

Spline 函數와 線型方程式을 이용한 樹幹 및 林分幹曲線모델¹

李 祐 均²

Stem and Stand Taper Model Using Spline Function and Linear Equation¹

Woo Kyun Lee²

要 約

單木 또는 林分の 생장과악 및 예측을 위해서는 樹幹形態의 파악이 선행되어야 한다. 또한 임분의 생장을 動的으로 파악하기 위해서는 樹幹形態를 數式化할 필요가 있다.

그러나 樹幹은 전체적으로는 圓錐型에 가깝지만 그 가늘어지는 정도가 부분적으로 다르기 때문에 하나의 式으로 표현하기엔 어려움이 있으므로, 부분적으로 상이한 계수를 갖는 區間推定式으로 표현하는 것이 이상적이다.

본 논문에서는 spline함수로부터 유도된 단목간곡선의 집합으로부터, 선형관계식을 이용하여 林分幹曲線을 수식화하는 방법을 소개하였다.

이와 같이 樹幹形態를 數式化한 단목 및 임분의 幹曲線式은 林分の 발달과정을 動的으로 파악할 수 있게 하여 임분생장연구의 다양성 및 합리적 산림계획모델의 기초를 제공한다.

ABSTRACT

One of the essential factors to estimate the stem and stand growth is to correctly portray a stem form (profile). It is also required to numerically approximate a stem form in order to dynamically grasp and represent a stand growth.

A whole stem form seems to be a conical form but a stem outline at various positions tapers off differently. Accordingly it is difficult to model a whole stand form with single taper equation. A stem taper equation with different coefficients on each subinterval can be useful tools to accurately portray a stem form.

This article presents the derivation method of individual stem taper curve using spline function. It is also in this paper aimed to study how a stand taper curve can be derived from the population of single stem taper curve in a stand.

These taper equations numerically formulated enable to dynamically represent and prognosticate the development process of a stand and prepare the foundation of variety on growth model study and rational forest planning model.

Key words : stem form(profile), stem taper curve, stand taper curve, numerical approximation, taper equation, spline function, dynamic of growth.

¹ 接受 1993年 3月 9日 Received on March 9, 1993.

² Institut für Forsteinrichtung und Ertragskunds, Universität zu Göttingen, Germany.

緒 論

林分生長의 중요한 기초를 이루는 것은 「樹幹의 形態 및 生長」이라 할 수 있다. 樹幹은 木材라는 經濟的 利用物로서 중요할 뿐만 아니라, 生態 및 環境의인 면에서도 잎·뿌리와 함께 立木生長의 근간이 되는 生理的 역할을 한다는 점에서도 그 중요성이 크다 하겠다. 따라서 많은 학자들은 임분생장의 정확한 파악을 위해서는 樹幹形態(stem form, stem profile)의 파악이 필수요소임을 역설하고 있다.^{7,17,21)} 또한 환경변화나 林分 관리방법이 임분생장에 미치는 영향을 파악하기 위해서도 수간형태가 우선 파악되어야 한다.^{7,21)} 목재의 利用面에서 보면, 이용별·등급별 성장파악 및 生産計劃을 위해서는 이에 맞는 다양한 성장모델이 필요하며 이의 기본요소가 수간형태를 數式化하는 것이다.^{12,28)}

單木의 樹幹을 數式化하는 방법으로는 현재까지 여러가지가 연구·발표되었으며, 그 중에서도 spline함수를 이용한 幹曲線 推定이 널리 이용되고 있다. Liu, Saborowski, Sloboda, Tietz 등은 일찍이 spline함수를 이용하여 幹曲線을 추정하였으며, 이의 適合性 檢定을 통하여 임업에서의 응용범위를 넓혀 주었다.^{14,21,25,27,31)} Nagel과 Athari는 spline함수를 이용하여 樹幹析解프로그램을 作成하였고¹⁶⁾, Hradetzky는 spline함수의 林業的 利用에 대한 연구를 수행한 바 있다.⁹⁾ Gaffrey는 spline함수를 통한 幹曲線 推定과 이를 바탕으로 한 등급별 재적추정 프로그램을 작성하였다.⁸⁾ 우리나라에서는 邊 등이 spline함수를 이

용한 수간석해 프로그램을 작성하였고, 이의 결과를 기존의 성장계산방법과 비교한 바 있다.⁵⁾

이상의 單木生長을 바탕으로 單木의 集合體로 볼 수 있는 林分의 生長을 總體的으로 파악하는 것이 가능하다. 즉, 단목간곡선식(stem taper curve equation)으로 부터 임분간곡선식(stand taper curve equation)을 유도할 수 있다. Gaffrey와 Sloboda는 단목의 相對幹曲線 집합체로부터 흉고직경과 임의높이에서의 직경과의 線型關係를 이용하여 林分幹曲線式을 유도하였으며, 이로부터 임분의 재적식을 도출하였다.^{8,24,28,29)}

이와같이 單木 및 林分幹曲線이 數式化되면 單木 및 林分의 生長을 動的으로 파악할 수 있으며, 이는 효율적인 임업경영모델의 작성 및 수행을 가능하게 해 준다. 따라서 본 연구는 spline함수를 통해 유도된 단목간곡선의 집합체로부터, 흉고직경과 임의높이에서의 직경과의 선형관계식을 이용하여 임분간곡선을 數式化하는데 그 목적을 둔다.

材料 및 方法

材積表 조제를 위해 조사된 자료 중에서 강원도 홍천군 내의 한 소나무 단순임분(벌채지)으로부터 부위별로, 즉 0.2m, 1.2m 그리고 각 2m 간격으로 직경을 측정된 58本을 시험재료로 삼았다. 조사임분은 그 평균 직경과 수고가 각각 22.65cm, 15.99m로서 중령임분에 속하였으며, 등급별로는 직경 10~20cm(경급 2)가 15本, 20~30cm(경급 3)가 40本, 그리고 30~40cm(경급 4)가 3本이었다.

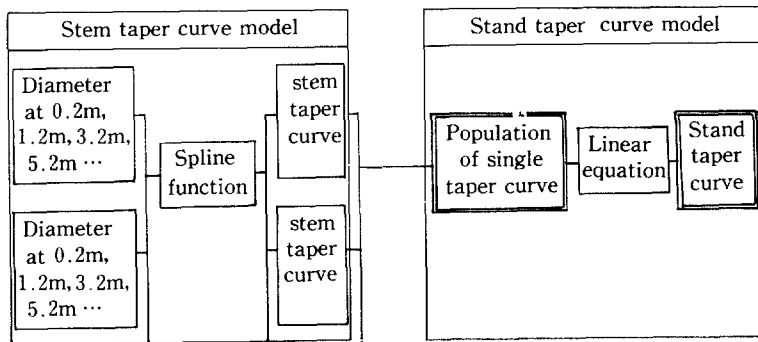


Fig. 1. Model structure for stem and stand taper curve

본 논문은 그림 1에서 보는 바와 같이 單木幹曲線 모델과 林分幹曲線 모델로 구분할 수 있다. 單木幹曲線 모델에서는 區間別로 측정된 단목의 직경으로 부터 spline함수를 이용하여 單木幹曲線을 유도하였다. 單木의 집합체로 볼 수 있는 林分の幹曲線 모델에서는 단목간곡선의 집합체로 부터 線型方程式을 이용하여 林分幹曲線式을 유도하고, 이로부터 林分の 材積式을 도출하였으며^{8,24,28,29)}, 그 구체적인 방법은 다음과 같다.

1. 單木의 幹曲線 모델(Stem taper curve model)

幹曲線은 전체적으로 보면 圓錐型에 가깝지만 가늘어지는 정도가 매우 미세하고, 부분적으로 곡선형태가 다르기 때문에 하나의 數式으로 표현하기엔 많은 어려움이 있다. 따라서 구간별로 각기 다른 式을 적용하여 幹曲線을 추정하는 방법이 지금까지 널리 이용되어 왔다. 즉, 根柱部는 Neiloid 또는 圓錐型으로, 樹幹部는 圓筒型 또는 拋物線型으로, 梢端部는 원추형의 직선으로 나타났던 것이 가장 전통적인 방법이었다. 이외에도 幹曲線式에 대한 연구가 최근 많이 수행되어 왔는데^{2,6,7,11,12,17,18)}, 이들 중 대부분은 간곡선을 하나의 式으로 나타내어 부분적으로 미세한 차이를 보이는 樹幹전체를 묘사하는 데는 미흡한 점을 내포하고 있다. 이를 극복하기 위하여 T.A. Max와 H.E. Burkhart(1976)는 區間別로 서로 다른 多項式을 이용하여 간곡선을 추정한 바 있다.¹⁵⁾ 이것으로부터 발전된 형태인 구간별로 서로 다른 係數를 갖는 하나의 式으로 간곡선을 나타내는 방법으로 spline function을 들 수 있는데, 이는 간곡선을 수식화하는데 적합한 식으로

인정되고 있다.^{14,21,25,26,27,30)} 邊 등은 수간석해 프로그램을 작성하면서 spline함수를 적용하였는데⁵⁾, 당시의 논문에서는 spline함수에 대한 설명이 미흡하여 본 논문에서는 그의 유도 및 계수추정방법을 상세히 다루고자 한다.

(1) Spline函數를 利用한 單木의 幹曲線

1) Spline函數의 定意 및 前提條件

區間推定(interval approximation)의 한 방법인 spline함수는 전체구간을 小區間(subinterval)으로 나누고, 소구간별로 서로 다른 계수를 추정하는 內插函數(interpolatory function)로서 3차 多項式(cubic polynome)으로 구성되어 있다.^{4,14,21,25,26,27,31)} Spline함수는 곡선의 한 구간은 3차 다항식이라는 가정하에 유도된다.

그림 2의 구간 $[x_i, x_{i+1}]$ 의 推定式 $S_i(x)$ 는 원점을 지나는 3차식 $S_a(x)$ 로 부터 유도될 수 있다.

$$S_a(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x \tag{1-1}$$

식(1-1)에서 원점을 $(x_i, 0)$ 으로 이동시키면 다음과 같은 $S_b(x)$ 의 식을 얻게 된다.

$$S_b(x) = a_1(x-x_i)^3 + b_1(x-x_i)^2 + c_1(x-x_i) \tag{1-2}$$

식(1-2)로 부터 원점을 다시 (x_i, R_i) 로 이동시키면 구간 $[x_i, x_{i+1}]$ 의 추정식 $S_i(x)$ 가 유도된다.

$$S_i(x) = a_1(x-x_i)^3 + b_1(x-x_i)^2 + c_1(x-x_i) + R_i \tag{1-3}$$

$i=1, \dots, n-1$

이와 같이 유도되는 Spline함수는 다음과 같은 전체조건하에서 성립한다.^{4,15,25)}

- ① 함수 $S_i(x)$ 는 각 구간 $[x_i, x_{i+1}]$, $i=1, \dots, n-1$ 에서 3차 다항식(cubic polynome)이다.
- ② $S(x_i) = f(x_i)$, $(f(x_i))$: 높이 x_i 에서의 半徑

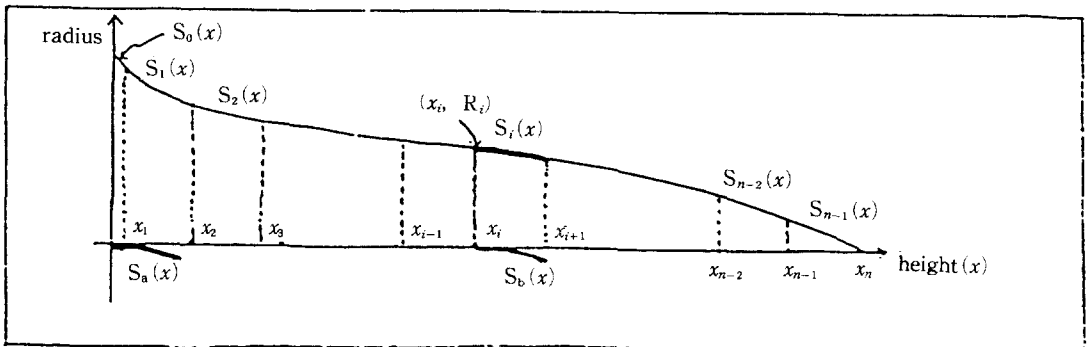


Fig. 2. Principle of Spline function

(測定值) : 각 점 x_i 의 推定值 $S(x_i)$ 는 그 점의 測定治 $f(x_i)$ 를 지난다.

③ $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}), i=1, \dots, n-2$: 각 점 x_i 의 추정치는 양쪽 구간에서 같다.

$$S_{i+1}'(x_{i+1}) = S_i'(x_{i+1})$$

$$S_{i+1}''(x_{i+1}) = S_i''(x_{i+1})$$

④ $S''(x_1) = S''(x_n) = 0$

만약 조건④가 성립하면 이를 natural cubic spline function이라고 한다. ^{4,15,25)}

2) 平滑度(smoothing factor)와 加重值(weight) 調節을 통한 最適曲線 推定^{8,19,21)}

Spline함수는 각 측정점을 지나는 3次 區間推定式인데, 경우에 따라서는 측정점의 측정오차, 혹은 測定點間의 지나친 直徑차이로 인하여 오차를 유발할 수도 있다. 이러한 오차는 平滑度(smoothing factor)를 이용하여 각 측정점으로부터 推定點을 다양하게 이동시키면서 줄일 수 있다.

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{R_i - r_i}{W_i} \right) < F^{8,19,21)}$$

r_i : 측정점 x_i 에서의 測定值(半徑)

R_i : 측정점 x_i 에서의 推定值(半徑)

W_i : 加重值

F : 허용오차(e)의 제곱합

$$\left(\sum_{i=1}^n e^2 = e^2 \cdot n < \left(\frac{L_1 - r_1}{W_1} \right)^2 \right)$$

(L_1 : 간곡선을 선형으로 가정하였을 때의 추정값)

여기에서 허용오차(e)를 平滑度(smoothing factor)라고 하며, 平滑度 조절에 따른 측정선을 나타낸 것이 그림 3이다. 이와 같이 平滑度 조절을 통해서 측정시 유발될 수 있는 측정오차를 줄일 수 있게 된다. ^{8,21)}

平滑度の 式을 보면 같은 F라 할지라도 W_i 에 따라서 추정값 R_i 가 다르게 계산된다. 즉, W_i 가 클수록 추정값 R_i 가 측정값 r_i 로 부터 멀어질 수 있는 범위가 큰 것이다. 즉, 平滑도는 曲線 전체를 완만하게 하여 오차를 줄이는 반면 가중치는 각 측정점마다 그 정도를 달리함으로써 추정값이 측정치로부터 벗어나는 범위를 樹幹의 部位別로 다르게 줄 수 있다.

그림 4는 平滑도를 0.5로 하고 0.2m 부위와 1.2m 부위의 가중치를 각각 0.5로 주어 유도한

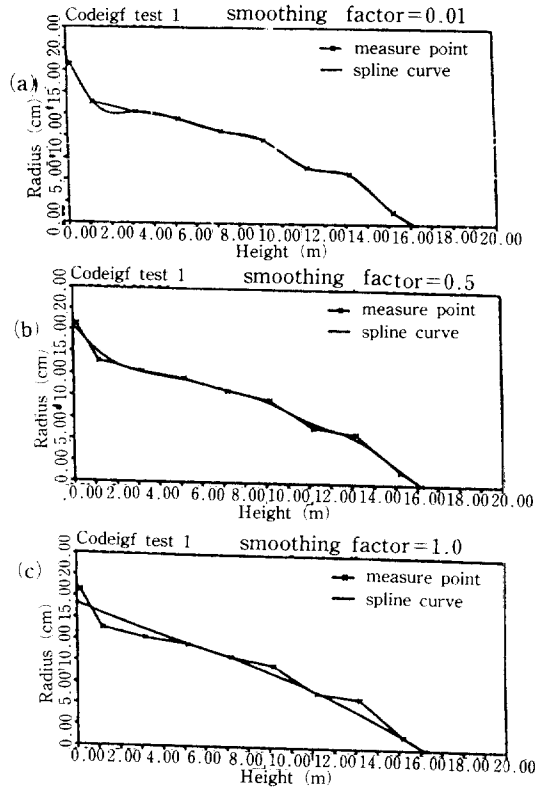


Fig. 3. Smoothed curve used spline function (a) smoothing factor=0.01 (b) smoothing factor=0.5 (c) smoothing factor=1.0

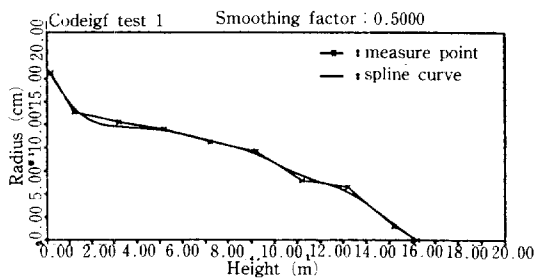


Fig. 4. Smoothed curve with smoothing factor=0.5

Weight(1)=0.5, Weight(2)=0.5, Weight(i)=1.0, i=3, ..., n-1

幹曲線을 보여준다(그림 3(b) 참고).

3) Spline函數의 係數推定

Spline함수의 係數는 函數式의 1차 및 2차 도함수와 전제조건에서 유도되는 行列式으로 부터 추정되는데^{1,4,19,30)}, 최근에는 이를 지원하

Algorithm 및 통계프로그램들이 개발·보급되어 비교적 용이하게 계수를 추정할 수 있게 해주고 있다.

J.H. Ahlberg 등은 spline함수의 이론과 그것의 응용에 대해 상세한 설명을 하였고¹⁾, R.L. Burden은 spline함수의 이론적 설명과 함께 係數推定의 과정 그리고 Algorithm을 발표한 바 있다⁴⁾. 또한 H. Späth는 각종 spline함수의 Algorithm과 함께 Fortran 프로그램을 작성하였고³⁰⁾, C.H. Reisch는 平滑度와 加重值가 첨가된 spline함수의 풀이과정과 그의 Pascal program을 소개하였다¹⁹⁾. 이들을 이용하면 spline함수 program을 직접 작성하여 계수를 추정할 수 있다. 통계프로그램으로 널리 보급되어 있는 SAS(Statistical Analysis System)도 spline함수의 추정을 지원하며, SAS/IML Software의 Spline 호출명령(CALL Spline)을 이용하면 spline함수를 이용한 區間推定을 할 수 있다²³⁾. Fortran언어의 통계지원 프로그램인 IMSL에서도 spline함수를 이용한 구간추정이 가능한데, 본 연구에서는 이를 이용하여 spline함수의 係數를 추정하였다¹⁰⁾.

Spline함수의 계수 및 추정 y 값 R_1 는 IMSL Routine중에서 "Cubic spline data smoother"를 위한 ICSSCU 副프로그램(Subroutine program)을 이용해 계산할 수 있으며 主프로그램(main program)에서 다음의 호출명령을 이용하면 된다¹⁰⁾.

CALL ICSSCU(x, f, df, n, S_m, y, C, ic, wk, ier)

괄호안은 부프로그램과 연결되는 계수들을 나타내며, 자세한 내용은 다음과 같다.

· 부프로그램으로 입력되는 인수(Argument)

-x_i, i=1, ..., n: 실수, x축의 측정점(측정높이: 0.2, 1.2, 3.2m...) (단, x_i < x_{i+1})

-f_i, i=1, ..., n: 실수, 측정점 x_i에서의 측정값 (測定半徑: r_i)

-df_i, i=1, ..., n: 실수, 측정점 x_i의 가중치

-n: 정수, 측정점의 수

-S_m: 실수, 허용오차의 제공함

(허용오차의 범위를 e라 할 때, e² · n값)

-ic: 정수, spline계수 行列의 行의 수, (n-1)

-wk(7(n+2)): 실수, 계산에 필요한 작업영역 길이=7(n+2)

· 부프로그램으로 부터 출력되는 인수(Argu-

ment)

-y_i, i=1, ..., n: 실수, 측정점 x_i에서의 추정값 (推定半徑: R_i)

-C_{1, j}, i=1, ..., ic, j=1, 2, 3: 실수, ic행과 3열의 spline계수

-ier: 정수, error parameter

ier=129: ic가 n-1 보다 작을 경우

ier=130: n이 2보다 작을 경우

ier=131: x_i > x_{i+1} (i=1, n-1)일 경우

이상으로 부터 spline 추정식

$$S(x) = C_{1,3}(x-x_i)^3 + C_{1,2}(x-x_i)^2 + C_{1,1}(x-x_i) + y_i$$

이 얻어진다.

4) 根柱部の 曲線推定

地面으로 부터 20cm까지의 根柱部는 별채시 그루터기로 남아있게 되어 利用面에서는 큰 의미가 없지만 單木의 완전한 幹曲線 推定을 위해서는 계산해야 할 필요성이 있다. 이 부분은 지면의 측정치가 없기 때문에 첫번째 구간인 0.2m부분의 추정치로 부터 유도해야 한다⁸⁾(그림 2 참고).

根柱部를 직선으로 간주하여 그 式을

$$S_0(x) = ax + \beta, \quad x \in [0, x_1] \quad (1-4)$$

이라 하면 조건 ③으로 부터

$$S_0(x_1) = S_1(x_1) \rightarrow ax_1 + \beta = S_1(x_1) = R_1 \quad (1-5)$$

$$S_0'(x_1) = S_1'(x_1) \rightarrow a = C_1 \quad (1-6)$$

이 된다. 위의 식(1-5), (1-6)를 식(1-4)에 代入하면

$$S_0(x) = C_1x + (R_1 - C_1x_1) \quad (1-7)$$

의 根柱部 式을 유도할 수 있다.

이와 같이 spline함수를 이용하면 地面으로 부터 樹高까지 單木의 幹曲線이 구간별로 다른 계수를 갖는 數學式으로 표현된다.

(2) Spline函數를 통한 材積推定

Spline함수는 구간별로 그 係數가 다르므로 구간별로 材積 추정이 가능하며 이 구간을 합하면 전체재적을 구할 수 있다. 구간 [x_i, x_{i+1}]에서의 재적 V_i는 spline함수식 S_i(x)의 회전체 적분을 통해 다음의 식으로 구해지며

$$V_i = \pi \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} x^2 \cdot S_i^2(x) dx, \quad i=0, \dots, n-1 \quad (1-8)$$

전체 재적 V는 區間材積의 總으로 구할 수 있다^{5,9,15,16,31}.

$$V = \sum_{i=0}^n V_i \quad (1-9)$$

2. 林分 및 地域幹曲線모델(Stand and regional taper curve model)

林分은 그 林分內에 生育하고 있는 單木의 集合體로 볼 수 있으며, 개개목의 生長을 기초로 하여 林分의 生長을 파악할 수 있다²⁹⁾. 즉, 한 임분 또는 한 지역의 단목 간곡선 집합으로 부터 해당 임분 및 지역의 幹曲線을 線型모델로서 유도할 수 있다^{8,29)}(그림 1 참고).

(1) 林分幹曲線 誘導

1) 理論的 根據 및 前提條件

林分幹曲線은 單木幹曲線의 集합으로 부터 유도할 수 있는데, 이를 위해서는 간곡선의 형태를 비교해야 한다. 그런데 樹高를 x 축으로 한 絕對幹曲線(absolute taper curve)은 그림 5의 (a)에서 보는 바와 같이 樹高가 각기 다르므로 그 형태를 비교하기에 적합하지 않다⁸⁾. 따라서 그림 5의 (b)와 같이 수고를 相對化(수고=1)하여 相對幹曲線(relative taper curve)을 유도하면 각 상대높이마다 형태를 비교할 수 있게 된다.^{24,26,29)}

$$x = \frac{X}{h}, \quad X \in [0, h], \quad h: \text{수고}$$

Sloboda에 따르면 이와 같은 相對幹曲線은 다음과 같은 특징을 갖는다.²⁹⁾

- ① 간곡선은 시간의 변화에 따라 비슷한 형태를 유지한다(Aqui-form, Affinität).
- ② 胸高直徑이 큰 나무는 흉고직경이 작은 나무에 비해 각 상대높이에서의 直徑도 크다(Erhaltungsprinzip).

이와 같은 특징으로 부터 일정 상대높이(x)에서의 직경($y_j(x)$)을 흉고직경(d_{12j})의 線型關係로 나타낼 수 있다. 예를들어 그림 5의 (b)에서 $y_j(x)$ 와 d_{12j} 의 1차 선형關係를 graph로 나타낸 것이 그림 7의 7번이다.

$$y_j(x) = f(x; d_{12j}) = \alpha d_{12j} + \beta, \quad x \in [0, 1] \quad (2-1)$$

j = 나무번호, $j=1, n$

$y_j(x)$ = j 번째 나무의 높이 x 에서의 직경

d_{12j} = j 번째 나무의 흉고직경

α, β = 회귀계수(기울기, 절대값)

그런데 기울기(α)와 절대값(β)은 그 위치(x)에 따라 각기 다른 값을 갖게 되므로 이를 x 의 함수로 볼 수 있다. 따라서 식(2-1)의 α 와 β 를

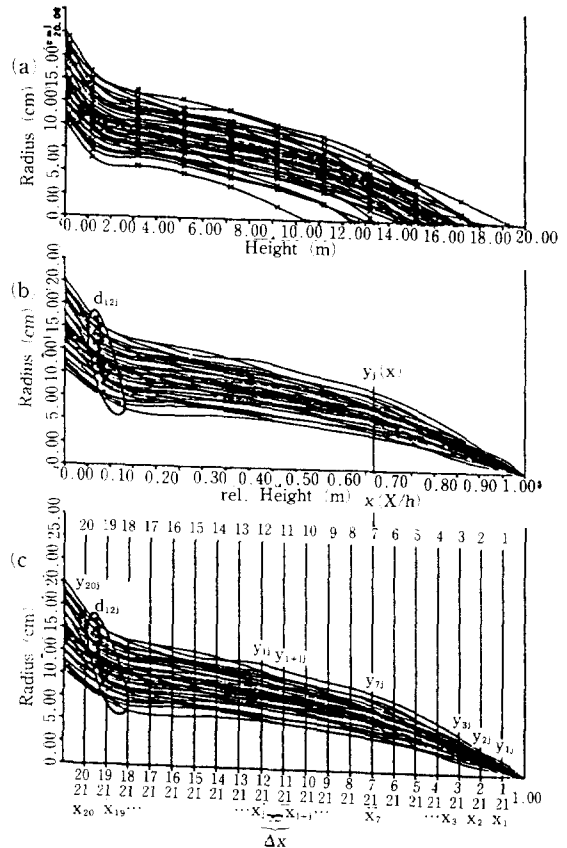


Fig. 5. Population of single taper curve in a stand (a) absolute taper curve (b), (c) relative taper curve

x 의 함수로 나타내면 幹曲線의 集합체인 林分幹曲線이 유도된다.

$$y_j(x) = f(x; d_{12j}) = \alpha(x) \cdot d_{12j} + \beta(x), \quad x \in [0, 1] \quad (2-2)$$

이를 絕對樹高로 나타내면 $x = \frac{X}{h}$ 이므로,

$$y_j(X/h) = f(X/h; d_{12j}) = \alpha(X/h) \cdot d_{12j} + \beta(X/h); \quad X \in [0, h] \quad (2-3)$$

이 된다. 이상의 과정을 거쳐 全 林分 또는 地域을 대표할 수 있는 하나의 幹曲線이 구해지게 된다.

2) 係數 α, β 의 推定

기울기 $\alpha(x_i)$ 와 절대값 $\beta(x_i)$ 를 구하기 위해 첫단계로 相對化된 幹曲線 集합의 x 축(樹高軸)을 그림 5의 (c)와 같이 21等分하고 이를 x_i 라 한다.

$$x_i = \frac{i}{21}, \quad i=1, \dots, 20 \text{ 註1)} \quad (2-4)$$

다음으로 각 점 x_i 마다 직경을 구하고 이를 y_{ij} (x_i 높이에서 j 번째 나무의 직경)라 하면 각 상대 높이에서의 직경(y_{ij})를 흉고직경(d_{12j})의 선형관계로 나타낼 수 있으며 1차 회귀로 계수 $\alpha(x_i)$, $\beta(x_i)$ 를 구할 수 있다. 즉 식(2-2)의 x 에 각 상대높이($i/21$, $i=1, 20$)를 대응시키면

$y_j(i/21) = f(i/21; d_{12j}) = \alpha(i/21) \cdot d_{12j} + \beta(i/21) + \epsilon_j'$ 의 식으로 각 상대높이($x_i=i/21$)마다 기울기 $\alpha(i/21)$, 절대값 $\beta(i/21)$ 가 구해진다. 이 α 와 β 값을 일반화시키기 위해서는 상대높이($x_i=i/21$)의 함수로 나타내야 하는데 본 연구에서는 α 와 β 를 상대높이와의 관계로서 원점을 지나는 6차 식으로 나타내었다.⁸⁾

$$\alpha(x, \vec{a}) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 \quad (2-6)$$

$$\beta(x, \vec{b}) = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_6 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_6 \end{bmatrix}, \quad x \in [0, 1],$$

이와 같이 상대높이의 함수로 표현된 α 와 β 를 식(2-5)에 대입하면

$$y_j(x) = f(x; d_{12j}) = \alpha(x, \vec{a}) \cdot d_{12j} + \beta(x, \vec{b}) \quad x \in [0, 1]$$

이 되고 이를 絕對樹高로 나타내면 $x=X/h$ 이므로

$$y_j(X/h) = f(X/h; d_{12j}) = \alpha(X/h, \vec{a}) \cdot d_{12j} + \beta(X/h, \vec{b}), \quad X \in [0, h] \quad (2-8)$$

와 같이 된다.

(2) 林分幹曲線과 材積

林分幹曲線이 數式으로 표현되면 材積은 회전체積分式을 이용하여 구할 수 있다.^{8,29)} 즉 식(2-8)에서 $y(X/h)$ 는 직경이므로 재적계산을 위해 半徑을 구하여 m 단위로 전환하면 $y(X/h)/200$ 이 된다. 따라서 材積은

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{y(X/h)}{200} \right)^2 dX = \frac{\pi}{40000} \cdot \int_0^h y^2 \left(\frac{X}{h} \right) dX \quad (2-9)$$

로서 구할 수 있다.

그런데 林分幹曲線의 係數 α , β 는 상대높이에 대한 값이므로 식(2-9)는 다음과 같이 相對化된 式으로 바꾸어야 한다.

$$V = \frac{\pi}{40000} \cdot h \int_0^1 y^2(x) dx \quad (2-10)$$

식(2-7)을 식(2-10)에 대입하면

$$V = \frac{\pi}{40000} h (d_{12}^2 \cdot \int_0^1 \alpha^2(x, \vec{a}) dx + d_{12} \cdot 2 \cdot \int_0^1 \alpha(x, \vec{a}) \cdot \beta(x, \vec{b}) dx + \int_0^1 \beta^2(x, \vec{b}) dx)$$

와 같이 된다. 여기서

$$F_1 = \int_0^1 \alpha^2(x, \vec{a}) dx / 10000$$

$$F_2 = 2 \cdot \int_0^1 \alpha(x, \vec{a}) \cdot \beta(x, \vec{b}) dx / 10000$$

$$F_3 = \int_0^1 \beta^2(x, \vec{b}) dx / 10000$$

로 놓으면, 다음과 같은 材積式을 얻게 된다.^{3,8,20,29)}

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot F_1 \cdot d_{12}^2 \cdot h + \frac{\pi}{4} \cdot F_2 \cdot d_{12} \cdot h + \frac{\pi}{4} \cdot F_3 \cdot h \quad (2-11)$$

(단, h =수고(m), d_{12} =흉고직경(cm))

임분간곡선은 그 부위별로 직경계산이 가능하기 때문에 직경크기에 따른 用度別 材積을 구할 수 있다. 예를 들어 지상 20cm부터 6cm 직경까지의 이용재적은 다음과 같이 추정된다.

$$V_d = \frac{\pi}{40000} \cdot \int_{h_0}^{h_1} y^2 \left(\frac{X}{h} \right) \cdot dX$$

h : 樹高

h_0 : 樹高로 부터 직경 6cm까지의 길이

이를 相對化하면

$$V_d = \frac{\pi}{40000} h \int_{h_1}^{h_2} y^2(x) dx$$

$$\left(h_1 = \frac{h-0.2}{h}, \quad h_2 = \frac{h_0}{h} \right)$$

로 나타낼 수 있으며 최종적으로 다음과 같은 利用材積式을 얻을 수 있다.

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot F_1 \cdot d_{12}^2 \cdot h + \frac{\pi}{4} \cdot F_2 \cdot d_{12} \cdot h + \frac{\pi}{4} \cdot F_3 \cdot d_{12}^2 \cdot h \quad (2-12)$$

$$F_1 = \int_{h_1}^{h_2} \alpha^2(x, \vec{a}) dx / 10000$$

$$F_2 = \int_{h_1}^{h_2} \alpha(x, \vec{a}) \cdot \beta(x, \vec{b}) dx / 10000$$

$$F_3 = \int_{h_1}^{h_2} \beta^2(x, \vec{b}) dx / 10000$$

註1) 계산의 편의를 위해 相對幹曲線 집합의 끝부분부터 상대높이 x_i 를 시작한다. 즉 樹高끝으로부터 첫번째 等分된 부분을 x_1 , 둘째를 x_2 ...로 하여 地面部와 가장 가까운 부분을 x_{20} 으로 한다(그림 5 참조).

結 果

1. Spline函數의 單木幹曲線

區間別로 측정된 직경으로 부터 Spline함수를 이용해 개개목의 幹曲線을 추정하여 이를 간곡선 집합으로 나타낸 것이 그림 5이다.

그림 5의 (b), (c)에서 보는 바와 같이 Spline 幹曲線은 部位別 직경측정을 가능하게 하여 수간을 높이별로 분석할 수 있게 하며, 이로 부터 林分幹曲線을 유도할 수 있게 된다.

또한 Spline함수에 의해 추정된 材積은 Smalian式 재적과 Huber式 재적의 중앙값으로 계산된다.

그림 6은 Spline 재적에 대한 Huber 式과 Smalian式의 誤差率을 나타내는데 그림에서 보는 바와 같이 Huber式 재적은-오차를, Smalian式은 +오차를 나타낸다. 이는 樹幹材積 추정에 있어 Huber式은 과소치를, Smalian式은 과대치를 낸다는 기존의 이론적 사실과 일치함을 보여주는 것이다.^{5,13)}

2. 林分幹曲線의 誘導

그림 5의 單木幹曲線 집합체로 부터 부위별 직경과 흉고직경과의 線型關係를 이용하여 林分幹曲線을 유도하였다. 즉 그림 5의 (c)와 같이 상

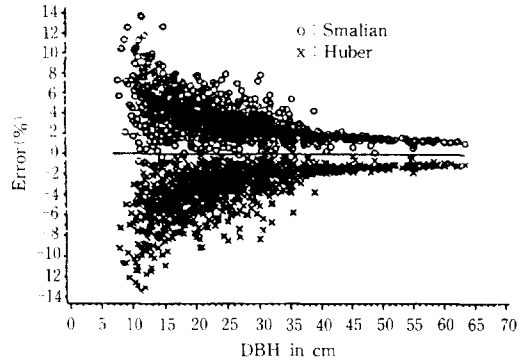


Fig. 6. Error percent in Volume Calculation (Error percent = (huber volume - spline volume) / spline volume) × 100

대간곡선 집합을 21등분하고 각 부위의 각 부위의 직경을 單木幹曲線式(Spline함수식)으로 부터 추정된 후 胸高直徑과의 關係를 1차 선형회귀로 분석하였다.

그림 7은 각 부위별 직경과 흉고직경과의 關係를 나타낸 것인데, 그림에서 各線의 번호는 樹高 끝으로 부터의 상대높이 순서를 나타낸다. 즉 번호 7은 상대높이 x_7 에서의 직경(y_{7j})과 흉고직경(d_{12j})과의 선형關係를 보여 주는 것이다.

표 1은 部位別 선형關係의 회귀계수와 유의수준 및 결정계수를 나타낸다.

그림 7과 표 1에서 보는 바와 같이 각 부위별

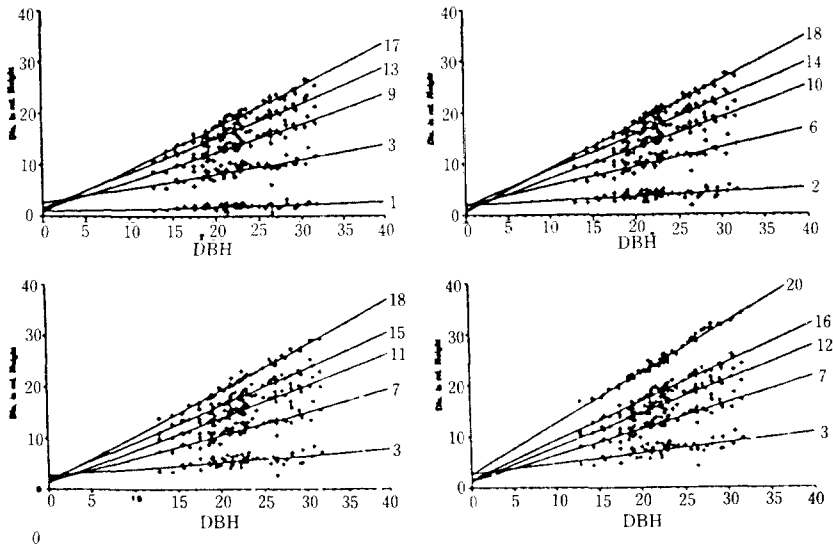


Fig. 7. Linear Regression between DBH and Diameter in relative height

Table 1. Regression analysis and Coefficients of α , β

i	x	$\alpha(x)$	Prob> T	$\beta(x)$	Prob> T	R-sq.
1	1/21	.042719	0.0054	.989808	0.0057	.358781
2	2/21	.080737	0.0005	2.015906	0.0013	.413232
3	3/21	.129753	0.0002	2.731539	0.0001	.501880
4	4/21	.198697	0.0003	2.922440	0.0001	.632955
5	5/21	.282391	0.0007	2.657759	0.0001	.763055
6	6/21	.369146	0.0035	2.154262	0.0001	.849609
7	7/21	.448557	0.0182	1.638465	0.0001	.898798
8	8/21	.514308	0.0476	1.274086	0.0001	.929356
9	9/21	.563708	0.0582	1.155505	0.0001	.945532
10	10/21	.601189	0.0473	1.208594	0.0001	.951871
11	11/21	.633934	0.0382	1.290311	0.0001	.954769
12	12/21	.662768	0.0306	1.378862	0.0001	.956589
13	13/21	.681789	0.0138	1.607769	0.0001	.957442
14	14/21	.694303	0.0035	1.951441	0.0001	.957945
15	15/21	.716947	0.0017	2.085353	0.0001	.961129
16	16/21	.763150	0.0078	1.673479	0.0001	.968315
17	17/21	.821204	0.0887	.881366	0.0001	.980351
18	18/21	.857589	0.0701	.666157	0.0001	.990791
19	19/21	.892164	0.0001	1.465900	0.0001	.992040
20	20/21	.989841	0.0001	2.771608	0.0001	.988727

직경은 흉고직경과 강한 선형관계를 갖고 있음을 알 수 있다. 이는 적은 量의 자료를 갖고도 林分幹曲線을 精度높게 추정할 수 있음을 시사해 준다고 볼 수 있다.

부위별 회귀직선의 기울기($\alpha(x)$)와 절대값($\beta(x)$)을 각 部位값(x)과 절대치 없는 6次 回歸分析을 하여 최종적으로 \vec{a} 와 \vec{b} 를 구하였다.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} .46032 \\ 3.21712 \\ 6.71951 \\ -40.99825 \\ 52.29594 \\ -20.67556 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 22.22699 \\ 62.31377 \\ -936.90350 \\ 2652.17300 \\ -2936.47600 \\ 1147.10300 \end{bmatrix}$$

그림 8은 기울기(α)와 절대치(β)의 상대높이(x)에 대한 推定回歸線을 나타내는데, 양쪽 식 모두가 0.99의 결정계수를 갖고 유의수준 0.0001에서 적합함을 보여 주었다.

이상의 과정을 거쳐 식(2-7)의 幹曲線式의 모든 係數가 추정되어 임분간곡선이 다음과 같이 유도되었다.

$$y = \alpha(x, \vec{a})d_{12} + \beta(x, \vec{b})$$

$$\alpha(x, \vec{a}) = \vec{X} \vec{a}, \quad \beta(x, \vec{b}) = \vec{X} \vec{b}$$

여기서, $x \in [0, 1], \vec{X} = [x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6]$

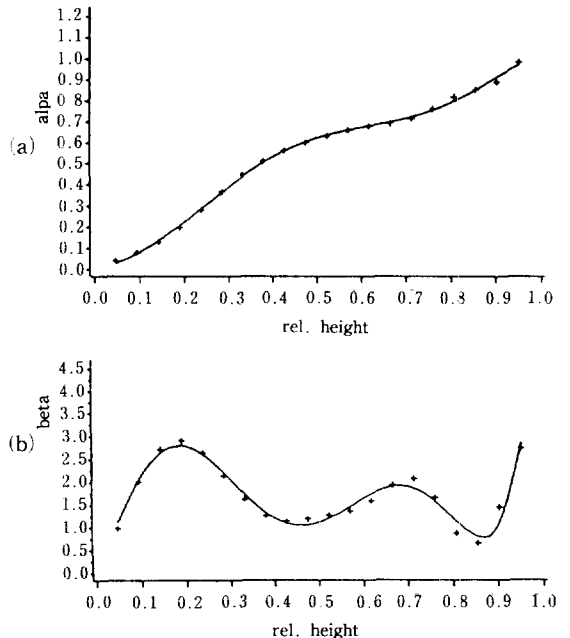


Fig. 8. 6 grade multiregression for estimating α , β

이를 흉고직경별로 나타낸 것이 그림 9인데, 이는 林分幹曲線이 흉고직경에 따라 어떠한 형태로 발달하는가를 잘 보여준다. 그림 9의 (b)에서 직선은 0.2m 높이와 직경 6cm 부위의 높이를

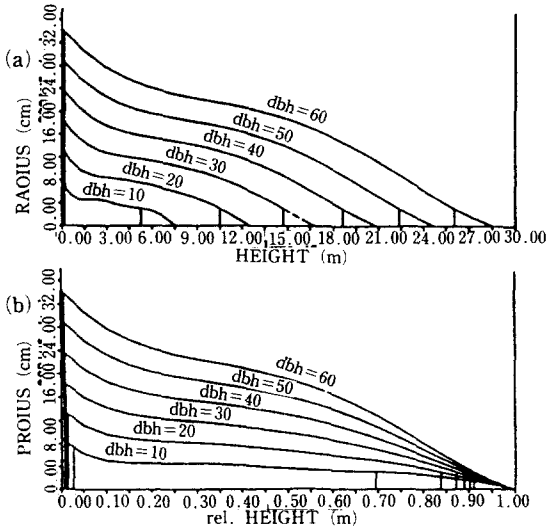


Fig. 9. Stand taper curve by DBH and height
(a) absolute curve (b) relative curve

나타내는데, 이미 밝힌 바와 같이 林分幹曲線은 높이별 직경, 혹은 직경별 높이의 추정을 가능하게 하므로 樹幹을 그 용도에 따라 다양하게 분석할 수 있다.

이상의 林分幹曲線으로 부터 식(2-11)의 材積式을 구하면

$$V_s = \frac{\pi}{4} (F_1 \cdot d_{12}^2 \cdot h + F_2 \cdot d_{12}^2 \cdot h + F_3 \cdot h) \text{에서}$$

$$F_1 = 0.38138/10000, F_2 = 2.00045/10000$$

$$F_3 = 4.14693/10000$$

이 되고, 최종적으로 다음의 재적식을 얻게 된다.

$$V_s = 0.0000299533 \cdot d_{12}^2 \cdot h + 0.0001571147 \cdot d_{12} \cdot h + 0.0003256987 \cdot h$$

((단, h = 수고(m), d_{12} = 흉고직경(cm))

같은 방법으로 직경 40cm일 때의 利用材積을 구하면

$$V_d = 0.0000291578 \cdot d_{12}^2 \cdot h + 0.0001455894 \cdot d_{12} \cdot h + 0.0002739538 \cdot h$$

이 된다. 여기서 주목할 만한 점은 利用材積式의 係數는 직경과 수고별로 다양하게 추정된다는 것이다.

考 察

본 연구에서는 Spline함수를 이용한 單木幹曲

線의 추정방법과 단목간곡선의 집합으로 부터 線型關係式을 이용한 林分幹曲線을 추정하는 방법을 알아 보았다.

Spline함수에 의한 幹曲線 推定은 전체의 간곡선을 數式으로 표현했다는 데 그 의미가 있다. 즉 Spline함수는 區間別로 서로 상이한 係數를 갖는 하나의 式으로 幹曲線을 추정하는 것인데, 이는 미세한 변화를 보이는 간곡선의 형태를 비교적 정확하게 묘사해 준다. 간곡선이 하나의 數式으로 정확히 묘사됨에 따라 이것의 回轉體積分으로 추정된 材積은 Huber식·Smalian식의 추정재적값에 비해 정확하였다. 간곡선 數式化의 또다른 의미는 각 높이에서의 직경을 또는 각 직경에서의 높이를 함수식으로부터 추정할 수 있다는 데 있다. 이로 부터 樹幹을 용도에 맞게, 즉 利用別, 等級別로 다양하게 분석할 수 있으며, 林分 또는 地域 幹曲線을 도출할 수 있게 된다.

林分幹曲線은 그 임분의 單木幹曲線 집합체로 부터 상대높이별 직경을 구하고, 이 직경과 흉고 직경간의 선형관계를 이용하여 추정된다. 이와 같이 유도된 임분간곡선은 시간의 경과에 따라 형태의 변화가 거의 없음이 밝혀진 바 있으며²⁹⁾, 그 式은 胸高直徑과 樹高를 變數로 하는 간단한 線型關係式으로서 임분의 발달과정을 樹齡과는 무관하게 흉고직경과 수고의 변화에 따라 動的으로 분석할 수 있게 한다. 즉 한 林分の 평균 흉고직경과 수고를 알면 이의 函數式인 林分幹曲線式을 이용해 林分 平均木을 部位別로 분석할 수 있으며, 이는 林分材積 및 收穫모델을 이용별·등급별로 다양하게 유도할 수 있게 하여 임분의 성장 분석에 다양성을 부여한다.

이외에도 林分幹曲線의 數式化에 의해 林分間·地域間 幹曲線의 형태를 비교할 수 있으며, 나아가 환경변화나 임분 관리형태에 따른 임분생장의 변화 및 임분발달과정을 분석할 수 있게 된다.

이상의 특징으로 부터 單木 및 林分幹曲線式은 단목 및 임분의 성장분석, 임분간·지역간 성장 비교, 임분 또는 지역별 성장모델, 임분 또는 지역별 수확모델^{3,20)}, 이용별·등급별 재적 추정(등급별 재적표), 임분 및 지역 산림의 관리모델, 환경변화나 관리방법에 따른 임분의 성장 및 구조 연구 등의 분야에 응용될 수 있다.

參考文獻

1. Ahlberg, J.h., Nilson, E.N., Walsh, J.L. 1967. The Theory of Splines and Their Applications. Academic Press.
2. Biging, G.S. 1984. Taper Equations for Second-Growth Mixed Conifers of Northern California. Forest Sci. Vol.30. No.4 : 1103-1117.
3. Böckmann, T. 1990. Wachstum und Ertrag der Winterlinde in Niedersachsen und Nordrhein. Dissertation der Universität Göttingen.
4. Burden, R.L. Numerical analysis. third -ed. : 117-129.
5. Byun, W.H., Lee, W.K., Yun, K.B. 1990. A Development of Stem Analysis Program and its Comparison with other Method for Increment Calculation. Journal of Korean Forestry Society. Vol.79(1) : 1-15.
6. Demaerschik, J.P., Kozak, A. 1977. The whole-bole system : a conditioned dual -equation system for precise prediction of tree profiles. Can. J. For. Res. Vol.7 : 488-497.
7. Gadow, V.K. 1986. On the use of growth and decay functions for modelling stem profiles.
8. Gaffrey, D. 1989. Forstamts-bestandesindividuelles Sortimentierungsprogramm als Mittel zur Planung, Aushaltung und Simulation. Diplomarbeit der Forstwissenschaftlichen Fakultät der Georg-August-Univ. zu Göttingen.
9. Hradetzky, J. 1981. Spline-Funktionen und ihre Anwendung in der forstlichen Forschung. Forstw. Cbl. 100 : 45-95.
10. IMSL. Inc. 1982. Interpolation, Approximation, Smoothing IMSL Vol 2 : I-1.
11. Kozak, A., Smith, J.H.G. 1966. Critical analysis of multivariate techniques for estimating tree taper suggests that simpler methods are best. Forestry Chronicle 42 : 458-463.
12. Kozak, A., Munro, D.D., Smith, J.H.G. 1969. Taper Functions and their Application in Forest Inventory. For. Chron. 45 : 278-283.
13. Kramer, H., Akca, A. 1987. Leitfaden für Dendrometrie und Bestandesinventur. J.D. Sauerländer's Verlag : 53-55.
14. Liu, C.J. 1980. Log volume estimation with spline approximation. Forest Sci. Vol.26. No.3 : 361-369.
15. Max, T.A., Burkhart, H.E. 1976. Segmented polynomial regression applied taper equations. Forest Sci., Vol.22, No.3 : 283-289.
16. Nagel, J., Athari, S. 1982. Stammanalyse und ihre Durchführung. Allg. Forstu. J-Ztg. 153, Jg. 9/10 : 179-182.
17. Ormerod, D.W. 1973. A simple bole model. For. Chron. 49 : 136-138.
18. Prodan, M. 1965. Holzmesslehre. J.D. Sauerländer's Verlag : 52-64.
19. Reinsch, C.H. 1967. Smoothing by Spline Functions. Numerische Mathematik 10 : 177-183.
20. Röss, M. 1990. Zum Wachstum der Vogelkirsche(Prunus avium L.) in Nordrhein-Westfalen und angrenzenden Gebieten. Dissertation der Univ. Göttingen.
21. Saborowski, J., Sloboda, B., Junge, A. 1981. Darstellung von Schaftformen durch Kubische Spline-Interpolation und Reduktion der Stützstellenanzahl. Forest Archiv 4 : 127-130.
22. Saborowski, J. 1984. Sortierungsprogramm auf der Basis des Bestandes-schaftformmodells und Genauigkeitsuntersuchungen bei der Sortierung und Monetarisierung. Tagungsbericht bei der Tagung Sektion Ertragskunde des Deutschen Verbades Forstl. Versuchsanstalten in Neustadt. : 6/1-6/6.
23. SAS Institute Inc. 1990. SAS/IML Software Version 6.0.

24. Sloboda, B. 1977. Die Beschreibung der Dynamik der Schaftformfortpflanzung mit Hilfe der Ähnlichkeitsdifferentialgleichung und der Affinität. Mitt. der Forstl. Bundesversuchsanstalt Wien 120 : 53-60.
25. Sloboda, B. 1977. Spline und Bitterlich'sche Interpolation bei der Wiedergabe der Baumschaftform. Mitt. der Forstl. Bundesversuchsanstalt Wien 120 : 61-70.
26. Sloboda, B., Saborowski, J. 1981. Stand Taper Form as a Stochastic Process with an Example of Application. Proceedings IUFRO Congress Kyoto. : 137-150.
27. Sloboda, B., Saborowski, J. 1981. Einige neuere empirische und biometrische Aspekte der Produktionsprognose des Schaftholzes. Schriften aus der Forstl. Fak. der Uni. Göttingen und Niedersachs. Forstl. Versuchsanstalt. Bd. 69 : 107-125.
28. Sloboda, B. 1983. Möglichkeiten der mathematischen Vorhersage der Holzproduktion in Wirtschaftswald. Forstarchiv. 54. Jahrgang. Nr. 4. : 134-142.
29. Sloboda, B. 1984. Bestandesindividuelles biometrisches Schaftformmodell zur Darstellung und zum Vergleich von Formigkeit und Sortimentenausbeute sowie Inventur. Tagungsbericht bei der Tagung Sektion Ertragskunde des Deutschen Verbades Forstl. Versuchsanstalten in Neustadt. : 4/1-4/35.
30. Späth, H. 1973. Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen. Verfahren der Datenverarbeitung. R. Oldenbourg Verlag.
31. Tietz, B. 1979. Die Konstruktion von Schaftformkurvenfunktionen mittels lokalangepaßter Spline-Funktionen. Beiträge f.d. Forstwirtschaft. Heft 4 : 30-33.