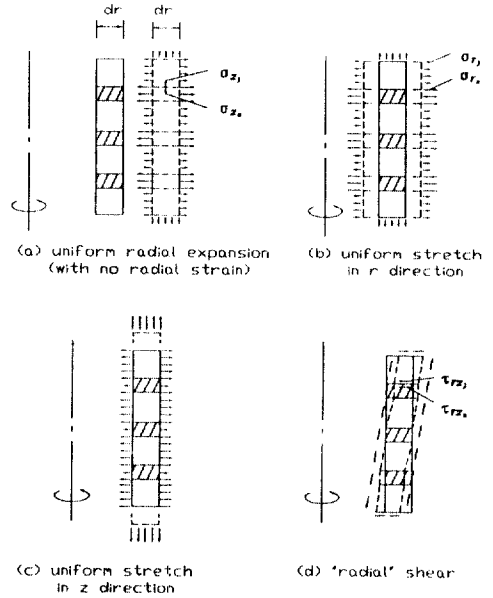


그림 1. 축대칭 층구조체의 기본변형상태.

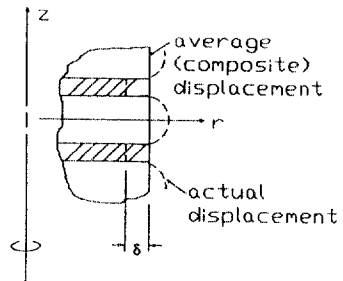


그림 2. Shear lag edge effect.

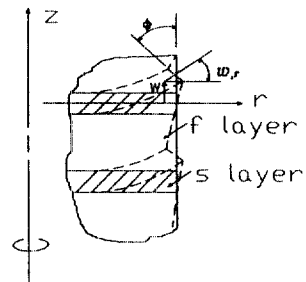


그림 3. Bending edge effect.

평균 변위에 대한 강성 재료의 상대적 변위  $\delta$ 가 변수로 정의된다.

그림 3의 단부영향은 그림 1의 (d)와 함께 경계

면에서 등분포 변위를 나타내며 강성 재료의 회전을 나타내는 변수  $\phi$ 가 규정되어진다. 따라서 층구조체의 변형상태를 표현하기 위해서는 radial 방향의 변위, 연직변위, 그림 2와 3에서 나타난 변위의 4가지 즉,  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ 가 필요하다.

## 2.2 Multiscale 방식에 의한 변위의 근사표현

축대칭 층구조체의 변위를 나타내기 위해 global과 local 좌표축을 가지는 multiscale의 방식을 사용하며 강성과 연성의 재료에 대한 응력 또는 변형률을 표시할 때는 각각 "s"와 "f"의 첨자를 사용하며 각각의 재료층 또한 위의 규약을 사용한다. 한개의 "f" 층과 2개의 절반높이의 "s"층으로 구성되어 해석에 사용된 단위세포(unit cell)를 그림 4에 나타내었다.

층구조체의 평균적 거동을 나타내는 global 좌표축의 변수는  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ 의 4개로서  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ 는 단위세포의 r, z방향의 평균변위를 나타낸다. 국부적인 거동을 나타내기 위한 local 좌표축은 어느 특정 재료의 중심에 원점을 두며 상 하 경계면에서  $\pm 1$ 의 값을 갖도록 한다. 즉,

$$z_i = \frac{2}{h_i}(z - \bar{z}_i) \quad (i = s, f) \quad (1)$$

또한 global 변수들은 단위세포 내에서 서서히 변화하므로 이들을 r, z 좌표축에 대한 Taylor series의 처음 3항만으로 근사적 표현을 한다. 즉, g를 4개의 global 변수중 하나로 보면 식 (2)와 같이 되며 아래첨자 "i"는 미분함을 의미한다.

$$g(r, z) \cong g^i + g^i_r r + g^i_z(z - \bar{z}_i) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } g^i &= g^i(0, \bar{z}_i) \\ -\Delta r/2 \leq r^* \leq \Delta r/2, \quad -h/2 \leq z - \bar{z}_i \leq h/2 \end{aligned}$$

"+s"와 "-s"층(그림 4) 중앙에서의 global 변수값은 다음과 같다.

$$g^{\pm s} \cong g^i \pm \frac{h}{2} g^i_z \quad (3)$$

$$g^i_z = g^i_z \quad (4)$$

Local 변수는  $u_i$ ,  $v_i$ 로 나타내며 각 층 내에서 일어나는 변위를 말한다. 이들은  $z_i$ 의 다항식에 의해 근사적으로 나타내며 다항식의 계수는 그 층의 중

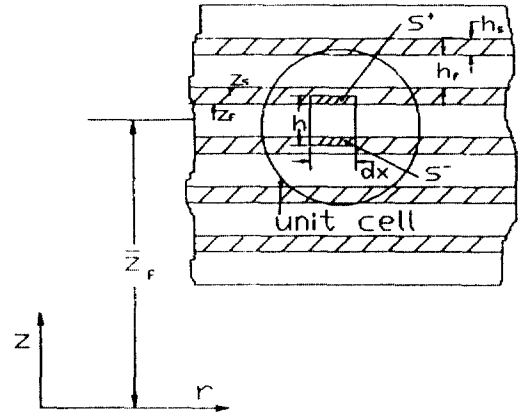


그림 4. Multiscale 방식에 사용되는 좌표축 및 단위세포

앙에서의 global 변수와 그들의 미분치로서 나타낸다.

"s"층의 근사변위  $u_s$ ,  $v_s$ 는 평판이론에 근거하여 식 (5)와 (6)으로 나타낸다.

$$u_s = \bar{u}^s - \delta^s - \frac{h_s}{2} \phi^s z_s \quad (5)$$

$$v_s = \bar{v}^s + B_0^s + B_1^s z_s + \alpha_s \frac{h_s^2}{8} \left( \frac{\partial \phi^s}{\partial r} + \frac{\phi^s}{r} \right) z_s^2 \quad (6)$$

여기서  $\alpha_s = \frac{3K_s - 2G_s}{3K_s + 4G_s}$  이며 K, G는 체적 및 전단 탄성계수이다.

식 (5)의  $\bar{u}^s - \delta^s$ 는 in-plane 변위이며,  $\phi^s z_s$ 는 휨에 의한 항이다.  $B_0$ 는  $\bar{v}$ 가 단위세포의 평균변위가 될 수 있도록 하기 위해 포함하였으며,  $B_1$ 항은  $\sigma_z$ 에 의한 두께의 변형률과 in-plane 변위에 대한 포아손의 영향을 그리고 식 (6)의 마지막 항은 휨 변형에 의한 포아손의 영향을 고려한 것이다.

식 (3)을 이용하여 "+s"층과 "-s"층의 근사변위  $u_s^{\pm}$ ,  $v_s^{\pm}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$u_s^{\pm} = \bar{u}^i \pm \frac{h}{2} \bar{u}^i_z - \delta^i \mp \frac{h}{2} \delta^i_z - \frac{h_s}{2} \left( \phi^i \pm \frac{h}{2} \phi^i_z \right) z_s \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v_s^{\pm} &= \bar{v}^i \pm \frac{h}{2} \bar{v}^i_z - B_0^i \mp \frac{h}{2} B_{0z}^i - \left( B_1^i \pm \frac{h}{2} B_{1z}^i \right) z_s \\ &+ \alpha_s \frac{h_s^2}{8} \left( \phi^i + \frac{\phi^i}{r} \right) z_i^2 \end{aligned} \quad (8)$$

“f”층의 근사변위  $u_f, v_f$ 는 식 (9)와 (10)으로 나타낸다.

$$u_f = \bar{u}^f + C_0^f + C_1^f z_f + C_2^f z_f^2 \quad (9)$$

$$v_f = \bar{v}^f + D_0^f + D_1^f z_f - \frac{h_f}{4} \left( C_{1,r}^f + \frac{C_1^f}{r} \right) z_f^2 - \frac{h_f}{r} \left( C_{2,r}^f + \frac{C_2^f}{r} \right) z_f^3 \quad (10)$$

여기서  $C_0^f$ 와  $D_0^f$ 는  $\bar{u}, \bar{v}$ 가 평균변위를 나타내도록 조절하기 위한 항이며,  $C_1$ 항은 그림 1의 기본 변형 상태 (d)에서 생기는 평균변위와 “s”층의 차이를 나타내기 위한 것이다.  $C_2$ 항은 그림 2의 단부영향 상태에서 일어나는 “f”층의 팽창을 나타내며  $D_1$ 항은  $\sigma_z$ 로 인한 두께의 변형률을 그리고 나머지 두 항은  $C_1$ 과  $C_2$ 로부터 생기는 포아손의 영향과 “f” 재료의 높은 체적계수로 인하여 나타난 것이다.

위와 같은 변위의 다항식에서 계수들을 결정하기 위하여 다음과 같은 세 조건들을 적용하여야 한다.

①  $\bar{u}, \bar{v}$ 는 단위세포의 평균변위이므로 다음의 식 (11)을 만족시켜야 한다.

$$\frac{h_s}{2} \int_0^1 (u_s^- - \bar{u}) dz_s + \frac{h_f}{2} \int_{-1}^1 (u_f - \bar{u}) dz_f + \frac{h_s}{2} \int_{-1}^0 (u_s^+ - \bar{u}) dz_s = 0 \quad (11)$$

식 (7), (9)를 식 (11)에 대입하면 식 (12)의 결과를 얻을 수 있다.

$$-\rho \delta^f + C_0^f + \frac{1}{3} C_2^f + \frac{\rho h_s h}{\delta} \phi_{z,x}^f = 0 \quad (12)$$

여기서  $\rho = h_s/h_f$ 이며 식 (11)에서  $u$ 를  $v$ 로 바꾸면  $\bar{v}$ 에 대한 평균변위의 조건이 되며 식 (8), (10)을 이용하여 다음의 식 (13)을 얻을 수 있다.

$$\rho B_0^f + \frac{\alpha_s \rho h_s^2}{24} \left( \phi_{r,x}^f + \frac{\phi^f}{r} \right) + D_0^f - \frac{h_f}{12} \left( C_{1,r}^f + \frac{C_1^f}{r} \right) - \frac{h \rho}{4} B_{1,z}^f = 0 \quad (13)$$

② 각층의 경계면에서 다음과 같은 변위의 연속 조건을 적용한다.

$$u_f \left( \pm \frac{h_f}{2} \right) = u_s^{\pm} \left( \mp \frac{h_s}{2} \right) \quad (14)$$

식 (7), (9)를 식 (14)에 대입한후 식 (13)을 이용하여  $C_1^f, C_0^f$  및  $C_2^f$ 를 얻을 수 있다.

$$C_1^f = \frac{h}{2} \bar{u}_{f,z}^f - \frac{h}{2} \delta_{f,z}^f + \frac{h_s}{2} \phi^f \quad (15)$$

$$C_0^f = \frac{1+3\rho}{2} \delta^f - \frac{h_s h (2+3\rho)}{16} \phi_{f,z}^f \quad (16)$$

$$C_2^f = -\frac{3}{2} (1+\rho) \delta^f + \frac{3h_s h (2+\rho)}{16} \phi_{f,z}^f \quad (17)$$

위의 과정을  $v$ 의 연속조건에 대해 반복하면 식 (18), (19)와 같다.

$$B_0^f - \frac{h}{2} B_{1,z}^f + \alpha_s \frac{h_s^2}{8} \left( \phi_{f,z}^f + \frac{\phi^f}{r} \right) = D_0^f - \frac{h_f}{4} \left( C_{1,r}^f + \frac{C_1^f}{r} \right) \quad (18)$$

$$\frac{h}{2} v_{f,z}^f + \frac{h}{2} B_{\alpha z}^f - B_1^f + \frac{\alpha_s h_s^2 h}{16} \left( \frac{\phi_{f,z}^f}{r} \right) = D_1^f - \frac{h_f}{6} \left( C_{2,r}^f + \frac{C_2^f}{r} \right) \quad (19)$$

식 (15)와 식 (19)를 미분하면 식 (20)과 (21)을 얻을 수 있다.

$$C_{1,r}^f = \frac{h_s}{2} \phi_{f,r}^f \quad (20)$$

$$B_{1,z}^f = -D_{1,z}^f - \frac{h}{4} \frac{\delta_{f,z}^f}{r} \quad (21)$$

식 (20), (21)을 이용하여 식 (13)과 식 (18)로부터  $B_0^f$ 와  $D_0^f$ 를 구하면 식 (22), (23)과 같다.

$$B_0^f = -\frac{h_s h_f}{24(1+\rho)} [(3+\rho)\rho\alpha_s + 2] \left( \phi_{f,r}^f + \frac{\phi^f}{r} \right) - \frac{h_f}{4(2+\rho)} D_{1,z}^f \quad (22)$$

$$D_0^f = \frac{h_s h_f}{24(1+\rho)} [(3+2\alpha_s \rho)\rho + 1]$$

$$\left(\phi_r^f + \frac{\phi^f}{r}\right) - \frac{\rho h_f}{4} D_1^f \quad (23)$$

식 (17), (22)를 식 (19)에 대입하면 식 (24)가 된다.

$$B_1^f = \frac{h}{2} \bar{v}_z^f - D_1^f - \frac{h}{4} \left(\delta_r^f + \frac{\delta^f}{r}\right) \quad (24)$$

③ 각층의 경계면에서 다음과 같은 응력의 평형 조건을 적용한다.

$$\sigma_{zs} - \left(\frac{h_s}{2}\right) + \sigma_{zs} + \left(-\frac{h_s}{2}\right) = \sigma_{zf} \left(-\frac{h_f}{2}\right) + \sigma_{zf} \left(\frac{h_f}{2}\right) \quad (25)$$

식 (7)~(10)에서 변형률을 계산하여 응력과 변형률의 관계에서 각층의 응력을 구한후 식 (25)에 대입하여 정리하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{2}{h_s} B_1^f + \alpha_s \left[ \left(\bar{u}_r^f + \frac{\bar{u}^f}{r}\right) - \left(\delta_r^f + \frac{\delta^f}{r}\right) \right] = \\ R \left[ \frac{2}{h_f} D_1^f + \alpha_f \left(\bar{u}_r^f + \frac{\bar{u}^f}{r} + C_{\alpha f}^f + \frac{C_o^f}{r}\right) \right. \\ \left. + (\alpha_s - 1) \left(C_{2r}^f + \frac{C_2^f}{r}\right) \right] \quad (26) \end{aligned}$$

여기서  $R = \frac{3K_s - 2G_s}{3K_s + 4G_s}$  이다.

식 (16), (17)과 (24)를 식 (26)에 대입하여  $D_1^f$ 에 대해서 정식화하면 식 (27)과 같다.

$$\begin{aligned} D_1^f = \frac{1}{(1+\rho R)} \frac{h}{4} \bar{v}_z^f - \left[ \frac{h}{4} + \frac{h_s}{2} (\alpha_s - R\alpha_f) \right. \\ \left. + \frac{3(1+\rho)}{2} R \right] \times \left(\delta_r^f + \frac{\delta^f}{r}\right) \\ + \frac{h_s}{2} (\alpha_s - R\alpha_f) \left(\bar{u}_r^f + \frac{\bar{u}^f}{r}\right) \quad (27) \end{aligned}$$

식 (22), (23), (24) 및 식 (27)로부터  $B_o^f$ ,  $D_o^f$ ,  $B_1^f$ 는 각각 식 (28), (29), (30)으로 정식화된다.

$$B_o^f = \frac{1}{1+\rho} \left[ -\frac{\alpha_s h_s^2}{24} (\rho+3) - \frac{h_f h_s}{12} \right] \left(\phi_r^f + \frac{\phi^f}{r}\right) \quad (28)$$

$$D_o^f = \frac{1}{1+\rho} \left[ \frac{\alpha_s \rho h_s^2}{12} + \frac{h_s h_f}{24} (1+3\rho) \right] \left(\phi_r^f + \frac{\phi^f}{r}\right) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} B_1^f = \frac{h}{2} \frac{\rho R}{1+\rho R} \bar{v}_z^f - \frac{h_s}{2} \left(\frac{\alpha_s - R\alpha_f}{1+\rho R}\right) \left(\bar{u}_r^f + \frac{\bar{u}^f}{r}\right) \\ + \frac{h_s}{2(1+\rho R)} [(\alpha_s - R\alpha_f)R + (1+\rho)] \left(\delta_r^f + \frac{\delta^f}{r}\right) \quad (30) \end{aligned}$$

식 (15)~(17)과 (27)~(30)을 식 (4), (6), (9), (10)에 대입하여 local 변위  $u_s$ ,  $v_s$ ,  $u_r$ ,  $v_r$ 에 대하여 일산화하면 다음과 같다.

$$u_s = \bar{u} - \delta - \rho z \quad (31)$$

$$\begin{aligned} v_s = \bar{v} + \frac{1}{1+\rho} \left[ -\frac{\alpha_s h_s^2}{24} (\rho+3) - \frac{h_s h_f}{12} \right] \left(\phi_r + \frac{\phi}{r}\right) \\ + \frac{1}{1+\rho} \left\{ (1+\rho)R\bar{v}_z - (\alpha_s - R\alpha_f) \left(\bar{u}_r + \frac{\bar{u}}{r}\right) \right. \\ \left. + [\alpha_s - R\alpha_f + (1+\rho)R] \left(\delta_r + \frac{\delta}{r}\right) \right\} z \\ + \frac{\alpha_s}{2} \left(\phi_r + \frac{\phi}{r}\right) z^2 \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_r = \bar{u} + \frac{1+3\rho}{2} \delta - \frac{h_s h (2+3\rho)}{16} \phi_z \\ + [(1+\rho)(\bar{u}_z - \delta_z) + \rho\phi] z \\ + \left[ -\frac{6(1+\rho)}{h_f^2} \delta + \frac{3h_s h}{4h_f^2} (2+\rho)\phi_z \right] z^2 \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_r = \bar{v} + \frac{1}{1+\rho} \left[ \frac{\alpha_s \rho h_s^2}{12} + \frac{h_f h_s}{24} (1+3\rho) \right] \left(\phi_r + \frac{\phi}{r}\right) \\ + \frac{1}{1+\rho R} \left\{ (1+\rho)\bar{v}_z - \left[ \frac{1+\rho}{2} + \rho(\alpha_s - R\alpha_f) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3(1+\rho)}{2} R \right] \left(\delta_r + \frac{\delta}{r}\right) + \rho(\alpha_s - R\alpha_f) \left(\bar{u}_r + \frac{\bar{u}}{r}\right) \right\} z \\ - \frac{\rho}{2} \left(\phi_r + \frac{\phi}{r}\right) z^2 + \frac{2(1+\rho)}{h_f^2} \left(\delta_r + \frac{\delta}{r}\right) z^3 \quad (34) \end{aligned}$$

### 3. 복합해석

그림 5와 같이 N개의 연성층과 M개의 강성층을 가지는 층구조체의 총 변형에너지는 "s"층과 "f"층 재료에 대한 변형에너지의 적분의 합으로 나타낼 수 있다.

"f" 재료층들에 대한 총 변형에너지  $U_f$ 는 식 (35)

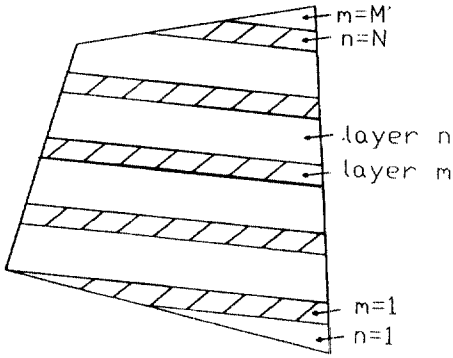


그림 5. 층구조체의 요소.

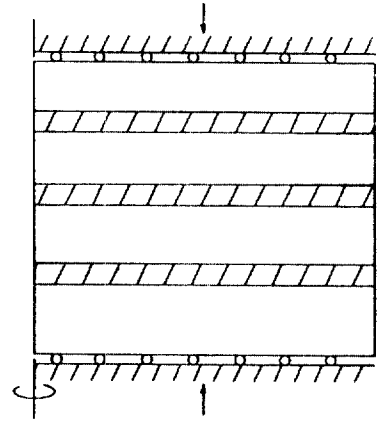


그림 6. 압축을 받는 circular bearing.

와 같이 표현된다.

$$U_f = \sum_{n=1}^N \iint_{A_n} \frac{1}{2} \{ \beta R [\epsilon_{z1}^2 + \epsilon_r^2 + \epsilon_{\theta}^2 + 2\alpha(\epsilon_r \epsilon_{z1} + \epsilon_{\theta} \epsilon_{z1} + \epsilon_r \epsilon_{\theta})] + G_f \gamma_{rz}^2 \} r dr dz \quad (35)$$

여기서  $\beta = \frac{3K_s + 4G_s}{3}$  이다.

$A_n$ 은 n번째 “f” 층의 면적으로  $r dr dz$ 이며,  $U_s$  역시 같은 방법으로 표현할 수 있다. 이때 총 변형에너지의 식에 포함된  $\iint \bar{u}_r \delta_r z^2 dA$  항은 총 두께가 전체 구조체의 두께에 비해 매우 작으므로 식 (36)과 같이 근사화된다.

$$\int_{l_n} \bar{u}_r \delta_r \int_{-h_f/2}^{h_f/2} z^2 dz r dr = h_f \int_{l_n} \frac{h_f^2}{2} \bar{u}_r \delta_r r dr \cong \frac{h_f}{h_f + h_s} \frac{h_f^2}{2} \iint_{A'_n} \bar{u}_r \delta_r dA \quad (36)$$

여기서  $l_n$ 은 n번째 “f” 층의 길이를 나타내며  $A'_n$ 은 n번째 “f” 재료와 위, 아래 각각 절반두께의 “s” 재료를 합한 단면적을 말한다. 따라서  $A'_n$ 의 합은 전체 층구조체의 단면적  $A$ 를 나타내게 된다. “s” 재료의 적분도 “f” 재료와 같은 형식이며 층구조체의 총 변형에너지는 두 적분의 합으로 이루어진다.

$$U = U_f + U_s = \frac{1}{1+\rho} \iint \frac{1}{2} \langle d \rangle [D] \{ d \} dA \quad (37)$$

여기서  $\langle d \rangle = \langle u_r \frac{u}{r} \delta_r \frac{\delta}{r} \delta_r \frac{\phi}{r} v_z u_z v_r \delta \phi \delta_z \phi_z \rangle$

[D]의 요소는 부록 I에 나타내었다.

본 연구에서는 최소 변형에너지의 원리를 식 (37)에 직접 적용시켜 축대칭 층구조체에 대한 유한요소해석 프로그램을 개발하였다. 일차변수인  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ 는 C<sub>0</sub> 연속만이 요구되었으며 4 node isoparametric 요소를 사용하였다.  $\gamma_{rz}$  항을 제외하고는 모두 4점 적분을 사용하였으며  $\gamma_{rz}$  항은 과도한 허구의 전단 변형을 피하기 위해 1점 적분을 사용하였다. 이것은 참고문헌 [4]의 9점 적분에 비해 계산 시간이 단축되며  $\delta_z$ ,  $\phi_z$  항의 추가로 인하여 가능하게 된 것이다.

#### 4. 축대칭 층구조체의 해석에 및 고찰

본 연구에서 개발된 축대칭 층구조체 해석 및 이에 의한 유한요소해석 프로그램의 타당성을 증명하기 위해서 압축 및 전단의 축대칭 하중을 받는 두가지 경우의 예제를 해석하여 이산화 해석의 결과치와 비교하였다.

##### 4.1 압축을 받는 경우

그림 6의 형상을 가진 circular bearing이 압축을 받는 경우를 본 연구에서 개발된 복합이론, 문헌[4]의 복합이론 및 이산화해석의 결과치들을 비교 검토하였다. 본 연구의 복합해석은 한 node에 4개의 일차변수를 가지는 4 node 요소를 사용하였고 문헌 [4]에서는 한 node에 4개의 일차변수를 가지는 8 node 요소를 사용하였다. 이산화해석의 결과치는

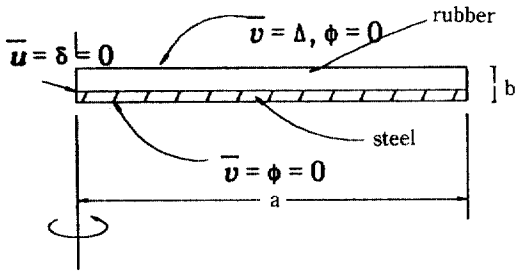


그림 7. 압축을 받는 경우의 경계조건.

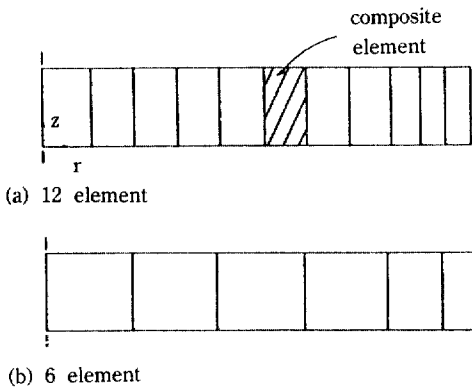


그림 8. 복합해석에 사용된 요소(압축).

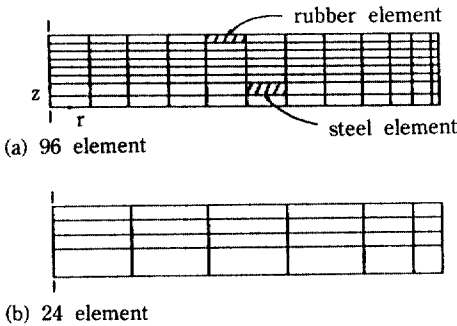


그림 9. 이산화해석에 사용된 요소(압축).

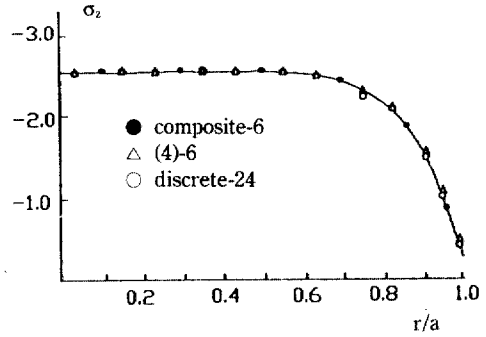


그림 10. 압축의 경우 축응력.

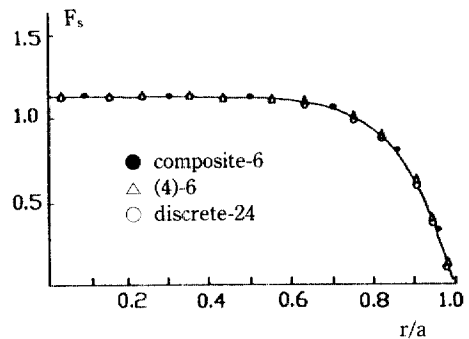


그림 11. 금속재료의 radial force(압축).

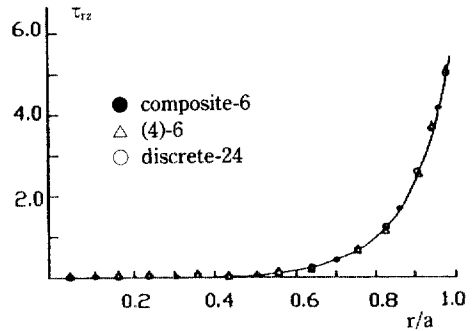


그림 12. 층 경계면의 전단응력(압축).

문헌[4]를 이용하였으며 대칭인 층구조체로부터 반층의 고무와 반층의 금속재료만을 모델로 해석하였다. 사용된 모델의 치수는 반지름 20 inch, 두께 0.75 inch이며 재료의 성질은  $E_s = 3 \times 10^7$  psi,  $\nu_s = 0.3$ ,  $E_r = 300$  psi,  $\nu_r = 0.49$ 가 사용되었다. 그림 7과 같이 모델의 윗면을 따라  $\Delta = -0.01$  inch의 압축 변위를 주었으며 밑면은 고정, 옆면은 자유의 경계조건으로 하였다. 본 연구의 복합해석과 문헌[4]에서는 그림

8과 같이 6개와 12개의 요소를 이용하여 해석하였으나 두 연구 모두 6개의 요소만으로도 결과치에 수렴하였다. 이산화해석에서는 그림 9와 같이 24개와 96개의 요소가 사용되었으며 역시 결과치는 거의 동일하였다. 축응력, 금속재료의 단위길이당 radial force, 층 경계면에서의 전단응력들의 결과치들이 그림 10~12에 비교되었으며 전술한 바와 같은 이

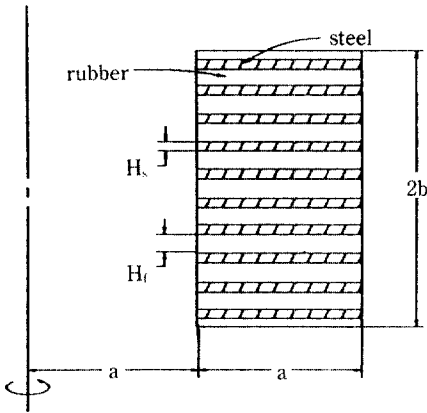


그림 13. 전단을 받는 층구조체 형상.

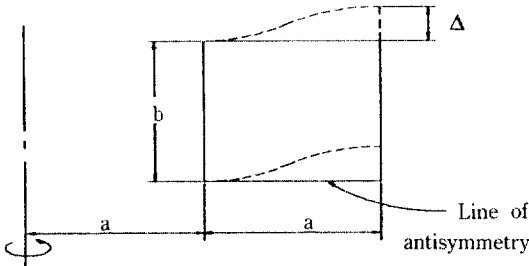
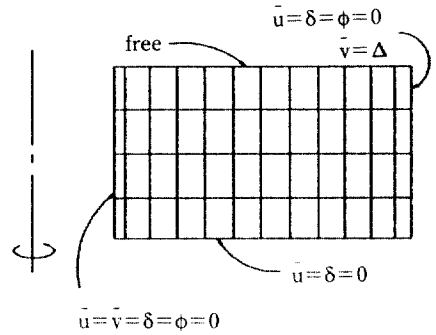


그림 14. 전단을 받는 경우의 경계조건.

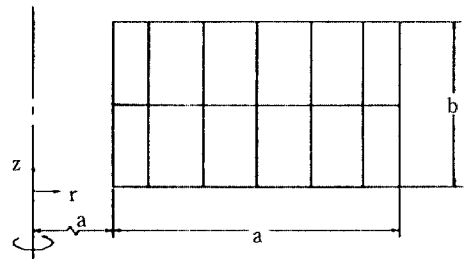
유에서 단지 6개와 24개 요소만의 결과치를 포함시켰다. 그림 10~12에서 알 수 있듯이 세가지 해석 방법이 거의 동일한 곡선을 나타내며 이것은 본 연구의 복합해석이 적은 컴퓨터 시간을 이용하고도 정확도를 유지하고 있음을 말하는 것이다.

#### 4.2 전단을 받는 경우

중앙에 구멍이 있는 그림 13의 형상을 가진 circular bearing이 전단을 받는 경우를 해석하였다. 이 층구조체는 고무재료를 10개의 금속재료로 보강한 것으로서 사용된 재료의 성질은 압축을 받는 경우와 동일하며 중앙 구멍의 반지름은 20 inch이고 전체 반지름은 40 inch이다. 층 두께의 비는 2가 사용되었고 전체높이 2b는 15 inch이며 반 대칭성을 이용하여 구조체의 상부 반만을 해석하였다. 사용된 경계조건은 바깥면의 회전이나 r방향으로의 변위를 방지한채  $\Delta=0.5$  inch를 주었고 안쪽면은 고정시켰



(a) 48 elements



(b) 12 elements

그림 15. 복합해석에 사용된 요소(전단).

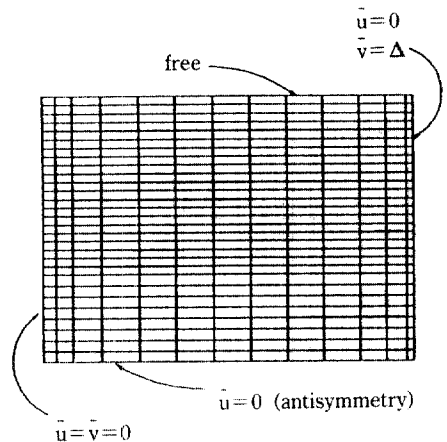


그림 16. 이산화해석에 사용된 요소(전단).

다(그림 14). 본 연구의 복합해석 및 문헌[4]에서는 12개와 48개의 요소를 사용하였으며(그림 15) 이산화해석은 390개의 요소를 사용하였다(그림 16). 자유면의 축방향변위, 고무층의 전단응력 및 금속층의



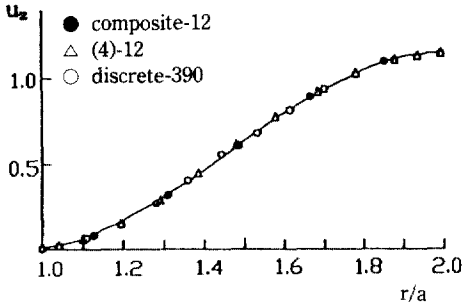


그림 17. 자유면의 축방향 변위(전단).

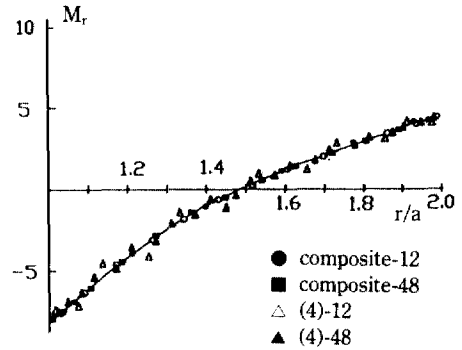


그림 19. "s"층의 radial 휨 모멘트(전단).

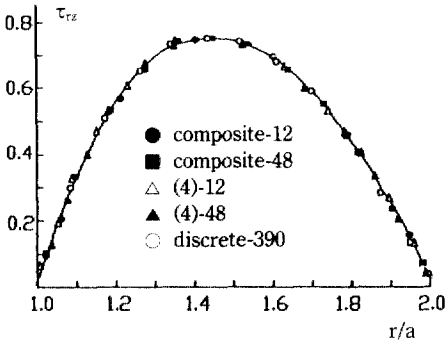


그림 18. "f"층의 전단응력(전단).

radial 휨모멘트를 각각 그림 17~19에 비교하였다. 자유면의 축방향 변위는 12개와 48개요소의 결과치가 거의 동일하여 12개의 결과치만을 표시하였다. 고무층의 전단응력은 가장 위쪽의 고무층 중앙면의 ( $z=6.0''$ ) 응력을 나타냈으며 금속층의 radial 휨모멘트 역시 가장 위쪽의 금속층을 사용하여 계산하였다.

## 5. 결 론

축대칭 하중을 받는 축대칭 층구조체에 대한 2차원, 선형, 등가균질성 복합해석 및 유한요소해석 프로그램을 개발하였다. 본 이론을 이용한 유한요소해석의 결과치는 다른 방법의 근사이론과 이산화해석의 결과치와 비교되어 경제성 및 정확도에서 우수함이 입증되었다. 선형 2차원해석의 경우 연립방정식을 풀이하는 횟수를 기준으로 컴퓨터 시간을 계산한다면 본 이론은 이산화해석의 정확도를 유지하면서도 1/5 내지 1/10 정도의 경제성을 나타낸다.

이와같은 방법으로 비선형 3차원의 해석을 적용해 보면 그 차이는 더욱 커져 1/100~1/1000의 차이를 보이게된다.

본 연구의 복합이론을 문헌[4]의 근사 복합이론과 비교하면 문헌[4]의 근사 복합이론도 이산화해석보다는 훨씬 해석이 빠르고 간단하지만 중첩의 원리를 사용함으로써 비선형해석에 사용될 수 없으며 8 node 요소와 9점 적분을 사용함으로써 4 node 요소와 4점 적분을 사용한 본 복합이론보다 결과적으로 많은 계산을 요구하게된다. 본 연구의 이러한 장점은 중첩의 원리를 사용하지 않고 multiscale 접근 방식으로 이론을 개발하는 과정에서 발견된 총 변형에너지속의  $\delta$ 와  $\phi$ 의 z방향으로의 변형률인  $\delta_z$ ,  $\phi_z$ 항에 기인한 것이다. 이들 항이 해석 결과의 정확도에 미치는 영향은 본 연구인 축대칭 층구조체에서는 그다지 두드러지지 않았으나 직사각형 층구조체의 해석에서는 큰 기여를 하였다. 본 연구에서 개발된 이론 및 프로그램의 간편, 신속, 정확성을 이용하여 여러가지 형태의 축대칭 층구조체를 해석함으로써 형상에 따른 그들의 거동에 대한 연구에 많은 도움이 되리라 생각한다.

비선형 3차원의 축대칭 층구조체에 대한 해석은 본 연구를 기초로 가능할 것이며 이는 장래의 연구과제이다.

## 참고문헌

1. "Development of an Elastic Seal for Omniaxial Movable Nozzles(lockseal)." Technical Report No.

- AFRPL-TR-66-112, Lockheed Propulsion Co., 1966.
2. Kulkarni, S.B., "Design Criteria for Elastomeric Bearings, Volume II-design Manual", Thiokol/Watsatch Division, AD/A-024767, March 1976.
  3. Derham, C.J. and Thomos, A.G., "The Design and Use of Rubber Bearings for Vibration Isolation and Seismic Protection of Structures", *Engineering Structures*, Vol. 2, No. 3, July 1980.
  4. Herrmann, L.R., "Finite Element Modeling of Composite Edge Effects", ASCE, *7th Conf. on Electronic Computations*, St. Louis, August 1979.
  5. Welch, K., "Analysis of Axisymmetric Layered Systems Including Edge Effects", M.S. Thesis, Dept. of Civil Engr., Univ of Calif., Davis, 1981.
  6. Herrmann, L.R., Welch, K.R. and Lim, C.K., "Composite FEM Analysis for Layered Systems", ASCE *J. of Engin. Mechanics*, Vol. 110, No. 9, September, 1984.
  7. 임종균, 박문호, "복합체에 대한 연속체 방정식 및 유한요소 프로그램의 개발," *대한토목학회 논문집*, 제 8권 제 2호, p. 155-166, 1988. 6.

(接受 : 1993. 7. 22)

### 부록 1.

식 (40)의 [D] matrix의 영이 아닌 lower triangular 부분의 계수

$$D_{1,1} = D_{2,2} = \beta[R + \rho(1 - a_1 a_2^2)]$$

$$D_{1,2} = \beta(\rho \alpha_s + R a_t - \rho a_1 a_2^2)$$

$$D_{1,3} = D_{2,4} = \rho \beta [a_1 a_2 a_3 + R - 1]$$

$$D_{1,4} = D_{2,3} = \rho \beta a_2 (a_1 a_3 - 1)$$

$$D_{1,7} = D_{2,7} = R \beta a_1 (1 + \rho)(\alpha_t + \rho \alpha_s)$$

$$D_{3,3} = D_{4,4} = \beta [-\rho a_1 a_3^2 + R(1 + \rho)^2(1 - \alpha_t^2)/5 + \rho/a_1]$$

$$D_{3,4} = D_{3,3} + \beta [R a_4 (\alpha_t - 1) + \rho(\alpha_s - 1)]$$

$$D_{3,7} = D_{4,7} = \rho \beta a_1 R (1 + \rho)(\alpha_t - \alpha_s)$$

$$D_{5,5} = D_{6,6} = \beta h_s^2 [\rho(1 + \alpha_s)^2 + 2R(1 - \alpha_s)]/12$$

$$D_{5,6} = \alpha_s D_{5,5}/(1 + \alpha_s)$$

$$D_{7,7} = R \beta (1 + \rho)^2 a_1$$

$$D_{8,8} = D_{12,12} = G_t (1 + \rho)^2$$

$$D_{8,9} = G_t (1 + \rho)$$

$$D_{8,11} = G_t \rho (1 + \rho)$$

$$D_{8,12} = -G_t (1 + \rho)^2$$

$$D_{9,9} = \rho G_s + G_t$$

$$D_{9,11} = \rho(G_t - G_s)$$

$$D_{10,10} = 12G_t (1 + \rho)^2/h_t^2$$

$$D_{10,13} = -3\rho(2 + \rho)(1 + \rho)G_t/2$$

$$D_{11,11} = \rho(G_s + \rho G_t)$$

$$D_{11,12} = -G_t \rho (1 + \rho)$$

$$D_{13,13} = 3G_t [h_s(1 + \rho)(2 + \rho)]^2/16$$

여기서  $a_1 = 1/(1 + \rho R)$

$$a_2 = \alpha_s - \alpha_t R$$

$$a_3 = \alpha_s + \rho \alpha_t R$$

$$a_4 = (1 + 2\rho + 6\rho^2)/5$$