

## 流量函數 非線形 波浪理論의 數值模型 比較 Comparison of Numerical Models for Nonlinear Stream Function Wave Theory

徐 承 男\*  
Seung Nam Seo\*

**要 旨**: 유량함수 비선형 파랑이론에 입각한 수치모형들의 공학응용성에 대한 판단의 기준을 정하기 위해 수정된 Dean 표(Chaplin, 1980)의 입력세원을 사용하여 collocation 모형과 최소자승법 모형의 결과를 직접 비교하였다. 파장이 긴 천해파와 쇄파에 가까운 파랑을 제외한 모든 경우에 두 모형은 정밀하고 거의 동일한 결과를 보였다. 전반적인 비교를 통해 최소자승법 모형이 공학응용에 적합한 것으로 판단된다.

**Abstract**: In order to give a useful guide for engineering applications on numerical models based on nonlinear stream function wave theory, collocation method and least squares method are directly compared input parameters of the revised Dean's Table (Chaplin, 1980). Two models give both accurate and almost same results for all the cases except very long or nearly breaking waves. Overall comparison seems to favor the least squares method for general use.

### 1. 서 론

유량함수를 사용한 비선형 파랑이론은 선형파랑의 확장에 근거를 두어 이론의 저변이 확고하며 공학이 용에 정밀할 뿐 아니라 고립파를 제외한 전 해역의 파랑의 특성을 계산할 수 있는 장점이 있다. 이런 장점은 구성된 근사해가 주어진 경계치 문제를 대부분 만족하여 하나 또는 두개의 경계조건을 사용하여 근사해에 포함된 미지수를 구하는 데 있는 것으로 판단된다.

기존의 수치모형은 미지수를 구하는 방법에 따라 구별되며 유량함수 수치이론은 collocation 방법과 최소자승법(least squares)이 있다. 최소자승법은 Dean(1965)이 해면을 변수로 취급하여 유한급수로 전개한 Chappellear(1961)의 속도포텐셜 모형을 개선하여 유량함수만을 유한급수로 전개한 근사식을 사용한 모형이다. 그러나 Dean의 모형의 단점은 독립 변수로 수심, 주기 그리고 全水頭(total head)를 택하

므로 쇄파에 가까운 파랑의 특성을 나타낼 수 없는 데 있다. 파고가 커지면 일반적으로 파장과 全水頭 등의 파랑 특성치가 증가하게 되나 이들의 증가는 단조 증가를 보이는 것이 아니라 최대 파랑보다 작은 파고의 파랑에서 극대값을 보이는 것으로 밝혀졌다(Cokelet, 1977). 이 점을 보완하기 위해 Dalrymple은 全水頭 대신 파고를 독립변수로 취해 모형을 개선하였다. 그러나 Dean이 제시한 모형과 유사한 모형의 결과는 이 현상을 뚜렷이 보여 주지 못해 논란의 대상이 되었으나 徐(1994)가 지적한 바와 같이 파랑계산에 너무 낮은 차수를 사용한 것이 주요 원인이며 수치적분에 필요한 격자점의 수가 충분하지 못할 경우 수치해의 신뢰도가 떨어져 올바른 수치해를 얻지 못하는 점도 고려된다. 徐는 이러한 점들을 면밀히 분석하고 유량함수의 분모를 추가함으로써 심해역의 파랑도 최대파고보다 작은 파고의 파장이 극대값을 보이는 모형을 제시하였다. 따라서 이런 점들을 보완한 최소자승법 모형은 해역에 무관하게 적용할 수

\*韓國海洋研究所 海洋工學 硏究 (C) Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute, P.O. Box 29, Ansan 42 10 Kc

있어 공학적으로 매우 유용한 모형으로 판단된다.

유량함수의 근사해를 collocation 방법을 사용하여 수치해를 구하는 모형을 Rienecker와 Fenton(1981)이 제시하였다. 이 모형은 정해진 격자점들에서 유량함수의 진폭 및 파수를 미지수로 사용하는 최소자승법의 미지수 이외에 해면변위 등의 미지수를 추가하여 정력학 및 동력학 경계조건의 오차를 collocation 방법으로 풀어 미지수를 정하는 방법이다. 그러므로 방법의 특성상 각 격자점에서 경계조건의 오차는 0이 되므로 오차의 크기가 수치해 정밀도의 기준이 되지 못한다.

최소자승법 모형과 collocation 모형의 수치해의 정밀도 및 범용성에 대한 비교는 학문적으로나 응용적 측면에서 매우 중요하다. 응용적인 면만을 예를 들면 일반적으로 파고가 작은 경우 수치해의 두 방법의 결과는 동일하나 특수한 경우인 쇄파에 가깝거나 천해 파랑에 대한 파랑특성이 구조물 설계에 필요하며 이때 유속은 상당히 크다. 그리고 파랑의 하중은 유속의 제곱에 비례하므로 수치해에 의한 오차는 파랑하중 계산에 상당한 영향을 주게 된다.

두 모형의 결과에 대한 비교는 Dalrymple과 Solana (1986), Fenton(1988) 그리고 Sobey(1988) 등에 의해 간접적으로 이루어졌으며 알고리즘의 장단점과 결과의 직접적인 비교 등이 이루어지지 않았다. 따라서 본 논문에서는 각 모형의 알고리즘을 토대로 새로운 모형을 만들어 그 결과를 직접 비교하여 공학응용에 길잡이가 될 수 있는 객관적인 결론을 도출하고자 한다.

본 논문의 제 2장에서는 경계치 문제를 정식화하고 제 3장에서는 최소자승법 모형과 collocation 모형의 알고리즘을 기술하였다. 제 4장에서는 두 모형을 사용하여 계산한 결과를 비교 분석하여 모형의 장단점을 밝혔다.

## 2. 정식화

일정 형태의 2차원 비선형 파랑 운동을 기술하기 위해 파속(C)으로 이동하는 이동좌표계를 사용한다 (Fig. 1). 원점을 평균해수면 상에 두고 파랑의 진행 방향을 x축의 양의 방향으로, z축의 양의 방향은 해

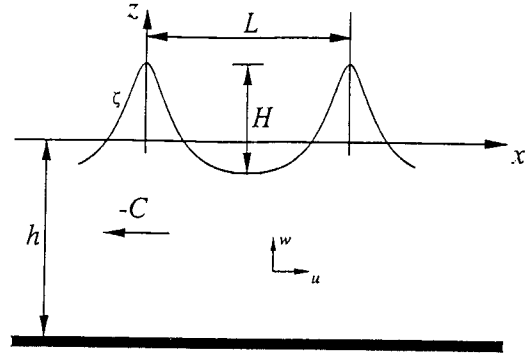


Fig. 1. Wave in steady reference frame.

주어진다.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

파랑의 수렴자에 의한 x, z방향의 유속 성분 u, w을 식 (2)와 같이 각각 정의한다.

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}; w = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{2}$$

지배방정식 (1)에 연관된 경계조건들은 다음과 같다. 해저면(h)에서의 경계조건으로 불투과성 경계조건을 부여하면 식 (3)이 된다.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \text{ on } z = -h \tag{3}$$

자유수면  $\zeta(x)$ 에 부여될 정력학적 경계조건은 식 (4)가 되고

$$-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} + C\right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \text{ on } z = \zeta \tag{4}$$

해면의 대기압력을 0으로 정하면 동력학적 경계조건은 식 (5)가 된다.

$$\zeta + \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} + C \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right] = B, \text{ on } z = \zeta \tag{5}$$

여기서 B는 Bernoulli 상수이며 g는 중력가속도이다. 일정 형태의 파랑이므로 파장(L)에 주기성을 갖는 측면조건이 부여된다

$$\Psi(x+L, z) = \Psi(x, z)$$

위의 유량함수를 식 (7)로 정의되는 총 유량함수  $\hat{\Psi}(x, z)$ 으로 바꾸어 나타내면 우변 첫 항은 좌표계 변환에 의해 생긴 유량함수이고 둘째 항은 파랑에 의해 생성된 유량함수이 된다.

$$\hat{\Psi}(x, z) = Cz + \Psi(x, z) \tag{7}$$

총 유량함수에 대한 collocation 방법에 사용될 정력학적 경계조건도 함께 나타내면 경계치 문제는 식 (8)-(12)가 된다.

$$\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial z^2} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} = 0, \text{ on } z = -h \tag{9}$$

$$-\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x}, \text{ on } z = \zeta \tag{10a}$$

$$Qh = \hat{\Psi}(x, \zeta) - \hat{\Psi}(x, -h) \tag{10b}$$

$$\zeta + \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \right)^2 \right] = B, \text{ on } z = \zeta \tag{11}$$

$$\hat{\Psi}(x+L, z) = \hat{\Psi}(x, z) \tag{12}$$

식 (10b)로 주어진 정력학적 자유수면 경계조건은 Rienecker와 Fenton(1981)이 사용한 좌표계 및 수립자에 대한 정의가 달라 부호가 다르나 동일한 식이다. 여기서는 좌표계가  $x$ 축의 양의 방향으로 움직이기 때문에 단위 수심 및 폭당의 유량  $Q$ 는 상수이며 음의 값을 갖는다. 또한 정력학적 자유수면 경계조건인 식 (10a)와 식 (10b)는 형태가 상이하나 동일한 식이다.

파랑에 의해 생성된 유량함수를 구하기 위해 식 (8)-(12)로 주어진 경계치 문제를 풀기 위해 적합한 既知의 基底函數(basis function)에 未知常數를 곱한 유한급수를 근사해로 정해 주어진 경계치 문제로부터 미지상수를 구하게 된다. 사용된 기저함수는 지배방정식을 만족하나 일부 경계조건을 만족하지 않는다.

### 3. 수치모형

본 장에서는 우선 유량함수에 대한 근사해를 정하고 이 포함된 미지수를 구하는 방법으로 collocation

방법과 least squares 방법에 대한 수치모형을 기술한다. 근사해에 포함된 미지수는 적합한 조건에 대입하면 오차가 생기게 되며 이 오차를 처리하는 방법에 따라 나누어지며 본 연구에서는 두 가지 방법을 사용하여 그 장단점을 고찰하고자 한다. 우선 최소자승법은 근사해 (13)을 동력학적 경계조건에 대입하여 발생된 오차의 제곱을 최소화함으로써 미지수를 계산한다. 반면에 collocation 방법은 근사해 (15)를 정력학적 및 동력학적 경계조건에 대입해 선정된 격자점에서 오차를 零으로 하는 미지수를 구하는 방법이다.

#### 3.1 N차 유량함수

먼저 최소자승법에 사용할 유량함수의 근사해를 나타낸 후 collocation 방법에 대한 근사해를 표시하고 이들의 특성을 분석한다. 최소자승법에서는 식 (13)으로 정의된  $N$ 개의 기저함수를 갖는  $N$ 차 유량함수를 사용하며 이 근사해는 동력학적 자유수면 경계조건을 제외한 경계치 문제를 만족한다.

$$\hat{\Psi}(x, z) = Cz - \sum_{n=1}^N A_n \frac{\sinh kn(h+z)}{\cosh knh} \cos knx \tag{13}$$

여기서 파수  $k$ 는  $2\pi/L$ 이고  $A_n$ 은 유량함수의 진폭에 해당하는 미지수이다. 식 (13)의 근사해의 분모는 심해역 파랑의 수치해를 안정하게 하기 위해 첨가된 것이다. 근사해 (13)으로부터 미지수인 해면의 유량함수  $\hat{\Psi}_s$ 를 식 (14)로 나타낼 수 있다.

$$\hat{\Psi}_s = C\zeta - \sum_{n=1}^N A_n \frac{\sinh kn(h+\zeta)}{\cosh knh} \cos knx \tag{14}$$

한편 collocation 방법의 근사해는 정력학적 및 동력학적 자유수면 조건을 제외한 경계치 문제를 만족하도록 식 (15)로 주어진다(Rienecker와 Fenton, 1981).

$$\hat{\Psi}(x, z) = A_0 z - \sum_{n=1}^N A_n \frac{\sinh kn(h+z)}{\cosh knh} \cos knx \tag{15}$$

식 (15)의  $A_0$ 는 주변 흐름(ambient current)이 없는 경우에는 파속과 같지만 흐름이 있으면 달라지며 부속속도  $U$ 에 따라 달라진다. Rienecker와 Fenton(1981)은  $U$ 가 작을 때  $A_0 = c + U$ 로 나타내었다.

흐름 조건- mean Eulerian velocity, mass trans velocity에 대한 식을 기술하였으나 본 논문에서는 해수면 아래 임의점에서의 평균유속인 mean Eulerian velocity( $C_E$ )만을 사용한다.

$$C_E = C - A_0 \quad (16)$$

근사해인 식 (13) 또는 식 (15)는 파장, 대해 주기조건이 부여되었을 뿐아니라 파곡( $x=L/2$ )을 지나 는 수직 단면에 대칭이므로  $x$ 의 범위를 파마루( $x=0$ ) 부터 파곡까지만 고려한다.

3.2 최소자승법 모형

본 모형은 파일 구조물과 같은 연안 구조물에 미치는 荷重을 계산하기 위한 것이며 설계파랑의 제원으로 통상 수심, 파고 그리고 주기가 주어지게 된다. 파고를 독립변수로 취급하는 중요성은 공학이용에 편리할 뿐아니라 파랑의 특성들이 파고에 일가함수(single-valued function)이므로 해를 구하는 데 용이 하기 때문이다. 파고에 대한 식은 경제치 문제와 근사해에 명시되지 않아 새로운 관계식을 세워야 하며 평균수심에 대한 식도 함께 부여되어야 한다. 최소자승법에 대한 자세한 유도과정은 徐(1994)에 기술 되어 있으며, 여기서는 이 모형의 중요 부분만을 간추려 정리하였다.

파마루에서의 해면을  $\zeta_C$ 로, 파곡에서는  $\zeta_T$ 로 각각 나타내면 파고는 식 (17)로 정의된다.

$$H = \zeta_C - \zeta_T \quad (17)$$

비선형성이 강한 파랑은 파고가 수심의 상당 부분에 해당하므로 수심을 식 (18)로 주어지는 평균수심으로 정의한다.

$$\frac{2}{L} \int_0^{L/2} \zeta(x) dx = 0 \quad (18)$$

식 (18)은 적분구간의 상단에 미지수가 있어 미지수에 대해 미분하는 경우 Leibnitz 공식을 사용해야 한다. 이를 피하기 위해  $2\pi x/L = \theta$ 를 사용하여 변수변환하면 적분구간이 상수로 바뀌어 계산이 용이하다.

근사식 (13)에 포함된 미지수가 동력학적 경계조건을 최소자승법에 따라 계산하고자 하나 미지수들은 식 (17)과 (18)의 조건식 역시 만족해야 한다. 따라서 위에서 기술한 1식을 가진 최소화 문제로

바뀌며 Lagrange multipliers  $\lambda_1, \lambda_2$ 를 도입하면 최소화할 목적함수 ( $O_f$ )는 식 (19)로 주어진다.

$$O_f(A_n, k, \hat{\Psi}_s, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (B - \bar{B})^2 d\theta - \lambda_1(\zeta_C - \zeta_T - H) - \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^\pi \zeta d\theta \quad (19)$$

여기서

$$B(A_n, k, \zeta) = \zeta + \frac{1}{2g} \left[ \left( \sum_{n=1}^N A_n kn \frac{\cosh kn(h + \zeta)}{\cosh knh} \cos n\theta - \frac{2\pi}{kT} \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N A_n kn \frac{\sinh kn(h + \zeta)}{\cosh knh} \sin n\theta \right)^2 \right] \quad (20)$$

$$\zeta(A_n, k, \hat{\Psi}_s) = \frac{kT}{2\pi} \hat{\Psi}_s + \frac{kT}{2\pi} \sum_{n=1}^N A_n \frac{\sinh kn(h + \zeta)}{\cosh knh} \cos n\theta \quad (21)$$

$$\bar{B} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi B d\theta \quad (22)$$

식 (19)에 도입된 평균 Bernoulli 상수( $\bar{B}$ )는 수치계산의 안정성을 증대시키기 위해 반드시 필요하며 조건식의 첨가로 인해 식 (19)에 포함된 미지수의 총 개수는  $N+4$ 개가 되며  $A_n(n=1, \dots, N)$ ,  $k, \hat{\Psi}_s, \lambda_1$  그리고  $\lambda_2$  이다. 근사해에 의한 오차의 제곱을 최소화하기 위해 미지수 각각을 변수로 보고 목적함수를 이들에 대해 미분하여 0이 되게 하면 다음 식들이 얻어진다. 미지수  $A_n, k, \hat{\Psi}_s$ 를 새로운 미지수  $X_n(n=1, \dots, N+2)$ 로 표기하면 수식 전개가 간단 명료해진다.

$$\frac{\partial O_f}{\partial X_n} = 0: \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (B - \bar{B}) \left( \frac{\partial B}{\partial X_n} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_n} \right) d\theta - \lambda_1 \left( \frac{\partial \zeta_C}{\partial X_n} - \frac{\partial \zeta_T}{\partial X_n} \right) - \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial X_n} d\theta = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial O_f}{\partial \lambda_1} = 0: \zeta_C - \zeta_T - H = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\partial O_f}{\partial \lambda_2} = 0: \int_0^\pi \zeta d\theta = 0 \quad (25)$$

식 (23)에서  $B$ 는  $\zeta$ 의 함수이므로 미지수  $X_n$ 에 대한 미분을 각각 풀어 쓰면 식 (26)이 된다.

$$\frac{\partial B}{\partial X_n} = \frac{\partial B}{\partial A_n} + \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial A_n}, \quad (n=1, \dots, N). \quad (26a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial X_{N+1}} = \frac{\partial B}{\partial k} + \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial k} \quad (26b)$$

$$\frac{\partial B}{\partial X_{N+2}} = \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \hat{\Psi}_s} \quad (26c)$$

그리고  $\bar{B}$ 도 식 (26)과 동일한 형태의 미분식으로 나타내어야 한다.

최소자승법에 의해 만들어진 연립방정식 (23)-(25)는 변수인 미지수의 값이 모든 방정식에 존재하므로 비선형이다. 비선형 방정식을 계산하기 위해 Newton방법을 사용하여 연립방정식( $i+1$ )단계의 변수를( $i$ )단계의 값으로 표시하면 다음과 같은 식들이 얻어진다.

$$B^{i+1} \equiv B(X_n + \Delta X_n) \approx B^i + \sum_{n=1}^{N+2} \left( \frac{\partial B}{\partial X_n} \right)^i \Delta X_n \quad (27a)$$

$$\zeta^{i+1} \approx \zeta^i + \sum_{n=1}^{N+2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial X_n} \right)^i \Delta X_n \quad (27b)$$

$$\lambda_1^{i+1} \approx \lambda_1^i + \Delta \lambda_1 \quad (27c)$$

$$\lambda_2^{i+1} \approx \lambda_2^i + \Delta \lambda_2 \quad (27d)$$

$$\left( \frac{\partial B}{\partial X_n} \right)^{i+1} \approx \left( \frac{\partial B}{\partial X_n} \right)^i + \sum_{m=1}^{N+2} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial X_n \partial X_m} \right)^i \Delta X_m \quad (27e)$$

식 (27)에서  $\Delta$ 는 미소 증분을 의미한다. 마찬가지로  $\bar{B}$ 에 관련된 항들도 식 (27)과 유사한 방법을 사용하여 식 (23)-(25)에 대입하여 선형항만을 모으면 미지수의 증분에 대한 ( $i$ )단계의 값으로만 표시되는 연립방정식을 얻는다. 식 (27e)에서 보였듯이 선형화 과정에서는 2차 미분항이 존재하므로 계산과정이 매우 복잡하며 소요 시간도 많이 들기 때문에 기존의 Dean의 모형에서는 2차 미분항을 무시한 식 (28)을 사용하였다.

$$\left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial B}{\partial X_n} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_n} \right) \left( \frac{\partial B}{\partial X_m} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_m} \right) d\theta \right\} \Delta X_m + \left( \frac{\partial \zeta_c}{\partial X_n} - \frac{\partial \zeta_r}{\partial X_n} \right) \Delta \lambda_1 + \left( \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial X_n} d\theta \right) \Delta \lambda_2 =$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (B - \bar{B}) \left( \frac{\partial B}{\partial X_n} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_n} \right) d\theta - \lambda_1 \left( \frac{\partial \zeta_c}{\partial X_n} - \frac{\partial \zeta_r}{\partial X_n} \right) - \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial X_n} d\theta \quad (28)$$

$$\left( \frac{\partial \zeta_c}{\partial X_m} - \frac{\partial \zeta_r}{\partial X_m} \right) \Delta X_m = \zeta_c - \zeta_r - H \quad (29)$$

$$\left( \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial X_m} d\theta \right) \Delta X_m = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \zeta d\theta \quad (30)$$

식 (28)은 완전한 Newton방법을 사용하지 않으므로 수렴속도가 느린 단점과 쇠파에 가까운 경우 해를 구할 수 없는 경우가 생길 것으로 사료되나 이는 선형화과정 방법상의 한 형태로 볼 수 있다. 한편 Dean 모형은 쇠파에 가까운 경우보다 안정한 해를 얻기 위해 계산된 미소증분에 Damping 상수(D)를 곱해 그 일부만을 앞 단계에서 구한 값에 더하는 방법을 사용하였으며 본 논문에서도 damping 상수를 사용하였다.

종합하면 선형화한 결과  $N+4$ 개의 미지수( $\Delta A_n$ ( $n=1, \dots, N$ ),  $\Delta k$ ,  $\Delta \hat{\Psi}_s$ ,  $\Delta \lambda_1$ ,  $\Delta \lambda_2$ )에 대한 同 數의 연립방정식이 구성되어 미지수를 구할 수 있다. 즉, 식 (28)에서  $N+2$ 개의 방정식과 식 (29)과 (30)로부터 각각 한개씩의 선형방정식이 얻어진다.

선형화된 연립방정식인 식 (28)-(30)은 적분식으로 되어 수치적으로만 풀 수 있다. 이를 위해 적분구간( $0 \leq x \leq \pi$ )을  $M+1$ 개 격자점으로  $M$ 개의 균등한 세부구간으로 만들어 Simpson의 수치적분법을 사용하였다. 수치적분에는 각 격자점에서의 해면의 값이 필요하며 격자점  $i$ 에서  $m+1$ 단계의 해면  $\zeta^{m+1}$ 은 Newton 방법에 의해 식 (31)로부터 계산하였다.

$$\zeta^{m+1} = \zeta^m - \frac{f(\zeta^m)}{df(\zeta^m)/d\zeta}, \quad f(\zeta) = \frac{\hat{\Psi}_s}{C} + \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{C} \frac{\sinh kn(h+\zeta)}{\cosh knh} \cos n\theta_j - \zeta \quad (31)$$

식 (31)에서  $A_n$ ,  $k$ ,  $\hat{\Psi}_s$ 는 주어진 값이다. 따라서 이 경우에도 별도의 해면 초기값과 허용오차가 필요하며 초기값은 연립방정식의 전 단계에서 주어진 해면값을 초기값으로 사용하였다. 그러므로 식 (32)는

주어진 값을 사용하였다.

$$\frac{\zeta^{m+1} - \zeta^m}{\zeta^m} \leq 10^{-4} \quad (32)$$

수치 계산은 주어진 허용오차보다 작으면 종료하였고 평균하면 오차( $E_L$ ), Bernoulli상수 오차( $E_B$ ) 그리고 파고 오차( $E_H$ )의 절대값의 합을 오차( $E$ )로 간주하여 다음 식 (33)으로 각각 정의하였다.

$$E = |E_H| + |E_B| + |E_L| \leq 10^{-4},$$

$$E_H = H - \zeta_c + \zeta_r,$$

$$E_B = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (B - \bar{B})^2 d\theta},$$

$$E_L = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \zeta d\theta \quad (33)$$

파고가 크거나 장파인 경우 선형파랑의 값은 차이가 커서 초기값으로 적절하지 않아 해를 구하기 어렵기 때문에 변형된 선형파랑의 값을 사용하였다. 즉  $A_1$ 을 제외한  $A_n$ 의 값은 쵸으로 주고  $A_1$ 은 식 (34)로

$$A_1 = \frac{gH}{2\sigma} \simeq \frac{HC \cosh kh}{2 \sinh k \left( h + \frac{H}{2} \right)} \quad (34)$$

파수  $k$ 는 Dean 모형을 따라 선형분산식으로부터 구한 파수  $k_0$ 를 사용하여 식 (35)로 각각 계산하였다.

$$k = \frac{k_0}{1 + 0.656 \left( \frac{H/T^2}{0.266 \tanh(2.93h/T^2)} \right)^2} \quad (35)$$

### 3.3 Collocation 모형

유량함수 비선형 파랑이론을 가능한 한 동일한 관점에서 비교하고자 Rienecker와 Fenton(1981)가 기술한 방법을 앞 절의 최소공배수 모형과 같은 좌표계 및 유속 정의에 따라 약간 변형하였다. 변수들을 무차원하기 위해 수심과 중력가속도를 사용하였고 첨자를 갖는 무차원 변수는 식 (36)과 같다.

$$z^* = \frac{z}{h}, \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{h}, \quad H^* = \frac{H}{h}, \quad k^* = kh \quad (36)$$

$$\hat{\Psi}^* = \frac{\hat{\Psi}}{\sqrt{gh}}, \quad Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gh}}, \quad C^* = \frac{C}{\sqrt{gh}}, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{g}{h}}} \quad (36)$$

여기서 각 주파수  $\sigma = 2\pi/T$ 이다. 이 후의 모든 변수는 무차원 변수를 의미하나 편의상 첨자를 사용하지 않는다. 식 (15)의 근사해는 앞에서 언급한  $kx = \theta$ 을 사용하여 변수변환하면 식 (37)로 바뀐다.

$$\hat{\Psi}(x, z) = A_0 z - \sum_{n=1}^N A_n \frac{\sinh kn(1+z)}{\cosh kn} \cos n\theta \quad (37)$$

정력학 경계조건 (10b)과 동력학적 경계조건 (11)은 식 (38)와 (39)로 각각 표시된다.

$$Q = A_0 \zeta - \sum_{n=1}^N A_n \frac{\sinh kn(1+\zeta)}{\cosh kn} \cos n\theta \quad (38)$$

$$B = \zeta + \frac{1}{2} [(u - A_0)^2 + w^2] \quad (39)$$

여기서 파랑에 의한 유속은 식 (40)으로 주어진다.

$$u = \sum_{n=1}^N A_n kn \frac{\cosh kn(1+\zeta)}{\cosh kn} \cos n\theta$$

$$w = \sum_{n=1}^N A_n kn \frac{\sinh kn(1+\zeta)}{\cosh kn} \sin n\theta \quad (40)$$

Collocation 방법은 적분구간( $0 \leq x \leq \pi$ )을  $N$ 개의 구간으로 나눈  $N+1$ 개 격자점에서 식 (38)과 (39)의 오차를 쵸으로 만들어 미지수를 계산하게 된다. 따라서 식 (38)과 (39)에서  $2N+2$ 개의 방정식이 생기게 된다. 그러나 현재까지의 미지수는  $A_n, \zeta_n, (n=0, \dots, N), k, B, Q$ 로  $2N+5$ 개가 되어 연립방정식을 풀기 위해 방정식이 더 필요하다. 이 모형에서도 파고와 평균 해면 그리고 파속에 대한 정의를 사용함으로써 필요한 방정식을 더 만들 수 있다. 즉,

$$H = \zeta_0 - \zeta_N \quad (41)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \zeta(\theta) d\theta = 0 \quad (42)$$

$$\sigma = Ck \quad (43)$$

$$C_E = C - A_0 \quad (44)$$

식 (38), (39) 그리고 (41)-(44)로부터  $2N+6$ 개의 방정식이 얻어지고 추가된 미지수는  $C$ 이며  $\sigma$ ,  $C_E$ 는 주어진 값이다.

구성된 연립방정식도 비선형이므로 이를 선형화하기 위해 Newton방법을 사용하여 미지수들의 증분( $\Delta$ )에 대한 ( $i$ )단계의 선형 연립방정식이 만들어 진다. 그러면 정력학적 경계조건식에 대한  $N+1$ 개 연립방정식은 식 (45)가 된다.

$$\begin{aligned} \zeta_j \Delta A_0 - \sum_{n=1}^N \left[ \frac{\sinh kn(1+\zeta_j)}{\cosh kn} \cos n\theta_j \right] \Delta A_n \\ + (A_0 - u_j) \Delta \zeta_j - \left\{ \sum_{n=1}^N A_n kn \frac{\cosh kn(1+\zeta_j)}{\cosh kn} \cos n\theta_j \right. \\ \left. \left[ \frac{1+\zeta_j}{k} \frac{\tanh kn \tanh kn(1+\zeta_j)}{k} \right] \right\} \Delta k \\ - \Delta Q = Q - A_0 \zeta_j + \sum_{n=1}^N \frac{\sinh kn(1+\zeta_j)}{\cosh kn} \cos n\theta_j, \end{aligned} \quad (45)$$

동력학적 경계조건식으로부터 만들어지는  $N+1$ 개 연립방정식은 식 (46)이 된다.

$$\begin{aligned} (A_0 - u_j) \Delta A_0 \\ - \sum_{n=1}^N \left\{ (u_j - A_0) kn \frac{\cosh kn(1+\zeta_j)}{\cosh kn} \cos n\theta_j \right. \\ \left. + w_j kn \frac{\sinh kn(1+\zeta_j)}{\cosh kn} \sin n\theta_j \right\} \Delta A_n \\ + \left\{ 1 + (u_j - A_0) \sum_{n=1}^N A_n (kn)^2 \frac{\sinh kn(1+\zeta_j)}{\cosh kn} \cos n\theta_j \right. \\ \left. + w_j \sum_{n=1}^N A_n (kn)^2 \frac{\cosh kn(1+\zeta_j)}{\cosh kn} \sin n\theta_j \right\} \Delta \zeta_j \\ + \left\{ (u_j - A_0) \sum_{n=1}^N A_n kn \frac{\cosh kn(1+\zeta_j)}{\cosh kn} \cos n\theta_j \right. \\ \left. \left[ \frac{1}{k} + n(1+\zeta_j) \frac{\tanh kn(1+\zeta_j)}{\tanh kn} - n \tanh kn \right] \right. \\ \left. + w_j \sum_{n=1}^N A_n kn \frac{\sinh kn(1+\zeta_j)}{\cosh kn} \sin n\theta_j \right. \\ \left. \left[ \frac{1}{k} + \frac{n(1+\zeta_j)}{\tanh kn(1+\zeta_j)} - n \tanh kn \right] \right\} \Delta k \\ - \Delta B = B - \zeta_j + \frac{1}{2} \{ (u_j - A_0)^2 + w_j^2 \}, \quad (j=0, \dots, N) \end{aligned} \quad (46)$$

파고 관계식의 선형화된 조건식은 식 (47)이 되고

$$\Delta \zeta_0 - \Delta \zeta_N = H - \zeta_0 + \zeta_N \quad (47)$$

평균해면에 대한 식에 triangle 적분법을 쓰면 식 (48)이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \zeta_0 + (\Delta \zeta_1 + \dots + \Delta \zeta_{N-1}) + \frac{1}{2} \Delta \zeta_N \\ = -\frac{1}{2} \zeta_0 - (\zeta_1 + \dots + \zeta_{N-1}) - \frac{1}{2} \zeta_N \end{aligned} \quad (48)$$

마지막으로 파수 및 파속에 대한 조건식으로부터 식 (49)와 (50)이 얻어진다.

$$C \Delta k + k \Delta C = \sigma - Ck \quad (49)$$

$$-\Delta A_0 + \Delta C = C_E - C + A_0 \quad (50)$$

위에서 구한  $2N+6$ 개의 선형 연립방정식을 풀면 미지수의 증분이 얻어지며 전 단계에서 구한 미지수에 이를 더한 값을 다음 단계의 미지수 증분을 구하는데 사용한다. 이 반복법의 시점에 적절한 초기조건이 부여되어야 하며 모형의 종료점은 유차원 파수( $k^*$ )가 허용오차  $\epsilon$ 보다 같거나 작을 때까지 계산하였다.

$$\frac{(k^*)^{i+1} - (k^*)^i}{(k^*)^i} \leq \epsilon \quad (51)$$

초기조건으로는 다음의 변형된 선형파 결과를 사용하였다.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= k_0 \tanh k_0 \\ A_0 &= \frac{\sigma}{k_0} = C \\ A_1 &= \frac{HC \cosh k_0}{2 \sinh k_0 \left( 1 + \frac{H}{2} \right)} \\ Q &= -C \\ B &= \frac{1}{2} C^2 \end{aligned} \quad (52)$$

선형파의 파수 ( $k_0$ )는 Newton방법으로 구하였고 식 (52)에 표기되지 않은 미지수  $A_n$ 은 0으로 취하였으나 미지수  $A_1$ 은 최소자승법의 초기값과 같도록 하였다.

#### 4. 수치결과 및 분석

Table 1. Numerical solutions by Chaplin(1980), Rienecker and Fenton(1981) and least squares model for Case 3 and 7

| Case 3  |          | Chaplin |             |    | R & F   |             |     | Least squares |             |     |
|---------|----------|---------|-------------|----|---------|-------------|-----|---------------|-------------|-----|
| $h/L_o$ | $H/L_o$  | $L/L_o$ | $\zeta_c/H$ | N  | $L/L_o$ | $\zeta_c/H$ | N   | $L/L_o$       | $\zeta_c/H$ | N   |
| 0.010   | 0.005821 | 0.2916  | 0.8979      | 49 | 0.29159 | 0.89782     | 40  | 0.29159       | 0.89782     | 55  |
| 0.010   | 0.006978 | 0.2995  | 0.9141      | 49 | 0.29948 | 0.91394     | 50  | 0.29949       | 0.91394     | 70  |
| 0.010   | 0.007133 | 0.3003  | 0.9162      | 49 | 0.30027 | 0.91611     | 55  | 0.30028       | 0.91611     | 75  |
| 0.010   | 0.007288 | 0.3009  | 0.9185      | 49 | 0.30093 | 0.91833     | 70  | 0.30093       | 0.91833     | 80  |
| 0.010   | 0.007443 | 0.3014  | 0.9208      | 49 | 0.30138 | 0.92060     | 80  | 0.30138       | 0.92059     | 90  |
| 0.010   | 0.007520 | 0.3015  | 0.9221      | 49 | 0.30149 | 0.92174     | 90  | 0.30149       | 0.92174     | 95  |
| 0.010   | 0.007598 | 0.3014  | 0.9234      | 49 | 0.30150 | 0.92291     | 110 | 0.30151       | 0.92291     | 110 |
| 0.010   | 0.007675 | 0.3010  | 0.9250      | 49 | 0.30139 | 0.92404     | 130 | 0.30140       | 0.92404     | 130 |
| 0.010   | 0.007740 | —       | —           | —  | 0.30118 | 0.92491     | 165 | 0.30121       | 0.92491     | 165 |

| Case 7  |          | Chaplin |             |    | R & F   |             |    | Least squares |             |     |
|---------|----------|---------|-------------|----|---------|-------------|----|---------------|-------------|-----|
| $h/L_o$ | $H/L_o$  | $L/L_o$ | $\zeta_c/H$ | N  | $L/L_o$ | $\zeta_c/H$ | N  | $L/L_o$       | $\zeta_c/H$ | N   |
| 0.200   | 0.099600 | 0.9918  | 0.6662      | 39 | 0.99182 | 0.66620     | 35 | 0.99182       | 0.66620     | 40  |
| 0.200   | 0.104530 | 1.0008  | 0.6788      | 39 | 1.00074 | 0.67883     | 40 | 1.00074       | 0.67883     | 40  |
| 0.200   | 0.108310 | 1.0071  | 0.6895      | 39 | 1.00705 | 0.68966     | 40 | 1.00705       | 0.68966     | 45  |
| 0.200   | 0.112020 | 1.0116  | 0.7020      | 39 | 1.01160 | 0.70190     | 40 | 1.01160       | 0.70190     | 55  |
| 0.200   | 0.114520 | 1.0111  | 0.7113      | 39 | 1.01121 | 0.71107     | 43 | 1.01158       | 0.71089     | 75* |

\* denotes a local minimum in  $E_B$  and - signifies no results obtainable.

하여 그 수치해의 정밀도를 비교 분석하였다. 천해역의 파랑에 대한 유량함수 파랑이론 결과는 경우에 따라 유일한 해를 얻을 수 없음이 지적되었으며(Dalrymple과 Solana, 1986; Sobey, 1988) 유일한 해를 도출하기 위한 여러 가지 방법이 제시되었다. 그 중 최소자승법을 사용한 모형에서는 5차 이론으로부터 시작하여 5차의 간격으로 점차적으로 증가시켜 해를 구하였다. 그러나 collocation 방법을 사용한 모형에서는 Sobey의 방법을 사용하였으며 여기서 차수는 고정된 반면에 파고를 주어진 파고는 4단계로 나누어 단계적으로 계산한다. 주어진 파고의 0.1배의 작은 파랑에 대해 제 3장의 초기조건을 사용하여 미지수들을 구하고 이를 이용하여 0.2배 파랑을 계산한다. 같은 방법으로 0.5배 파랑을 구한 뒤 마지막으로 주어진 파고의 파랑에 대한 미지수를 계산하였다. 그러므로 두 모형은 최종 계산을 위한 중간 계산과정을 사용했으며 중간 계산의 최대 반복횟수는 10번으로 정하였다.

최소자승법의 모형은 선형화 과정에서 일부 만을 사용하였기 때문에 경우에 따라 계산된 증분의 일부 만을 얻기 위한 damping 상수(D)를 사용해야 할 필요성(94)가 지적한 바와 같이

D가 수치해의 수렴속도에 영향을 준다. D를 1로 고정한 경우는 계산된 증분을 그대로 사용하는 것이 되나 파고가 커질수록 수치해의 안정도가 떨어지는 단점이 있다. 이러한 점을 보완하기 위해 D의 값을 1로부터 시작하여  $E_B$ 값이 전 반복단계보다 큰 경우에는 0.1씩 감소시키는 방법을 사용하였다. 한편 쇄파에 가까운 경우 파고가 커서 해를 얻을 수 없는 경우에는 초기 D의 값을 1보다 작은 값으로 부터 시작하였다. 수치해가 수렴하면 미지수의 변화는 차수에 따라 거의 변하지 않기 때문에 해가 수렴하는 것을 보다 확실히 하기 위해 다음과 같은 종료점을 추가하였다. 즉 차수를 증가시키면서 주어진 차수에서 첫번째 오차가 허용오차보다 작은 경우가 연속 5번이 되면 프로그램을 종료하는 방법을 추가하였다.

Collocation 모형은 선정된 격자점에서 오차를 뺀으로 만들기 때문에  $E_B$ 값은 의미가 없다. 따라서 파랑의 총체적인 특성(integral property)인 파수의 값의 상대적인 변화를 종료점의 기준으로 삼았으며 중간 계산과정의 허용오차는  $10^{-6}$ 으로 정하였다. 이 모형의 수렴속도는 최소자승법 모형보다 상당히 빠른 장점이 있으며 이 점을 감안하여 최종 단계에서는 파수의 변화가 없거나 최대 반복횟수 50번에 이르거나 두



Table 2. Numerical solutions by Rienecker and Fenton(1981) and least squares model for Case 9

| Case 9  |          | R & F   |             |    | Least squares |             |     |
|---------|----------|---------|-------------|----|---------------|-------------|-----|
| $h/L_o$ | $H/L_o$  | $L/L_o$ | $\zeta_c/H$ | N  | $L/L_o$       | $\zeta_c/H$ | N   |
| 1.00    | 0.128025 | 1.13373 | 0.60945     | 30 | 1.13373       | 0.60945     | 35  |
| 1.00    | 0.152685 | 1.17735 | 0.64016     | 30 | 1.17735       | 0.64016     | 40  |
| 1.00    | 0.160000 | 1.18903 | 0.65264     | 33 | 1.18903       | 0.65264     | 45  |
| 1.00    | 0.165700 | 1.19445 | 0.66612     | 35 | 1.19447       | 0.66609     | 70* |
| 1.00    | 0.166500 | 1.19405 | 0.66872     | 33 | 1.19425       | 0.66853     | 85* |

\* denotes the initial damping coefficient given to 0.5.

가지 방법 중 먼저 발생하는 방법을 종료점으로 삼았다.

두 모형은 Double precision으로 계산한 결과이며 이를 비교하기 위해 Dean 표(Chaplin, 1980) 중 Case 3 and 7의 파랑 가운데 비교적 파고가 큰 경우를 대상으로 파장비 ( $L/L_o$ )와 파마루비 ( $\zeta_c/H$ )를 도표화하여 표 1에 정리하였다. 표의 마지막 파랑은 쇄파에 거의 이르는 파랑이며 파장비가 극대점을 보이기 전까지의 결과는 동일한 것으로 나타났다. 극대점에 이른 후 최소자승법 모형과 collocation 모형의 결과는 거의 같으나 Chaplin의 결과와는 차이가 있다. 이는 Chaplin의 결과가 너무 낮은 차수를 사용한 것으로 사료된다. 한편 Case 7의 마지막 파랑에 대한 최소자승법의 결과는 주어진 허용오차에 도달하지 못하고 75차에서  $E_B$ 이 극소값을 보인 후 증가하였으며 collocation 모형도 43차 이후에는 수치해의 진동을 보여 안정한 해를 얻지 못하였기 때문에 쇄파에 아주 근접한 파랑으로 사료된다.

Collocation 모형은 차수가 정해지고 파고를 점차 증가시키는 방법을 사용하였기 때문에 주어진 파랑 제한이 어떤 차수에서 해에 수렴하는 지를 결정하기 어려운 점이 있다. 따라서 이 방법은 수렴속도는 빠르나 확실한 해를 얻기 위해서는 최소자승법 모형에 사용된 차수 증가방법을 사용하는 것이 좋을 것으로 판단된다.

徐(1994)는 최소자승법 모형의 적분값이 수치해에 영향을 주는 것을 밝혔다. 격자점의 수가 작아질수록 수치해의 정밀도가 떨어져 해의 신뢰도가 상당히 떨어지거나 계산속도가 빠른 잇점이 있다. 반면에 격자점을 많이 취할수록 수치해의 신뢰도가 높아지나 계산시간이 많이 드는 단점이 있다. 해의 정밀도와 계산시간을 감안하여 격자점의 갯수를 차수의 2배

정해 계산하는 것이 최적인 것을 밝혔고 표에는 200차를 최고 차수(격자점의 수 401개)로 정했으며 최고 harmonic성분의 반 파장에는 3개의 격자점이 놓이게 된다.

Rienecker와 Fenton(1981)이 지적했듯이 Dean(1965) 모형은 유량함수의 분모를 첨가하지 않아 심해역의 파랑을 계산할 수 없는 단점이 있다. 그러나 본 최소자승법 모형은 분모를 추가하였으며 수심에 대한 파장비가 1.1인 심해역에 가까운 Case 9에 대한 두 모형의 결과를 표 2에 비교하였다. 표에서 최소자승법의 결과는 최대 차수 100으로 정하였고 격자점은 201개를 각각 사용하였다.

표 2의 경우 파장비는 파고비 0.1657에서 극대값을 보이며 두 모형의 파장비는 극대값에 이르기 전에는 거의 같은 값을 보인다. 표에서 최소자승법의 차수란의 첨자는 초기 D를 0.5로 주어 계산한 결과이며 파고가 증가할수록 차수가 점차 증가하는 것을 알 수 있다. 반면에 collocation 모형 결과는 최소자승법의 차수보다 작은 차수로 계산한 값이나 이 점은 앞에 언급된 최소자승법의 종료점을 감안하면 큰 문제라 할 수 없다. 그러나 표에서 파고비 0.16 이상의 경우 표에 명시된 차수를 넘을 때 collocation 모형 수치해는 점차 진동을 보이며 종국에는 해를 구하지 못했다. 그리고 파고가 커지면 보다 많은 파랑성분이 필요하나 collocation 모형에서는 오히려 작은 차수에서 안정된 해를 보여 수치해의 신뢰도가 떨어지는 것으로 판단된다.

마지막으로 수정된 Dean의 표에 주어진 파랑제한을 사용하여 계산한 결과를 표 3에 정리하였다. 표에 사용된 자료는 각 경우 중 파고가 가장 큰 파랑을 제외하면 Dean 표에 제시된 자료와 같으며 Chaplin(1980)이 지적한 바와 같이 Dean의

**Table 3.** Numerical solutions of the 30 waves tabulated by Dean(1974) and of the 10 cases(D) added by Chaplin(1980)

| Case | $h/L_o$ | $H/L_o$  | R & F |          |             |       | Least squares |          |             |       |
|------|---------|----------|-------|----------|-------------|-------|---------------|----------|-------------|-------|
|      |         |          | $N$   | $L/L_o$  | $\zeta_c/H$ | $L/h$ | $N$           | $L/L_o$  | $\zeta_c/H$ | $L/h$ |
| 1A   | 0.002   | 0.000390 | 45    | 0.119588 | 0.909525    | 59.79 | 45            | 0.119589 | 0.909492    | 59.79 |
| 1B   | 0.002   | 0.000779 | 60    | 0.127924 | 0.938860    | 63.96 | 65            | 0.127926 | 0.938795    | 63.96 |
| 1C   | 0.002   | 0.001169 |       | —        |             |       | 70            | 0.135485 | 0.953610    | 67.74 |
| 1D   | 0.002   | 0.001408 |       | —        |             |       | 95            | 0.139238 | 0.960751    | 69.62 |
| 2A   | 0.005   | 0.000974 | 30    | 0.186445 | 0.857051    | 37.29 | 40            | 0.186445 | 0.857051    | 37.29 |
| 2B   | 0.005   | 0.001946 | 35    | 0.198859 | 0.903664    | 39.77 | 50            | 0.198859 | 0.903663    | 39.77 |
| 2C   | 0.005   | 0.002925 | 50    | 0.210518 | 0.927349    | 42.10 | 60            | 0.210519 | 0.927348    | 42.10 |
| 2D   | 0.005   | 0.003469 | 75    | 0.215891 | 0.937819    | 43.18 | 75            | 0.215894 | 0.937816    | 43.18 |
| 3A   | 0.010   | 0.001948 | 30    | 0.259467 | 0.798579    | 25.95 | 35            | 0.259467 | 0.798579    | 25.95 |
| 3B   | 0.010   | 0.003886 | 30    | 0.275765 | 0.864215    | 27.58 | 45            | 0.275765 | 0.864216    | 27.58 |
| 3C   | 0.010   | 0.005821 | 40    | 0.291591 | 0.897816    | 29.16 | 55            | 0.291591 | 0.897816    | 29.16 |
| 3D   | 0.010   | 0.006978 | 50    | 0.299484 | 0.913938    | 29.95 | 70            | 0.299485 | 0.913937    | 29.95 |
| 4A   | 0.020   | 0.003902 | 30    | 0.358612 | 0.722604    | 17.93 | 35            | 0.358612 | 0.722604    | 17.93 |
| 4B   | 0.020   | 0.007772 | 30    | 0.379135 | 0.809541    | 18.96 | 40            | 0.379135 | 0.809541    | 18.96 |
| 4C   | 0.020   | 0.011678 | 40    | 0.400838 | 0.857847    | 20.04 | 45            | 0.400838 | 0.857847    | 20.04 |
| 4D   | 0.020   | 0.013998 | 50    | 0.411681 | 0.881468    | 20.58 | 65            | 0.411682 | 0.881468    | 20.58 |
| 5A   | 0.050   | 0.009752 | 30    | 0.541054 | 0.622847    | 10.82 | 35            | 0.541054 | 0.622847    | 10.82 |
| 5B   | 0.050   | 0.019505 | 30    | 0.566044 | 0.715653    | 11.32 | 35            | 0.566044 | 0.715653    | 11.32 |
| 5C   | 0.050   | 0.029163 | 35    | 0.597609 | 0.784615    | 11.95 | 40            | 0.597609 | 0.784615    | 11.95 |
| 5D   | 0.050   | 0.035097 | 70    | 0.613638 | 0.824465    | 12.27 | 70            | 0.613638 | 0.824466    | 12.27 |
| 6A   | 0.100   | 0.018312 | 30    | 0.718140 | 0.570872    | 7.18  | 30            | 0.718140 | 0.570872    | 7.18  |
| 6B   | 0.100   | 0.036631 | 30    | 0.743848 | 0.641529    | 7.44  | 35            | 0.743848 | 0.641529    | 7.44  |
| 6C   | 0.100   | 0.054927 | 35    | 0.783154 | 0.713325    | 7.83  | 40            | 0.783154 | 0.713325    | 7.83  |
| 6D   | 0.100   | 0.065737 | 55    | 0.805295 | 0.761770    | 8.05  | 60            | 0.805295 | 0.761769    | 8.05  |
| 7A   | 0.200   | 0.031267 | 30    | 0.899312 | 0.544301    | 4.50  | 30            | 0.899312 | 0.544301    | 4.50  |
| 7B   | 0.200   | 0.062490 | 35    | 0.931053 | 0.593040    | 4.66  | 35            | 0.931053 | 0.593040    | 4.66  |
| 7C   | 0.200   | 0.093785 | 35    | 0.981156 | 0.652704    | 4.91  | 35            | 0.981156 | 0.652704    | 4.91  |
| 7D   | 0.200   | 0.112043 | 40    | 1.011616 | 0.701982    | 5.06  | 55            | 1.011617 | 0.701981    | 5.06  |
| 8A   | 0.500   | 0.041995 | 30    | 1.013133 | 0.533860    | 2.03  | 30            | 1.013133 | 0.533860    | 2.03  |
| 8B   | 0.500   | 0.083974 | 30    | 1.059139 | 0.569636    | 2.12  | 30            | 1.059139 | 0.569636    | 2.12  |
| 8C   | 0.500   | 0.125988 | 35    | 1.125261 | 0.611428    | 2.25  | 35            | 1.125261 | 0.611428    | 2.25  |
| 8D   | 0.500   | 0.151278 | 40    | 1.169213 | 0.645570    | 2.34  | 40            | 1.169216 | 0.645568    | 2.34  |
| 9A   | 1.000   | 0.042615 | 30    | 1.017456 | 0.533682    | 1.02  | 30            | 1.017456 | 0.533682    | 1.02  |
| 9B   | 1.000   | 0.085197 | 30    | 1.065169 | 0.568895    | 1.07  | 30            | 1.065169 | 0.568895    | 1.07  |
| 9C   | 1.000   | 0.128025 | 30    | 1.133727 | 0.609452    | 1.13  | 35            | 1.133727 | 0.609452    | 1.13  |
| 9D   | 1.000   | 0.152685 | 30    | 1.177352 | 0.640156    | 1.18  | 40            | 1.177352 | 0.640156    | 1.18  |
| 10A  | 2.000   | 0.042602 | 30    | 1.017454 | 0.533671    | 0.51  | 30            | 1.017454 | 0.533671    | 0.51  |
| 10B  | 2.000   | 0.085218 | 30    | 1.065211 | 0.568908    | 0.53  | 30            | 1.065211 | 0.568908    | 0.53  |
| 10C  | 2.000   | 0.127534 | 35    | 1.132886 | 0.608910    | 0.57  | 35            | 1.132886 | 0.608910    | 0.57  |
| 10D  | 2.000   | 0.153361 | 40    | 1.178530 | 0.641155    | 0.59  | 40            | 1.178530 | 0.641155    | 0.59  |

-signifies no results obtainable.

최대 파랑은 쇄파고를 넘는 경우도 있어 Chaplin은 최대 파랑의 90%에 해당하는 파랑의 제원을 수정한 경우 표에서 최소공배수 모형의 최대 파랑은 100

사용하였다.

두 모형의 결과는 파장이 수심에 비해 아주 크며 파고가 큰 경우(Case 1C와 1D)를 제외하면 동일한 결과를 보이거나 이런 경우 collocation 모형으로부터 결

파를 얻을 수 없었다. 표 3은 동일한 조건에도 파고가 커질수록 보다 많은 파랑의 성분이 필요하며 천해로 갈수록 많은 성분이 필요함을 보여준다. 결국 파고가 클수록 그리고 천해로 갈수록 보다 고차의 성분이 필요하다.

종합적으로 두 모형을 비교할 때 파장이 아주 큰 천해파와 쇄파에 가까운 파랑을 제외하면 두 모형의 결과는 거의 일치한다. 계산속도의 측면은 collocation 모형은 수렴속도가 매우 빠른 장점이 있으나 쇄파에 가까운 경우에는 많은 파랑성분이 필요하므로 이 모형의 연립방정식이 매우 커지며 계산소요 시간도 연립방정식의 계산이 주도함으로 오히려 최소자승법 모형보다 많은 시간이 소요된다. 본 연구에서 사용한 collocation 모형의 단계적 방법은 안정된 수치해의 수렴 차수를 알 수 없는 단점을 가지며 이에 대한 보완이 필요하다. 한편 최소자승법은 프로그램을 작성하기가 상대적으로 복잡하며 비선형 연립방정식의 선형화 과정 중 일부 만을 사용한 점의 영향은 추후 연구되어야 할 부분이라고 생각된다. 이러한 제반의 분석을 바탕으로 보다 안정된 파랑의 특성을 구하는 데는 최소자승법 모형이 보다 나은 것으로 평가된다.

### 5. 결 론

일정 형태의 비선형 파랑을 기술하기 위해 유량함수를 사용한 두 모형- collocation 모형과 최소자승법 모형을 사용하여 파랑의 특성을 계산하였다. Collocation 모형은 정력학 및 동력학적 경계조건을 정해진 격자점에서 오차를 뺄음으로 만들어 근사해에 의한 경계조건의 오차는 없으나 쇄파에 가깝거나 파장이 큰 파랑의 경우에는 이러한 점이 오히려 악 영향을 주게 되는 것으로 사료된다. 반면에 최소자승법의 근사해는 동력학 경계조건을 근사적으로 만족하게 함으로써 오차 분배를 자유수면 전체에 고르게 한다. 따라서 비교적 보다 안정된 수치해를 얻게 되는 것으로 사료된다.

수정된 Dean 표(Chaplin, 1980)의 40개 파랑에 대해 두 모형의 결과를 도표화하였고 일부 극단적인 경우를 제외하면 두 모형의 결과가 같음을 밝혔다. 이 결과로부터 파고가 클수록 그리고 천해로 갈수록 보다 고

차의 성분이 필요하여 보다 고차의 유량함수를 근사해로 사용해야한다.

쇄파에 가까운 파랑의 파장비를 중점 분석하였고 두 모형은 모두 쇄파보다 작은 파랑의 파장이 극대값을 보여 기존의 정밀한 결과와 부합된다. 그리고 심해역에 가까운 Case 9의 수치결과를 세밀히 분석하여 쇄파에 가까운 파랑의 특성을 계산하였고 collocation 모형은 파고가 큰 경우에도 보다 작은 차수에서 해가 존재하므로 최소자승법 모형보다 해의 신뢰도가 떨어지는 것으로 평가된다.

### 감사의 글

본 연구는 1994년 한국해양연구소에서 실시한 기본연구사업(PE00462) 연구의 일부결과이며 연구비 지원에 감사를 드립니다.

### 참고문헌

徐承男, 1994. 최소자승법을 사용한 유량함수 비선형 파랑 이론의 수치모형, 韓國海岸·海洋工學會誌, 제출.  
 Chappellear, J.E., 1961. Direct numerical calculation of wave properties, *J. Geophys. Res.*, **66**(2): 501-508.  
 Cokelet, E.D., 1977. Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, **286**: 183-230.  
 Chaplin, J.R., 1980. Developments of stream-function wave theory, *Coastal Engrg.*, **3**: 179-205.  
 Dalrymple, R.A. and Solana, P., 1986. Nonuniqueness in stream function wave theory, *Journal of Waterways, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, ASCE, **112**(2): 333-337.  
 Dean, R.G., 1965. Stream function representation of nonlinear ocean waves, *J. Geophys. Res.*, **70**(18): 4561-4572.  
 Dean, R.G., 1974. Evaluation and development of water wave theories for engineering application. U.S. Army Corps Eng., CERC Spec. Rep. No.1  
 Fenton, J.D., 1988. Discussion of Nonuniqueness in Stream Function Wave Theory, by R.A. Dalrymple and P. Solana, *Journal of Waterways, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, ASCE, **114**(1): 110-112.  
 Rienecker, M.M. and Fenton, J.D., 1981. A Fourier approximation method for steady water waves, *J. Fluid Mech.*, **104**: 119-137.  
 Sobe, R.J., 1988. Discussion of Nonuniqueness in Stream Function Wave Theory, by R.A. Dalrymple and P. Solana, *Journal of Waterways, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, ASCE, **114**(1): 112-114.