

2-차원 IIR 디지털 필터의 설계

이 민 호* · 박 종 연**

Design of Two - Dimensional IIR Digital Filters

Min - Ho Lee * · Chong - Yeon Park **

ABSTRACT

This paper develops a design technique for approximating nonseparable frequency characteristics by sums and products of separable transfer functions. Therefore nonseparable frequency characteristics includes the four-quadrant symmetry filters. The desired filter with half plan symmetry is obtained by shifting a low pass characteristic in the frequency domain, and by combining these shifted characteristics.

Also the paper develops the technique for designing recursive and nonrecursive two dimensional digital filters by the application of a complex transformation to one dimensional low pass filter.

I. 서 론

최근의 신호처리는 2차원 또는 다차원적일 때가 많으며, 영상처리(image processing) 등은 그의 대표적인 한 예이다. 이러한 2차원 IIR 필터를 설계하는 것은 안정도가 대단히 중요하며 안정한 상태의 계수를 결정하는 것은 대단히 어렵다. 간단한 경우를 제외하고는 2차원 IIR 필터의 안정도를 판단하는 문제와 안정한 2차원 IIR 필터를 설

계하여 하드웨어로 실현하는 것도 복잡한 문제이다.⁽²⁾ 또한 감도등의 관점에서 볼 때 고차의 IIR 필터는 낮은 차수의 IIR 필터로 구분하여 실현하는 것이 바람직하다. 1차원 IIR 필터에서는 고차의 IIR 필터를 낮은 차수의 IIR 필터로 구분하여 실현하는 것이 가능하지만 2차원 IIR 필터에서는 거의 불가능하다.

2차원 IIR 필터의 설계 문제는 낮은 차수 다항식에도 둘 또는 그이상의 변수가 작용하며, 2차원 IIR 필터를 나타내는 전달함수는 대부분의 경우 비분리함수로 전달함수

* 강원대학교 전기공학과 박사과정

** 강원대학교 전기공학과 교수

의 실현에 어려움이 많으므로 이를 분리함수로 나누어 실현하고자 하는 연구가 계속되어 왔다. (1-6) 본 연구에서는 2차원 비분리함수를 분리가능한 1차원 함수의 합과 곱에 의한 조합필터(1,8)를 반평면(half-plane) 대칭필터(12,14)와 직렬 연결하여 2차원 비분리함수의 주파수 특성에 근사시킨 후, 저역통과 필터의 주파수 특성을 회전 및 이동하여 비타원 차단영역을 가진 필터(10) 또는 원하는 상한의 특성만을 얻게하는 설계방법을 제안하였다.

II. 4상한 대칭필터의 설계

필터는 식 (1) 과 같이 표현되며

$$H_T(z_1, z_2) = H(z_1, z_2)H'(z_1, z_2) \quad (1)$$

식 (1)의 $H(z_1, z_2) = H_1(z_1)H_2(z_2)$ 이고 여기서 $H_1(z_1)$, $H_2(z_2)$ 는 1차원 필터의 조합에 의한 필터이다. $H'(z_1, z_2) = H_3(z)$ 로 z 는 복소변환을 위한 요소이다.

필터를 설계하기 위해 다음 조건을 만족해야 한다. (1, 16)

1) 분리성(Separability) :

$$H(z_1, z_2) = H_1(z_1)H_2(z_2)$$

2) 4상한 대칭필터 :

$$\begin{aligned} |H(z_1, z_2)| &= |H(z_1, z_2^*)| \\ &= |H(z_1^*, z_2)| = |H(z_1^*, z_2^*)| \end{aligned} \quad (2)$$

*는 복소공액

$$|z_1| = 1, |z_2| = 1, z_1^* = z_1^{-1}, z_2^* = z_2^{-1}$$

3) 반평면대칭(Half-plane symmetry) :

$$|H(z_1, z_2)| = |H(z_1^*, z_2^*)| \quad (3)$$

4상한 대칭을 갖는 2차원 필터의 전달함수의 유도방법은 첫번째 사각영역(rectangular region)의 결합에 의한 것으로 통과

대역과 제거대역특성을 열거하여 사용하는 방법이며, 두번째는 미리 정해진 주파수 특성에 맞도록 전달함수를 근사시키는 방법이다. 본 연구에서는 첫번째 방법을 사용하여 실현하였다.

예로 Fig. 1.에서 통과대역의 최대감쇄를 α_{max} , 제거대역의 최소감쇄를 α_{min} 라 할 때 Fig. 1.의 2차원 필터의 전달함수 $H(z_1, z_2)$ 는 $H_1(z_1)$, $H_2(z_2)$ 로 분리 가능하다. 즉 Fig. 2.의 1차원 BPF와 1차원 LPF로 분리된다.

Fig. 3.과 같은 9가지 형태의 필터도 LPF, HPF, BPF의 결합으로 쉽게 유도될 수 있으며, 사각통과필터(Rectangular pass filter)에 의한 통과대역은 사각제거필터(Rectangular stop filter)에 의한 제거대역과 같으며, 사각제거필터의 통과대역과 제거대역은 전대역필터(All pass filter)에서 사각통과필터의 제거대역과 통과대역 특성을 뺀 것으로 나타난다. 즉 사각제거필터(Rectangular stop filter) $H(z_1, z_2)$ 는 식 (4)와 같다.

$$H(z_1, z_2) = H_{A1}(z_1)H_{A2}(z_2) - [H_1(z_1)H_2(z_2)]^2 \quad (4)$$

여기서 $H_1(z_1)H_2(z_2)$ 는 사각통과필터의 전달함수이며 $H_{A1}(z_1)H_{A2}(z_2)$ 는 1차원 전대역필터(All pass filter)의 전달함수이다. 그리하여 복잡한 형태의 사각영역 특성도 통과필터와 제거필터의 조합으로 원하는 특성을 실현할 수 있다. 각 조합필터의 통과대역을 P_i 라 하고 제거대역을 S_i 라 할 때 조합에 의한 전체 통과대역 P 와 제거대역 S 는 식 (5)와 같다.

$$P = \bigcap_{i=1}^M P_i \quad S = \bigcup_{i=1}^M S_i \quad (5)$$

여기서 M 은 사각통과필터와 사각제거필터의 수를 나타낸다.

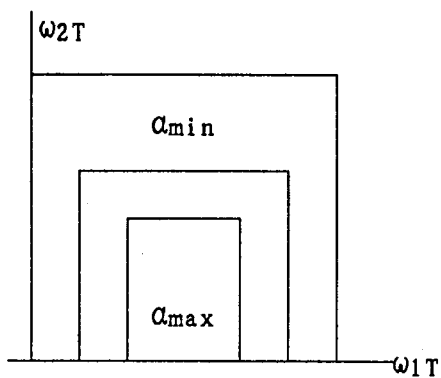


Fig. 1. Two-dimensional filter derived by the combination of two one-dimensional filters.

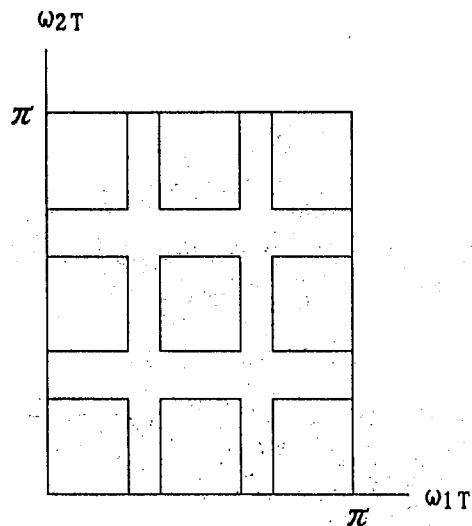
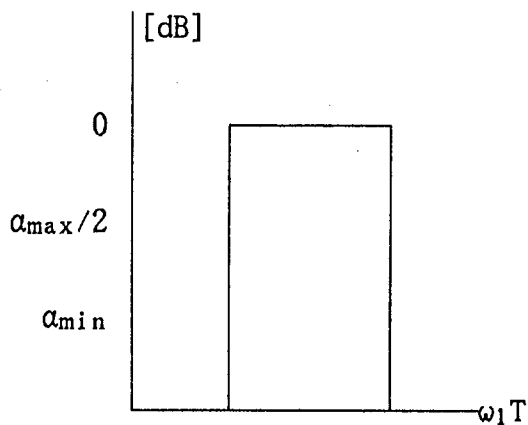
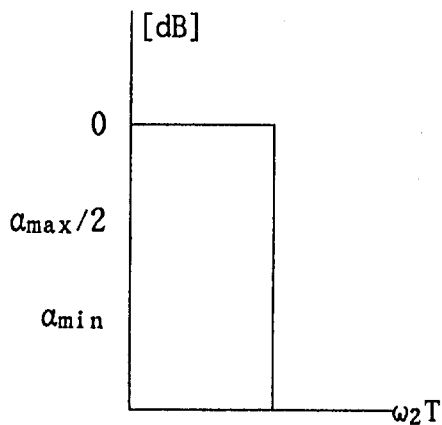


Fig. 3. Nine rectangular pass filters derived by the combination of one-dimensional LPF, HPF, BPF.



(a)



(b)

Fig. 2. One-dimensional component filters of Fig. 1.

- (a) Amplitude response along ω_1 -axis
- (b) Amplitude response along ω_2 -axis

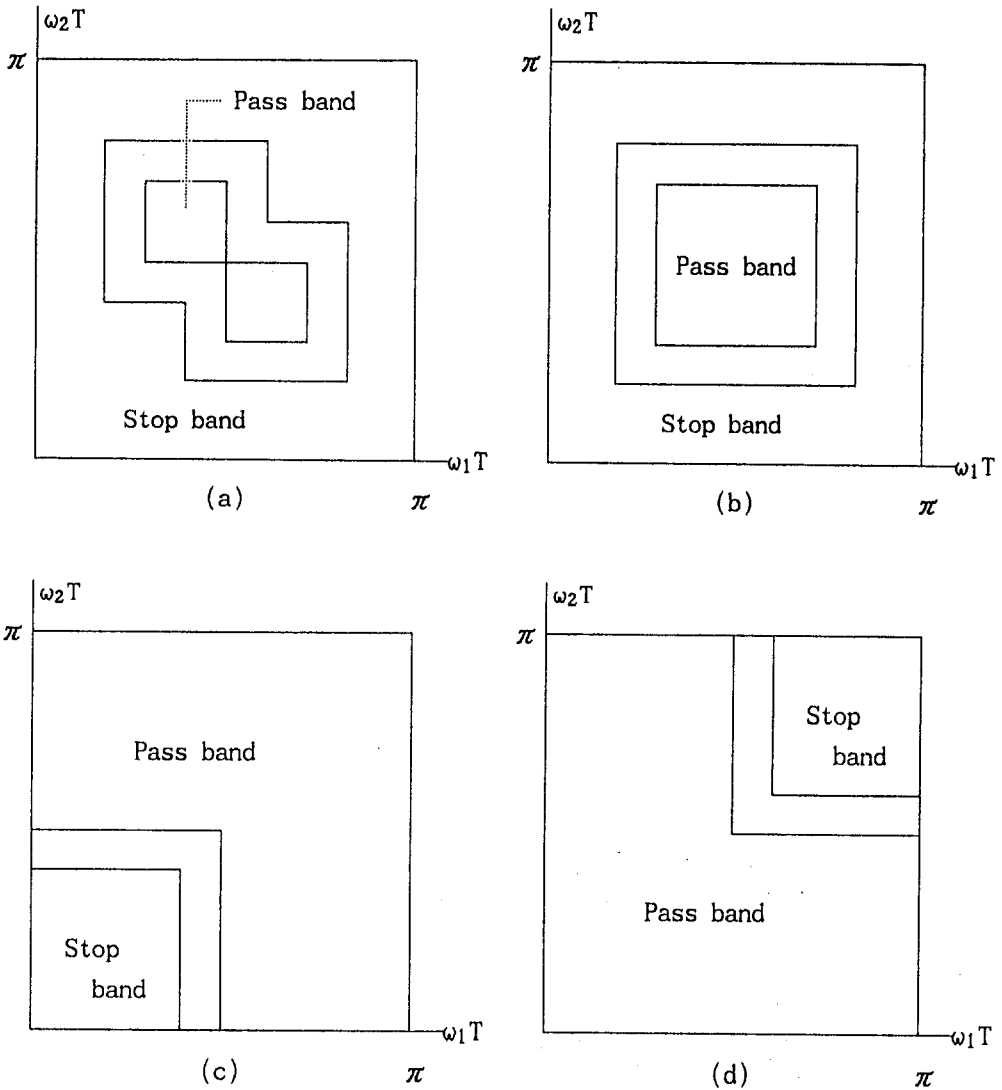


Fig. 4. Derivations of a transfer function with arbitrary rectangular pass regions by decomposing the original characteristic into several building block sections.

(a) Specified characteristic $H(z_1, z_2)$
 (c) Rectangular stop filter $H_2(z_1, z_2)$

(b) Rectangular pass filter $H_1(z_1, z_2)$
 (d) Rectangular stop filter $H_3(z_1, z_2)$

예로 Fig. 4. (a)의 필터 전달함수 $H(z_1, z_2)$ 는 식 (6)과 같이 Fig. 4.의 (b), (c), (d) 전달함수 $H_1(z_1, z_2)$, $H_2(z_1, z_2)$, $H_3(z_1, z_2)$ 로 나타나며

$$H(z_1, z_2) = H_1(z_1, z_2) H_2(z_1, z_2) H_3(z_1, z_2) \quad (6)$$

여기서 $H_1(z_1, z_2)$ 은 사각통과필터, $H_2(z_1, z_2)$ 와 $H_3(z_1, z_2)$ 는 사각제거필터로, $H_1(z_1, z_2)$

z_2)는 2개의 1차원 BPF를 사용하고, $H_2(z_1, z_2)$ 는 2개의 1차원 LPF와 APF를 사용하며, $H_3(z_1, z_2)$ 는 2개의 1차원 HPF와 APF에 의해 실현할 수 있다.

III. 반평면 대칭필터의 설계

반평면 대칭특성의 합성은 원하는 2개의 상한만을 얻는 것으로, 분리형태는 1-3상한, 2-4상한으로 분리된 두가지 형태로 한다.^(12,14) 이상적인 2차원 저역통과필터는 4상한 대칭필터로 Fig. 5와 같으며 전달함수는 식 (7)로 나타낸다.

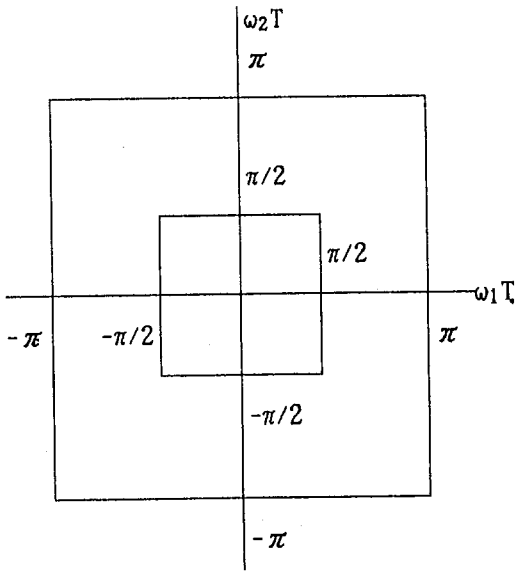


Fig. 5. Ideal low-pass characteristic.

$$G'(z_1, z_2) = G'_1(z_1)G'_2(z_2) \quad (7)$$

$G'_1(z_1)$ 과 $G'_2(z_2)$ 는 1차원의 LPF이다. 여기서 $z_1 = z_1 e^{-j\theta_1}$, $z_2 = z_2 e^{-j\theta_2}$ 라 하여 $G'_1(z_1)$ 과 $G'_2(z_2)$ 에 대입할 때 1차원 필터 $G'_1(z_1)$ 과 $G'_2(z_2)$ 는 θ 값에 의해 이동(Shift) 특성을 얻을 수 있고, $G'_1(z_1)G'_2(z_2)$ 2차원 필터의 특성을 얻을 수 있다. 이동특성을 G_1

(z_1, θ_1) , $G_2(z_2, \theta_2)$ 와 $G(z_1, \theta_1, z_2, \theta_2)$ 로 나타내면 식 (8), (9)와 같다.

$$G_1(z_1, \theta_1) = G'_1(z_1) \quad \left| \quad \begin{array}{l} z_1 = z_1 e^{-j\theta_1} \end{array} \right. \quad (8a)$$

$$G_2(z_2, \theta_2) = G'_2(z_2) \quad \left| \quad \begin{array}{l} z_2 = z_2 e^{-j\theta_2} \end{array} \right. \quad (8b)$$

$$G(z_1, \theta_1, z_2, \theta_2) = G_1(z_1, \theta_1) G_2(z_2, \theta_2) \quad (9)$$

이때 필터의 요소들은 복소수이다. 이상적인 저역통과 특성을 $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ 이동한 이상적인 특성은 Fig. 6. 과 같다.

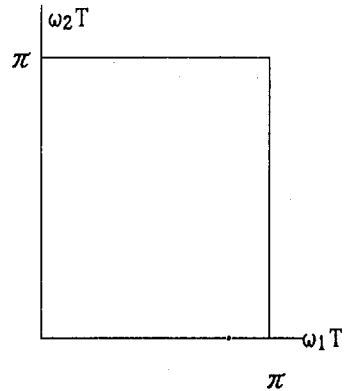


Fig. 6. Shifted ideal low-pass characteristic.

일반적으로 통과대역과 저지대역 사이에는 천이특성이 나타나고 이상적인 특성이 얻어지지 않는다. 그러므로 이상적인 특성을 얻기 위해서는 충분히 높은 차수가 필요하게 된다. 각 상한으로 이동된 특성에 관한 식은 식 (10)과 같으며 G에서의 첨자는 각 상한을 나타낸다.

$$G_1(z_1, z_2) = G(z_1, \pi/2, z_2, \pi/2) \quad (10a)$$

$$G_2(z_1, z_2) = G(z_1, -\pi/2, z_2, \pi/2) \quad (10b)$$

$$G_3(z_1, z_2) = G(z_1, -\pi/2, z_2, -\pi/2) \quad (10c)$$

$$G_4(z_1, z_2) = G(z_1, \pi/2, z_2, -\pi/2) \quad (10d)$$

1-3상한, 2-4상한으로 분리된 반평면 대칭 (Half-plan symmetry) 식은 식 (11)으로 나타나며

$$\begin{aligned}
 G_{13}(z_1, z_2) &= G_1(z_1, z_2)G_1^*(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\
 &+ G_3(z_1, z_2)G_3^*(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\
 &- G_1(z_1, z_2)G_1^*(z_1^{-1}, z_2^{-1})G_3(z_1, z_2) \\
 &G_3^*(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (11a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{24}(z_1, z_2) &= G_2(z_1, z_2)G_2^*(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\
 &+ G_4(z_1, z_2)G_4^*(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\
 &- G_2(z_1, z_2)G_2^*(z_1^{-1}, z_2^{-1})G_4(z_1, z_2) \\
 &G_4^*(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (11b)
 \end{aligned}$$

G_1^* 은 G_1 요소의 공액복소수를 갖는 필터이며 식 (11)의 특성은 Fig. 7. 과 같다.

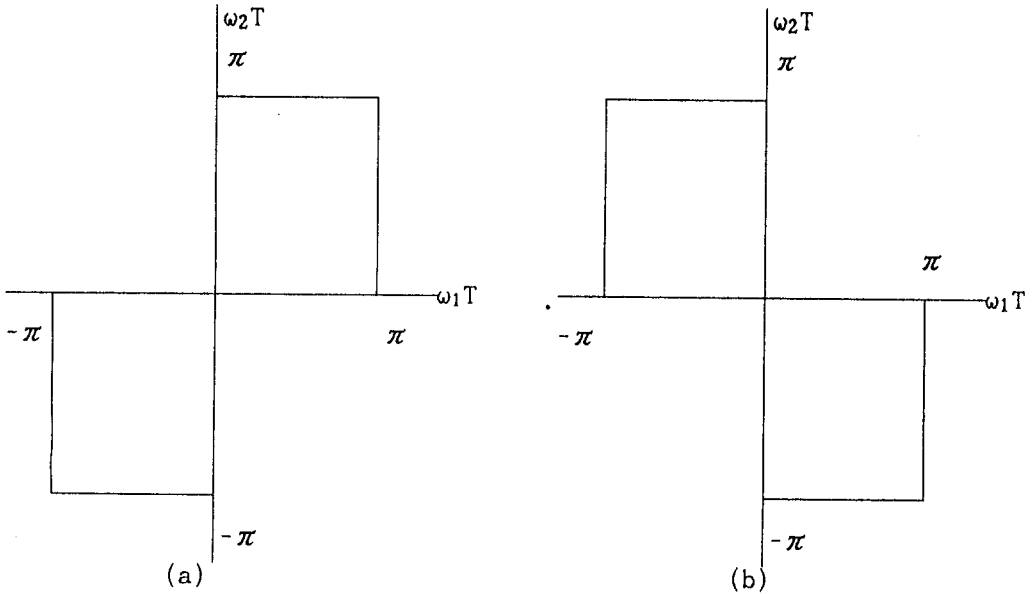


Fig. 7. Two-quadrant ideal all-pass characteristic.

(a) $G_{13}(z_1, z_2)$

(b) $G_{24}(z_1, z_2)$

또한 식 (11)의 첫번째, 두번째 항은 complex 요소를 갖는 zero phase 필터로 $G_{13}(z_1, z_2)$ 와 $G_{24}(z_1, z_2)$ 의 결과적인 요소는 실수성분만을 갖게 된다. 왜냐하면 $G_1^* = G_3$ 이고 $G_2^* = G_4$ 이기 때문이다. 세번째 항은 첫번째 항과 두번째 항이 더해질 때 생성되는 중첩부분을 제거하기 위한 목적이며, 이상적인 경우는 원점에서 한점을 구성한다. 많은 경우에 있어 중첩부분을 무시하며, 세번째 항을 제거한 수식은 식 (12)와 같다.

$$\begin{aligned}
 G_{13}(z_1, z_2) &= G_1(z_1, z_2)G_1^*(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\
 &+ G_3(z_1, z_2)G_3^*(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (12a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{24}(z_1, z_2) &= G_2(z_1, z_2)G_2^*(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \\
 &+ G_4(z_1, z_2)G_4^*(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (12b)
 \end{aligned}$$

필터 설계의 예로 Fig. 8.의 함수를 $U(z_1, z_2)$ 와 $V(z_1, z_2)$ 라 할 때 Fig. 8.을 반평면대칭필터로 나타내면 식 (13)과 같다.

$$H_1(z_1, z_2) = U(z_1, z_2)G_{13}(z_1, z_2) \quad (13a)$$

$$H_2(z_1, z_2) = V(z_1, z_2)G_{24}(z_1, z_2) \quad (13b)$$

$$\begin{aligned}
 H(z_1, z_2) &= H_1(z_1, z_2) + H_2(z_1, z_2) \\
 &- H_1(z_1, z_2)H_2(z_1, z_2) \quad (13c)
 \end{aligned}$$

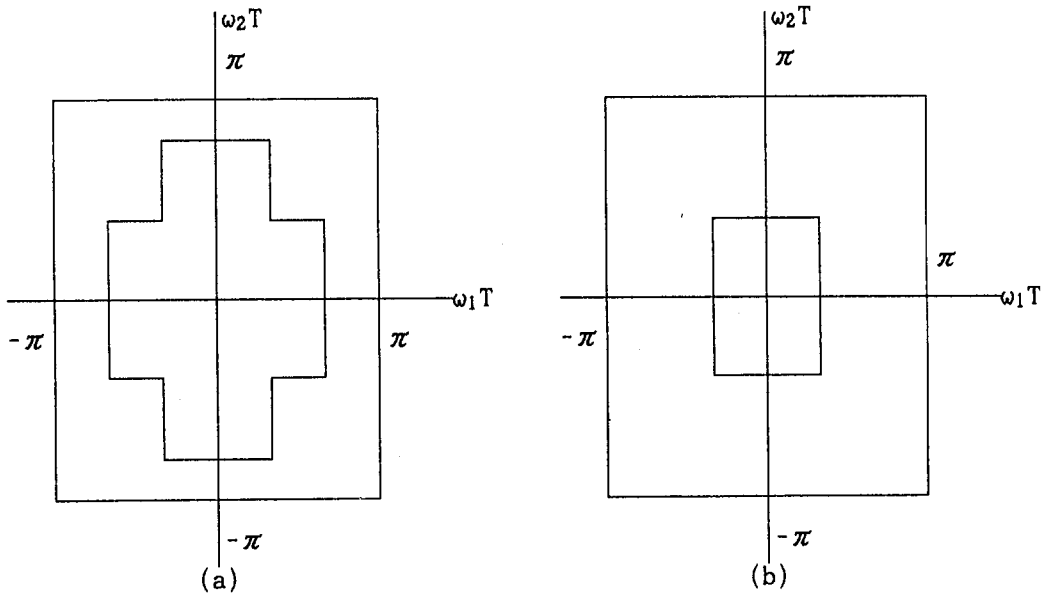


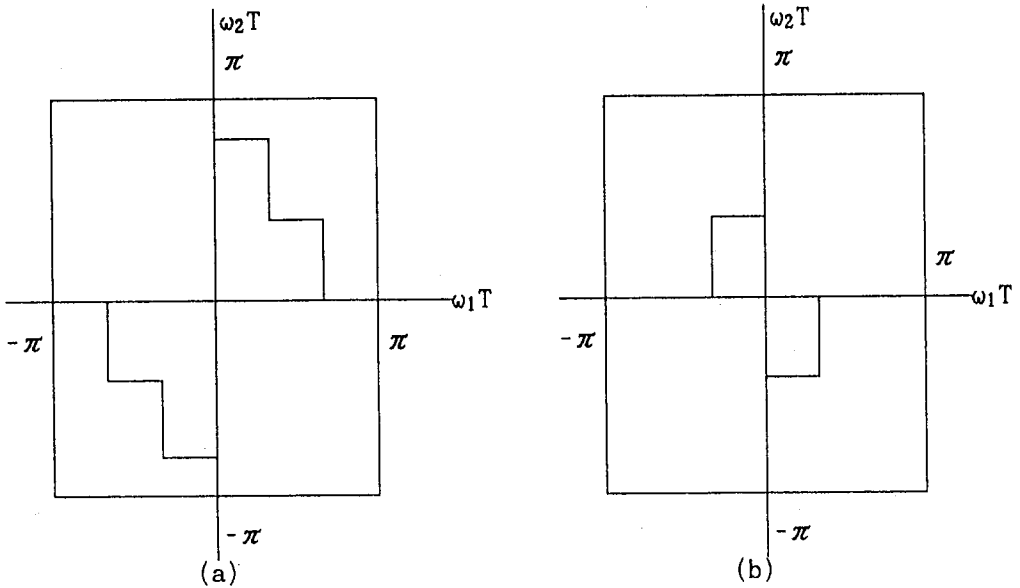
Fig. 8. Example of four quadrant characteristics.

(a) $U(z_1, z_2)$

(b) $V(z_1, z_2)$

식 (13c)의 $H_1(z_1, z_2)H_2(z_1, z_2)$ 는 결합시 생성되는 중첩부분을 제거하기 위함이며 $H_1(z_1, z_2)$ 와 $H_2(z_1, z_2)$ 는 Fig. 9. (a) (b)와

같은 반평면(Half-plane symmetry) 특성을 갖으며, $H(z_1, z_2)$ 의 결과는 Fig. 9(c)와 같다.



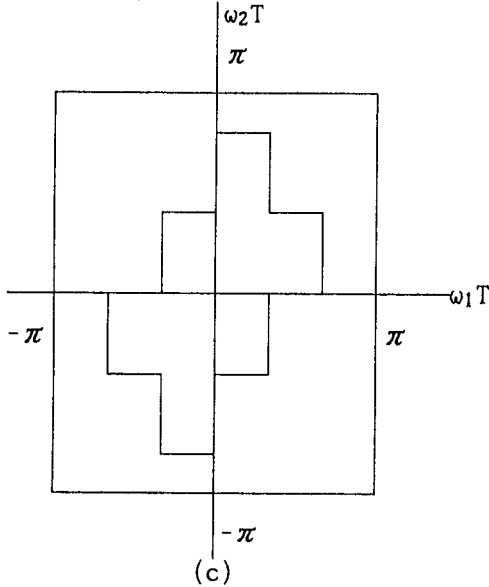


Fig. 9. Given half-plane symmetry characteristics and its decomposition into two characteristics.

- (a) First and third quadrants.
- (b) Second and fourth quadrants.
- (c) Given characteristic.

Zero Phase 필터는 식 (14)와 같으며

$$U(z_1, z_2) = U'(z_1, z_2)U'(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (14a)$$

$$V(z_1, z_2) = V'(z_1, z_2)V'(z_1^{-1}, z_2^{-1}) \quad (14b)$$

위의 결과에서 주파수의 특성에 맞는 분리를 위한 가장 적은 차수의 $U'(z_1, z_2)$, $V'(z_1, z_2)$, $G'(z_1, z_2)$ 를 구하는 것이 문제이며, 일반적인 설계절차는 다음과 같다.

- 1) 주어진 특성을 고려한 $G'(z_1, z_2)$ 의 실현을 위한 필터의 선택
- 2) $G_{13}(z_1, z_2)$ 와 $G_{24}(z_1, z_2)$ 의 필터특성의 결정, 2상한 특성, 4상한 특성을 주어진 특성으로부터 결정
- 3) 분리 필터의 디자인
- 4) 전체적인 특성을 비교하여 설계규격

과 불일치시 다른 $G'(z_1, z_2)$ 를 선택하며 절차를 반복한다.

위의 설계절차에서 알 수 있듯이 유연성 있는 $G'(z_1, z_2)$ 을 선택함이 필요하다.

IV. 복소변환

(Complex Transformation)

안정한 2차원 필터 $H'(z_1, z_2)$ 는 식 (15)와 같이 복소변환(Complex Transformation)할 수 있다. (10, 11)

$$H'(z_1, z_2) = H(z) \Big|_{z=e^{j\phi} z_1^{\alpha_1/\beta_1} z_2^{\alpha_2/\beta_2}} \quad (15)$$

이에 상응하는 주파수 변환은

$$z = e^{j\omega} = e^{j(\phi + \alpha_1\omega_1/\beta_1 + \alpha_2\omega_2/\beta_2)} \quad (16)$$

또는

$$\omega = \phi + \alpha_1\omega_1/\beta_1 + \alpha_2\omega_2/\beta_2 \quad (17)$$

가 된다. 이러한 필터에 대한 복소변환(Complex Transformation)의 효과는 다음과 같이 3가지로 요약된다.

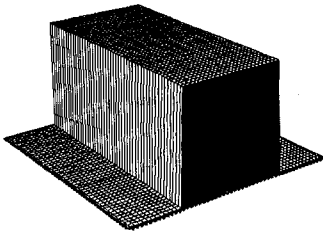
- 1) 주파수 이동(shifting) : 필터의 주파수 응답이 ω_1 축을 따라서 ϕ 만큼 이동한다.
- 2) 주파수 응답의 회전(Rotation) : z_2 의 α_2/β_2 에 정의된다.

$$\text{Rotation Angle } \theta = \text{Tan}^{-1}(\alpha_2/\beta_2) \quad (18)$$

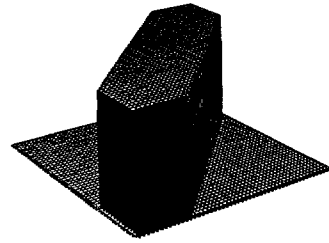
- 3) ω_1 축을 따른 주파수응답의 Scaling : z_1 의 α_1/β_1 에 의하여 주파수 응답이 Scale되며 주기성을 갖는다.

또한 복소변환에 의한 수식을 아래와 같이 정의할 때

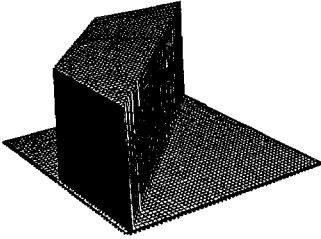
$$H(z_1, z_2, \phi, \alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2) = H(z) \Big|_{z=e^{j\phi} z_1^{\alpha_1/\beta_1} z_2^{\alpha_2/\beta_2}} \quad (19)$$



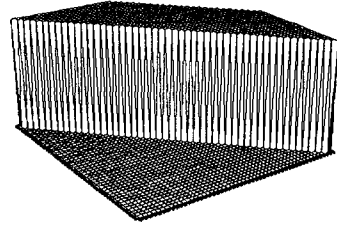
(a) Prototype filter



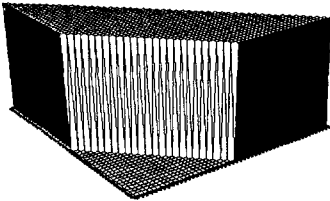
(b) $H(z_1, z_2, 0, 1, 1)$



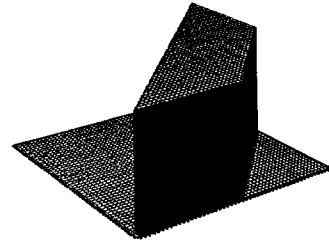
(c) $H(z_1, z_2, \pi/2, 1, 1)$



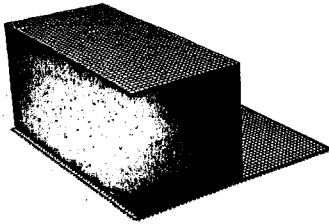
(d) $H(z_1, z_2, \pi/2, -1, 1)$



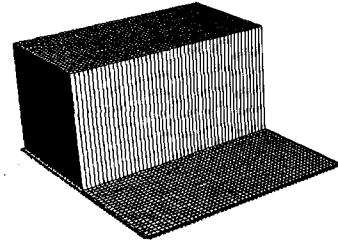
(e) $H(z_1, z_2, \pi/2, 1, -1)$



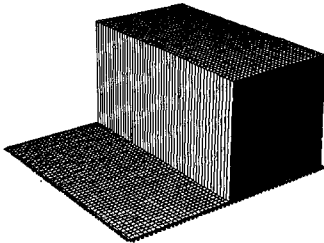
(f) $H(z_1, z_2, \pi/2, -1, -1)$



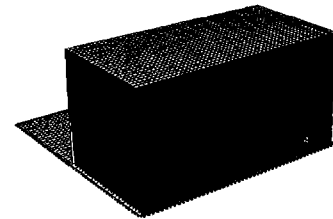
(g) $H(z_1, z_2, \pi/2, 1, 0)$



(h) $H(z_1, z_2, \pi/2, 0, 1)$



(i) $H(z_1, z_2, \pi/2, -1, 0)$



(j) $H(z_1, z_2, \pi/2, 0, -1)$

Fig. 10. Basic building block for the filter design using complex transformation

ϕ , α_1/β_1 , α_2/β_2 의 변화에 따른 주파수 특성의 이동 및 회전은 Fig. 10. 과 같다. ⁽¹⁾

V. 설계 예제

두개의 반평면 대칭필터의 전달함수를 유도하기 위한 $U(z_1, z_2)$, $V(z_1, z_2)$, $G(z_1, z_2)$ 의 조합필터를 선택한다. 설계규격을 만족하는 결과를 얻기 위한 1차원 저역통과 필터의 차수선택은 아래 식과 같이 주어진다. ⁽¹⁾

$$n \geq (\ln k_1 / \ln k) \quad (20)$$

$$k = \{ \tan(\omega_c T/2) / \tan(\omega_{\min} T/2) \} \quad (21)$$

$$k_1 = \{ 10^{\alpha_{\max}/10} - 1 / 10^{\alpha_{\min}/10} - 1 \}^{1/2} \quad (22)$$

여기서 ω_c : 차단 각주파수

ω_{\min} : 제거대역 최소 각주파수

α_{\max} : 통과대역 최대감쇠

α_{\min} : 제거대역 최소감쇠

차수가 결정되면 1차원 LPF 전달함수는 곱의 형태로 쓰여진다. 필터를 실현하기 위

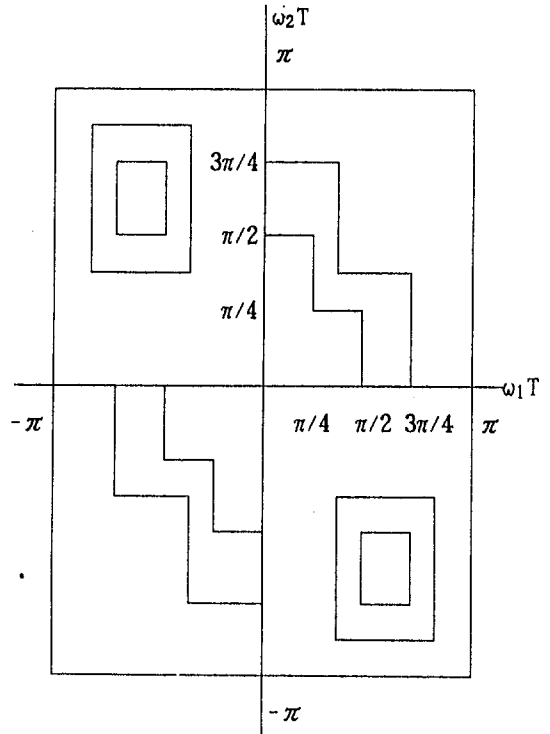


Fig. 11. The given specification for example.

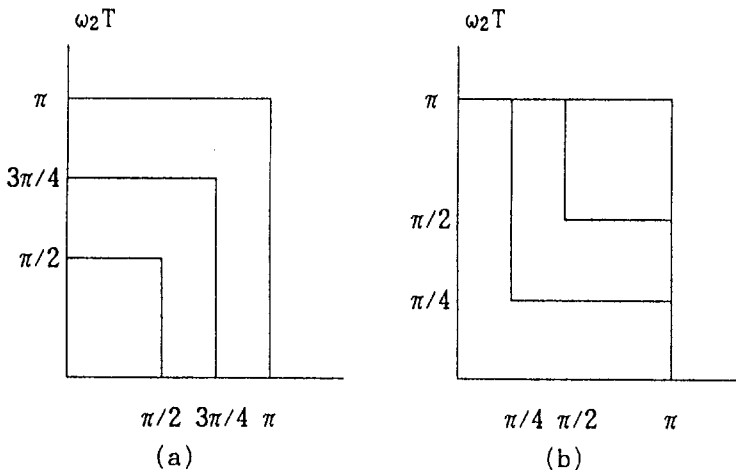


Fig. 12. Decomposition of the first quadrant of Fig. 11.

(a) Rectangular pass filter $H_L(z_1, z_2)$

(b) Rectangular stop filter $H_{HF}(z_1, z_2)$

한 $H(z_1, z_2)$ 에서 $\alpha_{\max} = 3 \text{ dB}$, $\alpha_{\min} = 20 \text{ dB}$ 인 주파수 특성이 Fig. 11.과 같다고 할 때 $G_{13}(z_1, z_2)$ 와 $G_{24}(z_1, z_2)$ 의 합에 의한 중첩성분을 무시하고, 전대역필터(All Pass Filter)를 사용하며, 주어진 특성의 대칭성 때문에 동일한 1차원의 필터가 필요하다. Fig. 11.의 특성은 식 (23), (24)로 나타낼 수 있으며, 식 (23a)는 Fig. 12.의 (a), (b)의 결합과 같다.

$$U(z_1, z_2) = H_L(z_1, z_2) H_{HE}(z_1, z_2) \quad (23a)$$

$$V(z_1, z_2) = H_B(z_1) H_B(z_2) \quad (23b)$$

여기서 $H_L(z_1, z_2)$: 2차원 LPF 전달함수
 $\rightarrow H_L(z_1)H_L(z_2)$ 로 분리 실현
 $H_{HE}(z_1, z_2)$: 사각제거대역 필터의 전달함수
 $H_B(z_1), H_B(z_2)$: 2개의 1차원 BPF 전달함수

$$H_{HE}(z_1, z_2) = H_A(z_1)H_A(z_2) - [H_H(z_1)H_H(z_2)]^2 \quad (24)$$

여기서 $H_A(z_1), H_A(z_2)$: 1차원 APF의 전달함수
 $H_H(z_1), H_H(z_2)$: 1차원 HPF의 전달함수

식 (13a)를 실현하기 위한 $G(z_1)$ 과 $H_L(z_1)$ 의 ω_c , α_{\min} , ω_{\min} 을 규격으로부터 얻은 결과는 Table 1과 같으며 $H_H(z_1)$ 를 위한 ω_c , α_{\max} , ω_{\min} 도 같이 나열하였다.

Table 1. Requirements for each one-dimensional filter which is found from the given two-dimensional specifications.

	$\omega_c T$	α_{\max} (dB)	$\omega_{\min} T$	α_{\min} (dB)
$G(z_1)$	0.5π		0.625π	10
$H_L(z_1)$	0.5π		0.75π	10
$H_H(z_1)$	0.5π	0.825	0.25π	

그리고 식 (20)으로부터 구한 2차원 규격을 만족시키는 최소 차수는 $G(z_1)$ 이 4차, $H_L(z_1)$ 이 4차, $H_H(z_1)$ 은 2차의 차수를 얻었으며, $G(z_1)$ 의 $\alpha_{\max} = 1.328\text{dB}$, $H_L(z_1)$ 의 $\alpha_{\max} = 0.03377\text{dB}$, $H_H(z_1)$ 의 $\alpha_{\min} = 9.088\text{dB}$ 를 얻었다.

필터 실현을 위한 전달함수는 식 (25), (26), (27), (28), (29)와 같으며, 수식의 요소값은 Table 2와 같다.

$$G(z_1) = \prod_{i=1}^2 F_i(z_1) \quad (25)$$

$$H_L(z_1) = \prod_{i=1}^2 F_i(z_1) \quad (26)$$

$$F_i(z_1) = \frac{(1-\alpha_{1i}+\alpha_{2i})}{4} \frac{(1+z_1^{-1})^2}{(1-\alpha_{1i}z_1^{-1}+\alpha_{2i}z_1^{-2})} \quad (27)$$

Table 2. Coefficient values in (27).

	α_{11}	α_{21}	α_{12}	α_{22}
$G(z_1)$	-0.18529	0.44975	-0.13399	0.043676
$H_L(z_1)$	-0.81978	0.51324	-0.60987	0.12577

$H_A(z_1)$ 과 $H_H(z_1)$ 의 전달함수는

$$H_A(z_1) = \frac{(z_1^{-2}-\alpha_1z_1^{-1}+\alpha_2)}{(1-\alpha_1z_1^{-1}+\alpha_2z_1^{-2})} \quad (28)$$

$$H_H(z_1) = \frac{(1+\alpha_1+\alpha_2)}{4} \frac{(1-z_1^{-1})^2}{(1-\alpha_1z_1^{-1}+\alpha_2z_1^{-2})} \quad (29)$$

이며 $\alpha_1 = 0.44958$, $\alpha_2 = 0.20753$ 이다. 식 (25)-(29)로 계산된 $G(z_1, z_2)$, $U(z_1, z_2)$ 의 주파수 특성은 Fig. 13.과 같다.

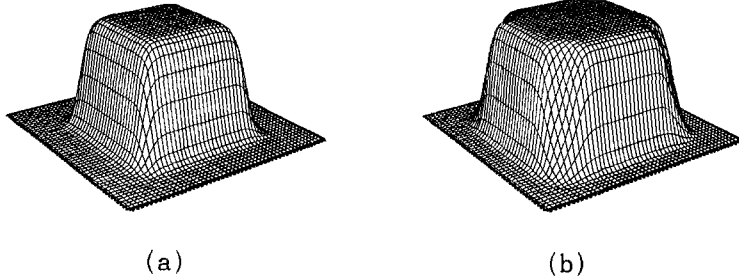


Fig. 13. Frequency characteristics.

(a) $G(z_1, z_2)$ (b) $U(z_1, z_2)$

그리고 식 (13b)를 실현하기 위한 BPF의 차수는 6차이고, 전달함수는 식 (30), (31)과 같으며 필터의 요소값은 Table 3.에 나타나 있다.

$$H_B(z_1) = K \prod_{i=1}^3 H_{Bi}(z_1) \quad (30)$$

$$K = 5.3585$$

$$H_{Bi}(z_1) = \frac{(1-\alpha_{2i})}{2} \frac{(1-z_1^{-1})^2}{(1-\alpha_{1i}z_1^{-1} + \alpha_{2i}z_1^{-2})} \quad (31)$$

Table 3. Coefficient values of (31) for $i = 1, 2, 3$.

i	1	2	3
α_{1i}	-0.52163	-1.28530	0.17667
α_{2i}	0.25933	0.69257	0.56572

식 (30), (31)로 계산된 $V(z_1, z_2)$ 와 $G(z_1, z_2)$, $U(z_1, z_2)$, $V(z_1, z_2)$ 를 결합한 $H(z_1, z_2)$ 의 주파수 특성은 Fig. 14.와 같다.

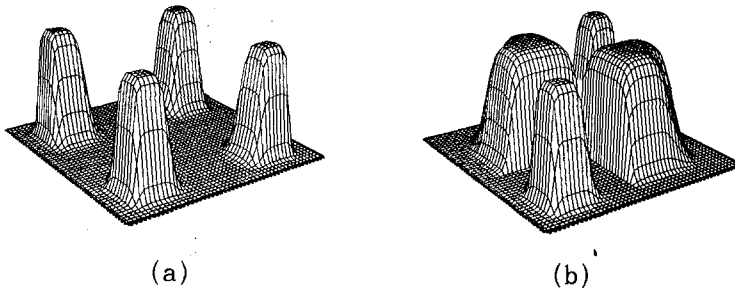


Fig. 14. Frequency characteristics.

(a) $V(z_1, z_2)$ (b) $H(z_1, z_2)$

최종 필터의 주파수 특성 $H_T(z_1, z_2)$ 는 $H_T(z_1, z_2) = H(z_1, z_2) H'(z_1, z_2)$ 이며, Fig. 14.(b)에서 이를 실현하기 위한 $H(z_1, z_2)$ 를 구하였다. 여기서 나머지 항인 $H'(z_1, z_2)$ 를 구하기 위한 필터는 원하는 필터의 설계규격

에 따라 변해질 수 있으며, 이 논문에서는 임의의 $H'(z_1, z_2)$ 를 복소변환하여 최종 필터의 실현 가능성만을 보인다. 임의의 $H'(z_1, z_2)$ 는 6차의 LPF규격⁽¹⁷⁾을 이용하기로 하며 전달함수는 식 (32)로 표현된다.

$$H(z_1) = \prod_{i=1}^3 \frac{(1 + \alpha_{1i})(1 + z_1^{-1})^2}{(1 + (\alpha_{1i} + \alpha_{2i})z_1^{-1} + (1 + \alpha_{1i} + \alpha_{2i})z_1^{-2})} \quad (32)$$

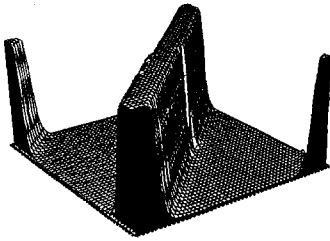
식 (32)에서의 α_{1i} 와 α_{2i} 는 Table 4.와 같다.

이와 같이 식 (32)를 복소변환하여 얻어진 $H'(z_1, z_2)$ 을 $H(z_1, z_2)$ 과 곱한 최종 필터

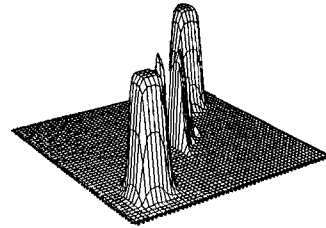
Table 4. Coefficient values of (32) for $i = 1, 2, 3$.

i	1	2	3
α_{1i}	-0.834235	-0.865090	-0.878181
α_{2i}	0.570150	0.277891	0.153889

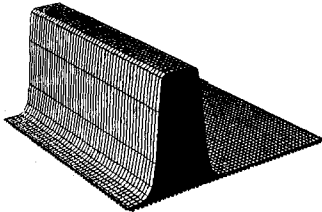
의 주파수 특성을 Fig. 15.와 같이 구하였다.



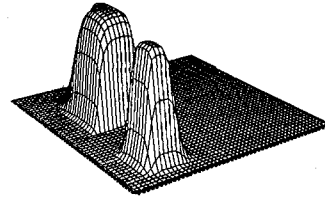
(a) $H(z_1, z_2, 0, 1, 1)$



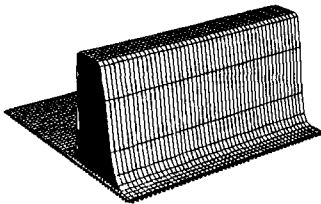
(b) Desired filter.



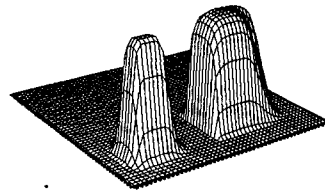
(c) $H(z_1, z_2, \pi/2, 1, 0)$



(d) Desired filter.



(e) $H(z_1, z_2, \pi/2, 0, -1)$



(f) Desired filter.

Fig. 15. Frequency characteristics of the filter desire using complex transformation.

VI. 결 론

비분리함수인 2차원 IIR 디지털 필터를 간단한 구조의 분리가능한 분리전달함수로 근사시킨 후, 저역특성의 필터를 복소변환하여 비타원 차단영역을 가진 필터 또는 원하는 상한의 특성만을 얻을 수 있는 2차원 비분리함수의 설계방법을 제안하였다. 이 설계방법은 4상한 대칭형태를 갖는 어떠한 비분리함수의 실현에도 적용할 수 있으며, 복소변환 필터로 하여금 필터의 특성을 보상할 수 있는 장점이 있다.

앞으로의 과제는 낮은 차수의 적절한 필터의 선택과 복소변환 필터의 적용에 관한 연구가 계속되어야 한다.

VII. 참고 문헌

1. K. Hirano and J.K. Aggarwal, "Design of two-dimensional recursive digital filters" *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, vol. CAS-25, No. 12, pp. 1066-1076, December 1978.
2. J.L. Shanks, S. Treitel, and J.H. Justic, "Stability and synthesis of two-dimensional recursive filters" *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU-20, pp. 115-128, June 1972.
3. H. Chang and J.K. Aggarwal, "Design of two-dimensional recursive filters by interpolation" *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-26, pp. 281-291, June 1977.
4. N.A. Pendergrass, S.K. Mitra and E.I. Jury, "Spectral transformations for two-dimensional digital filters" *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-23, pp. 25-35, Jan. 1976.
5. M.T. Manry and J.K. Aggarwal, "Picture processing using one-dimensional implementations of discrete planar filters" *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-22, pp. 164-173, June 1974.
6. R.M. Mersereau and D.E. Dudgeon, "The representation of two-dimensional sequences as one-dimensional sequences" *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-20, pp. 320-325, Oct. 1974.
7. J.M. Costa and A.N. Venetsanopoulos, "Design of circularly symmetric two-dimensional recursive filters" *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-22, pp. 432-443, Dec. 1974.
8. K. Steiglitz, "Computer-aided design of recursive digital filters" *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, vol. AU-18, pp. 143-149, June 1970.
9. S.K. Mitra and K. Hirano, "Digital all-pass networks" *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-21, pp. 688-700, Sept. 1974.
10. M. Ahmadi, A. Mazinani, M. Shridhar and V. Ramachandran, "Simple methods for the design of 2D recursive digital filters with noncircular cutoff boundary" *IEE PROCEEDINGS-G*, vol. 139, No. 4, pp. 427-437, August 1992.
11. A.H. Kayran and R.A. King, "Design of recursive and non-recursive fan filter with complex transformations" *IEEE Trans. Circuit Syst.*, vol. CAS-30, No. 12, pp. 849-857, December 1974.
12. G. Garibotto and R. Molpen, "A

- new approach to half-plan recursive filter design" *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-29, pp.111-115, Feb. 1981.
13. J.H. McClellan, "The design of two-dimensional digital filters by transformations" in *Proc. 7th Ann. Princeton Conf. Information Science and Systems*, pp.247-251, 1973.
 14. M.P. Ekstrom, R.E. Twogood and J.W. Woods, "Design of stable 2-D half-plane recursive filters using spectral factorization" in *IEEE Int. Symp. Circuits and Systems*, pp.761-764, 1978.
 15. M.P. Ekstrom and J.W. Woods, "Two-dimensional spectral factorization with applications in recursive digital filtering" *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-24, pp.115-128, Apr. 1976.
 16. R.M. Mersereau, "The design of arbitrary 2-D zero-phase FIR filters using transformations" *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, vol. CAS-27, pp.142-144, Feb. 1980.
 17. A. Antoniou, "Digital filters: analysis and design" pp.313-342, McGraw-Hill, 1978.