

## 最少自乘法을 사용한 流量函數 非線形 波浪理論의 數值模型 A Numerical Model of Nonlinear Stream Function Wave Theory by the Least Squares Method

徐 承 男\*  
Seung Nam Sco\*

**要 旨** : Dean(1965)의 유량함수 비선형 파랑이론을 개선한 수치모형이 제시되었다. 유량함수 파랑이론 모형은 공학이용에 매우 정밀하고 유용한 모형으로 평가되어 왔다. 선형화된 연립방정식에 사용된 damping 상수와 적분에 필요한 격자점의 수가 수치해에 미치는 영향을 분석·평가하였고 수정된 Dean 표(Chaplin, 1980)의 자료를 사용하여 정밀한 파랑제원을 계산하여 도표화 하였다. 쇄파에 가까운 파랑의 특성인 파장 및 그밖의 특성들이 쇄파에 이르기 전에 극대값을 보임으로써 본 모형의 정밀도를 입증하였다.

**Abstract** □ A numerical model of nonlinear stream function wave theory evolved from Dean's model (1965) is presented. The stream function theory has been evaluated to be an accurate and useful tool for engineering applications. Effects of damping coefficient employed in a linearized simultaneous equation and number of points in the numerical integration of model on numerical solutions are assessed. Most accurate wave characteristics calculated by the present model are tabulated using revised Dean's Table (Chaplin, 1980) input parameters. Since the well-known feature of nearly breaking waves that with increasing wave steepness the wave length as well as integral properties have a maximum prior to the limiting wave height is represented by the model, the accuracy of model can be proved.

### 1. 서 론

자연상태의 비선형 파랑은 수심에 의해 변할 뿐 아니라 여러 성분의 파랑에 의한 상호작용으로 그 운동을 기술하기는 매우 어렵기 때문에 기존의 파랑이론은 일정 형태의 파랑만을 대상으로 삼은 가장 단순한 경우만을 다루고 있다. 즉 일정 수심 위를 지나는 단주기 파랑에 의한 운동을 기술한다. 그러나 이러한 경우라도 파랑운동에 대한 기술은 어렵고 복잡하다. 파랑은 특성 길이(characteristic length)인 수심, 파장 그리고 파고가 주어지면 파랑의 형태를 나타낼 수 있으나 그 구체적인 형태는 파랑이론에 따라 다르다. 특히 해석적인 파랑이론(Stokes 이론과 Cnoidal 이론)은 수심( $h$ )과 파장( $L$ ) 그리고 파고( $H$ )의 비로 주어지는 상대적인 크기에 의해 부분적으로만 성립한다.

Stokes 이론의 성립 범위는 천해가 아닌 해역에서의 파고가 크지 않은 파랑에 적용할 수 있다. 반면에 Cnoidal 이론은 심해가 아닌 해역에서의 파고가 크지 않은 파랑에 국한된다. 따라서 이러한 점들은 공학이용에 상당한 제약을 주는 것이며 특히 설계파랑은 쇄파에 가까워 이러한 점을 보완하여 1965년 Dean이 유량함수(stream function)를 사용한 수치모형을 제시하였다. 부연하면 Dean의 모형은 고립파(Solitary wave)를 제외하고는 모든 파랑에 대해 해역에 무관하게 적용할 수 있어 공학이용의 측면에서 볼 때 매우 유용하다.

기존의 연구에서 밝혀진 바와 같이 Dean의 모형의 단점은 독립변수로 수심, 주기 그리고 全水頭(total head)을 택하여 쇄파에 가까운 파랑의 특성을 나타낼 수 없는 데 있다. 파고가 커지면 일반적으로 파장과

\*韓國海洋研究... 學研究部 (Ocean Engineering Divison, Korea Ocean Research and Development Institute, P.O. Box 29, , Korea)

全水頭 등의 파랑 특성치가 증가하게 되나 이들의 증가는 단조 증가를 보이는 것이 아니라 최대 파랑 보다 작은 파고의 파랑에서 극대값을 보이는 것으로 밝혀졌다(Cokelet, 1977). 이 점을 보완하기 위해 Dalrymple은 全水頭 대신 파고를 독립변수로 취해 모형을 개선하였다. 그러나 Dean이 제시한 모형과 유사한 모형의 결과는 이 현상을 뚜렷이 보여 주지 못해 논란의 대상이 되었다. 그러므로 본 연구는 Dalrymple의 모형을 개선하여 정밀도를 분석한 후 이 현상을 재현할 수 있는 가에 대한 의문이 연구의 계기가 되었다.

본 모형에 사용된 방법을 요약하면 다음과 같다. 동력학 경계조건을 제외한 경계치 문제를 만족하는  $N$ 차 유량함수의 근사해를 동력학 경계조건에 대입하면 오차가 생기게 된다. 최소자승법에 따라 오차를 최소화함으로써 근사해에 포함된 미지수인 유량함수의 진폭, 파수 그리고 해면의 유량함수값을 정한다. 한편 파고와 평균해면으로 주어진 조건식이 부여됨으로 목적함수는 이들을 포함하는 식으로 구성된다. 목적함수를 각 미지수에 대해 미분하고 이를 0으로 놓으면 해당 미지수에 대한 목적함수의 최소치를 얻게 되며 이로부터  $N+4$ 개의 연립방정식이 만들어 진다. 한편 구성된 연립방정식은 비선형이므로 반복법인 Newton 방법으로 이를 선형화하면 선형 연립방정식이 된다. 이 연립방정식을 풀면 미지수의 증분이 계산되고 계산된 증분으로 부터 다음 단계의 미지수를 구해 이를 사용하면 다음 단계의 증분을 계산할 수 있다. 허용오차에 이를 때까지 이러한 과정을 반복하며 이 반복과정의 시점에는 적절한 초기값이 부여되어야 한다.

유량함수를 사용한 다른 형태의 모형으로는 Chaplin(1980) 모형과 Rienecker와 Fenton(1981) 모형이 있다. Chaplin 모형은 최소자승법을 사용하나 미지수를 파장과 격자점에서의 해면변위들로 구성하여 Schmidt process에 의해 해를 구한 점이 본 모형과 다르다. Rienecker와 Fenton(1981) 모형은 격자점에서의 해면변위들과 본 모형의 미지수 이외의 미지수를 추가하여 정력학 및 동력학적 경계조건의 오차를 collocation 방법으로 풀어 미지수를 정하는 방법을 사용하였다.

본 논문의 2장에서는 경계치 문제를 정식화하고 문제에 주어진 미지수를 푸는 일반적인 방법을 기

하였다. 제 3장에서는 최소자승법으로 미지수를 구하는 방법과 비선형 연립방정식을 선형화하는 방법을 논한 뒤 본 모형에 사용한 수치방법을 기술하였다. 제 4장에서는 본 모형을 검증하기 위해 기존의 결과들에 대한 파랑 특성을 계산 비교하여 그 차이를 분석하였다.

## 2. 정식화

일정 수심 위를 지나는 2차원 비선형 파랑의 운동을 기술하기 위해 다음과 같은 직교좌표계를 사용한다. 원점을 평균해수면 상에 두고 파랑의 진행 방향을  $x$ -축의 양의 방향으로,  $z$ -축의 양의 방향은 해수면 윗 쪽으로 향하게 정하며 첨자  $\cdot$ 는 고정좌표계를 의미한다.

비압축성 유체의 모든 2차원 운동은 유량함수( $\psi$ )를 사용하여 나타낼 수 있다. 유량함수는 유체내 임의의 두점을 잇는 선분을 통과하는 유량 중 이에 직교하는 성분으로 정의된다. 따라서 유량함수가 기존의 용어인 흐름함수보다 좀 더 구체적으로 의미를 전달하므로 여기서는  $\psi$ 을 유량함수로 표기하고자 한다. 파랑의 수립자에 의한  $x, z$ -방향의 유속 성분  $u, w$ 을 식 (1)과 같이 각각 정의하면 이 식은 비압축성 유체의 운동을 만족한다.

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}; w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1)$$

한 걸음 더 나아가 수립자의 운동을 비회전성이라 가정하면 지배방정식은 Laplace 식 (2)로 주어진다.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

한편 속도포텐셜  $\phi$ 를 사용하여 파랑의 운동을 나타낼 때에도 같은 지배방정식이 유도되며 속도포텐셜에 의한 유속성분을 식 (3)으로 정의한다. 이로부터 유량함수와 속도포텐셜의 관계식이 유도될 수 있으며 이 관계식은 Cauchy-Riemann 조건이 된다.

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}; w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3)$$

지배방정식 (2)에  $\psi$ 의 경계조건은

그들은 다음과 같다. 경계조건을 부여하면

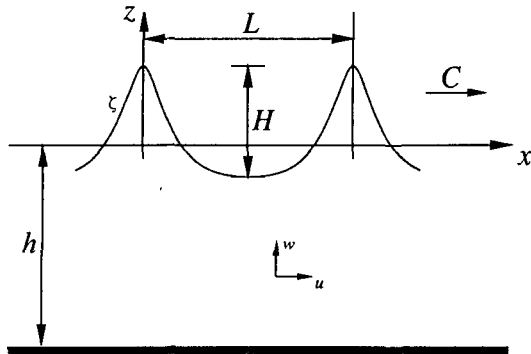


Fig. 1. Definition Sketch.

식 (4)가 된다.

$$w=0 \tag{4}$$

자유수면  $\zeta(x, t)$ 에 부여될 정력학적 경계조건은 식 (5)가 되고

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} = w, \tag{5}$$

해면의 대기압력을 0으로 정하면 동력학적 경계조건은 식 (6)이 된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + g\zeta = B^* \tag{6}$$

여기서  $B^*$ 는 Bernoulli 상수이며  $g$ 는 중력가속도이다. 주목해야할 점은 식 (4)~(6)의 유속은 파랑의 수립자 운동만에 의한 결과이다. 마지막으로 적절한 측면 경계조건이 부여되어야 하며 이는 뒤에 기술하기로 한다.

일정 형태의 단주기 비선형 파랑은 파형이 변하지 않으므로 파속  $C(=L/T, T$ 는 주기)와 같은 속도로 움직이는 이동좌표계를 사용하면 시간 변화율을 제거할 수 있다. 이동좌표계에 대한 변수들을 그림 1에 도시하였다. 먼저 첨자가 붙지 않는 이동좌표계와 첨자를 갖는 고정좌표계와의 관계를 살펴 보면 식 (7)과 같다.

$$\begin{aligned} x &= x + Ct \\ z &= z \\ t &= t \end{aligned}$$

이 때의 미분 관계식은 chain rule

되며 식 (8)로 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= C \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \tag{8}$$

이동좌표계에서는 파랑운동의 시간 변화율이 없으므로 식 (8)의 셋째 식 좌변은 0이 된다. 즉

$$\frac{\partial}{\partial t} = -C \frac{\partial}{\partial x} = -C \frac{\partial}{\partial x} \tag{9}$$

식 (8)과 (9)를 사용하여 지배방정식과 관련 경계조건식을 이동좌표계에서  $\psi$ 에 대한 미분식으로만 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \text{ on } z = -h \tag{11}$$

$$-\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + C\right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \text{ on } z = \zeta \tag{12}$$

$$\zeta + \frac{1}{2g} \left[ \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + C\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 \right] = B, \text{ on } z = \zeta \tag{13}$$

식 (12)와 (13)의 해면 경계조건에서 해면  $\zeta$ 는  $x$ 만의 함수가 되고 새로운 Bernoulli 상수( $B$ )는 파속의 제곱항을 포함한다. 파랑의 진행에 따라 파형이 변하지 않으므로 파장 ( $L$ )에 주기성을 가진다. 따라서 다음과 같은 측면조건을 부여된다.

$$\psi(x + L, z) = \psi(x, z) \tag{14}$$

기존문헌에 사용된 유량함수는 총 유량함수  $\hat{\psi}(x, z)$ 로 이를 사용하면 자유수면 경계조건에서 항의 개수가 줄어든다. 예를들면 Dean과 Dalrymple(1984)을 따라 다음의 총 유량함수  $\hat{\psi}(x, z)$ 를 사용한다.

$$\hat{\psi}(x, z) = Cz + \psi(x, z) \tag{15}$$

(15)의 우변 첫 항은 좌표계 변환에 의해 생긴 상수이고 둘째 항은 앞에서 언급한 것과 같이

파랑에 의해 생성된 유량함수이다. 식 (15)를 위의 경계치 문제에 대입하여 총 유량함수로 표시한 경계치 문제는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = 0, \text{ on } z = -h \tag{17}$$

$$-\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}, \text{ on } z = \zeta \tag{18}$$

$$\zeta + \frac{1}{2g} \left[ \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right)^2 \right] = B, \text{ on } z = \zeta \tag{19}$$

$$\hat{\psi}(z+L, z) = \hat{\psi}(x, z) \tag{20}$$

식 (18)로 주어진 정력학적 자유수면 경계조건은 Rienecker과 Fenton(1981)가 사용한 경계조건과는 형태가 상이하나 두 조건은 동일한 식임을 우선 밝히고 이를 제 3장에서 증명하기로 한다.

결국 파랑에 의해 생성된 유량함수를 구하기 위해 식 (16)~(20)로 주어진 경계치 문제를 풀면 된다. 본 논문에서는 加重殘差法(method of weighted residuals)에 의해 주어진 문제의 해를 구한다. 이 방법에서는 적합한 既知의 기저함수(basis function)에 未知常數를 곱한 항들의 유한급수 형태를 근사해로 정해 주어진 경계치 문제로 부터 미지상수를 구하게 된다. 가중잔차법은 근사해를 구성하는 방법에 따라 영역 기법(interior method), 경계기법(boundary method) 그리고 이 두 방법을 모두 사용하는 혼합기법(mixed methods)으로 분류된다(Ames, 1977). 여기서는 기저함수가 지배방정식을 만족하나 일부 경계조건을 만족하지 않는 경계기법을 사용한다.

또한 구성된 근사해에서 미지수를 구하는 방법에도 collocation 방법, 최소자승법 방법, Galerkin 방법 등 여러가지 방법이 있다. 이 중 제 3장에 최소자승법 방법을 사용하여 미지수를 구하는 방법을 기술하고자 한다.

### 3. 최소자승법에 의한 수치모형

#### 3.1 N차 유량함수

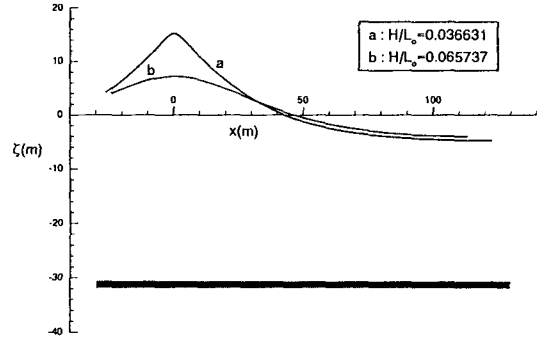


Fig. 2. Properties of nonlinearity.  
Wave period(T)=13.97 sec; h/L₀=0.1.

비선형 파랑이론을 유도하기 전에 우선 선형과 이론의 유량함수 형태를 분석한 후 이를 이용하여 비선형 파랑의 유량함수로 확장하는 문제를 다루기로 한다. 이동좌표계에서 선형과 이론에 의한 파고 H의 총 유량함수는 식 (21)로 주어진다(Dean과 Dalrymple, 1984).

$$\hat{\psi}(x, z) = Cz - \frac{Hg}{2\sigma} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \cos kx \tag{21}$$

여기서 파수 k는 2π/L이고 각주파수 σ는 2π/T로 각각 정의된다. 식 (21)의 형태를 감안하여 N개의 기저함수를 갖는 N차 유량함수를 식 (22)와 같이 정의할 수 있다.

$$\hat{\psi}(x, z) = Cz - \sum_{n=1}^N \frac{\sinh kn(h+z)}{\cosh knh} \cos knx \tag{22}$$

그러면 N=1인 경우에 미지수 A₁을 Hg/2σ로 취하면 식 (22)은 선형파의 유량함수인 식 (21)이 된다. 한편 그림 2에 도시한 것과 같이 비선형성이 강한 파랑일수록 마루가 뽀족하고 파곡이 매우 평탄한 특징이 있어 고차의 harmonic 성분이 포함되어야 하므로 식 (22)는 올바른 형태의 비선형 유량함수임을 알 수 있다.

한편 Dean 등은 기저함수의 분모를 포함하지 않은 유량함수를 사용하였으나 이 경우에는 심해역으로 갈수록 해를 얻을 수 없음이 지적되었다. 이 문제를 해결하기 위한 방안으로 Rienecker와 Fenton(1981)은

모를 추가하여 안정한 해를 얻게 되면서 뒤에서 밝히겠지만 이로 인해 ;

매우 복잡하게 되나 본 논문에서는 분모를 추가한 형태를 사용하였다.

식 (22)로 정의된 유량함수는 지배방정식 (16)과 저면경계 조건식 (17) 그리고 측면 경계조건식 (20)을 만족함을 쉽게 증명할 수 있다. 또한 기존 연구에서는 정력학적 경계조건식 (18)도 만족하는 것(Dean과 Dalrymple, 1984; Huang과 Hudspeth, 1984)으로 기술하였으나 이를 구체적으로 나타내지 않았으므로 여기서 이를 증명하기로 한다.

이동좌표계에서는 흐름이 정상류로 되어 임의의 점  $x$ 에서 수직단면(저면으로부터 해면까지)의 단위 폭당 통과하는 유량  $Q$ 는 일정하다.

$$Q = \hat{\psi}(x, \zeta) - \hat{\psi}(x, -h) \tag{23}$$

식 (23)의 우변 둘째항은 상수이며 Rienecker과 Fenton은 좌표계의 원점을 저면에 놓아 이 기준값을 0으로 정하였다. 따라서 식 (23)은 Rienecker과 Fenton의 경계조건이 된다. 식 (23)과 앞에서 부여한 식 (18)이 동일한 식임을 증명하기로 하자. 이제 해면  $\zeta$ 는  $x$ 만의 함수가 되므로 식 (23)을  $x$ 에 대해 미분하여 정리하면 식 (24)를 얻게 된다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \left[ -C + \sum_{n=1}^N A_n k n \frac{\cosh kn(h+\zeta)}{\cosh nh} \cos knx \right] = \sum_{n=1}^N A_n k n \frac{\cosh kn(h+\zeta)}{\cosh nh} \cos knx \tag{24}$$

한편 식 (22)를  $x, z$ 에 대해 각각 미분하여  $z = \zeta$ 를 대입하고 이를 식 (18)에 대입하면 식 (24)를 얻게된다. 그러므로 식 (22)로 표시된 유량함수는 정력학적 경계조건을 만족하며 이 근사해는 동력학적 경계조건을 제외한 모든 식을 만족한다.

식 (22)에 포함된 미지수를 명시하면 다음과 같다. 앞에 언급한 바와 같이  $A_n$ 은 미지수이며 파수(또는 파속)도 미지수가 된다. 이는 주기가 주어지면 파속은 파수로 나타낼 수 있기 때문이다. 마지막 미지수는 해면의 유량함수  $\hat{\psi}_s$ 이며 식 (25)로 주어진다.

$$\hat{\psi}_s = C\zeta - \sum_{n=1}^N A_n \frac{\cosh kn(h+\zeta)}{\cosh knh} \cos knx \tag{25}$$

(22)를 식 (19)에 대입하면 위에 언급한 미지수 그리고  $\hat{\psi}_s$ 를 포함하는 식이 된다. 식 (22)는

식

근사해이므로 식 (19)를 가장 잘 만족시키는 미지수를 최소자승법으로 구하는 방법을 다음 절에 기술한다.

### 3.2 최소자승법

파일 구조물과 같은 연안 구조물의 설계에서는 설계파랑(design wave)의 제원으로 부터 파랑의 유속을 구한 뒤 이로부터 파력을 계산한다. 설계파랑의 제원으로 수심, 파고 그리고 주기가 주어지게 된다. 여기서 다물 설계파랑은 파곡( $x=L/2$ )을 지나는 수직 단면에 대칭이므로  $x$ 의 범위를 파마루( $x=0$ )부터 파곡까지만 생각한다.

파마루에서의 해면을  $\zeta_C$ 로, 파곡에서는  $\zeta_T$ 로 각각 나타내면 파고는 식 (26)으로 정의된다.

$$H = \zeta_C - \zeta_T \tag{26}$$

비선형성이 강한 파랑은 파고가 수심의 상당 부분에 해당하므로 수심을 식 (27)로 주어지는 평균수심으로 정의한다.

$$\frac{2}{L} \int_0^{L/2} \zeta(x) dx = 0 \tag{27}$$

그러나 식 (27)은 적분구간의 상단에 미지수가 있어 미지수에 대해 미분하는 경우 Leibnitz 공식을 사용해야 한다. 이를 피하기 위해  $2\pi x/L = \theta$ 을 사용하여 변수변환하면 적분구간이 상수로 바뀌어 계산이 용이하다.

근사식 (22)에 포함된 미지수가 동력학적 경계조건을 가장 잘 만족하도록 정하는 방법으로 최소자승법을 사용하고자 하나 미지수들은 식 (26)과 (27)의 조건식 역시 만족해야 한다. 따라서 위에서 기술한 문제는 조건식을 가진 최소화 문제로 바뀌게 된다. 이를 위해 Lagrange Multipliers  $\lambda_1, \lambda_2$ 를 도입하면 최소화할 목적함수(objective function)은 식 (28)로 주어진다(Greenberg, 1978).

$$O_f(A_n, k, \hat{\psi}_s, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (B - \bar{B})^2 d\theta - \lambda_1 (\zeta_C - \zeta_T - H) - \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^\pi \zeta d\theta \tag{28}$$

여기서

$$B(A_n, k, \zeta) =$$

$$\zeta + \frac{1}{2g} \left[ \left( \sum_{n=1}^N A_n k n \frac{\cosh kn(h+\zeta)}{\cosh knh} \cos n\theta - \frac{2\pi}{kT} \right)^2 + \left( \sum_{n=1}^N A_n k n \frac{\cosh kn(h+\zeta)}{\cosh knh} \sin n\theta \right)^2 \right] \quad (29)$$

$$\zeta(A_n, k, \hat{\psi}_s) = \frac{kT}{2\pi} \hat{\psi}_s + \frac{T}{2\pi} \sum_{n=1}^N A_n k \frac{\sinh kn(h+\zeta)}{\cosh knh} \cos n\theta \quad (30)$$

$$\bar{B} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi B d\theta \quad (31)$$

식 (28)에 도입된 평균 Bernoulli 상수( $\bar{B}$ )는 수치계산의 안정을 증대시키기 위해 반드시 필요하며 그 이유는 뒤로 미루고자 한다.

조건식의 첨가로 인해 식 (28)에 포함된 미지수의 총 갯수는  $N+4$ 개가 되며  $A_n(n=1, \dots, N)$ ,  $k$ ,  $\hat{\psi}_s$ ,  $\lambda_1$  그리고  $\lambda_2$ 이다. 근사해에 의한 오차의 제곱을 최소화 하기 위해 미지수 각각을 변수로 보고 목적함수들 이들에 대해 미분하여 零이 되게 하는 최소자승법을 사용하면 다음 식들이 얻어진다. 미지수  $A_n, k, \hat{\psi}_s$ 를 새로운 미지수  $X_n(n=1, \dots, N+2)$ 로 표기하면 수식 전개가 간단 명료해진다.

$$\frac{\partial O_f}{\partial X_n} = 0; \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (B - \bar{B}) \left( \frac{\partial B}{\partial X_n} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_n} \right) d\theta - \lambda_1 \left( \frac{\partial \zeta_C}{\partial X_n} - \frac{\partial \zeta_T}{\partial X_n} \right) - \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial X_n} d\theta = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial O_f}{\partial \lambda_1} = 0; \zeta_C - \zeta_T - H = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial O_f}{\partial \lambda_2} = 0; \int_0^\pi \zeta d\theta = 0 \quad (34)$$

식 (32)에서  $B$ 는  $\zeta$ 의 함수이므로 미지수  $X_n$ 에 대한 미분을 각각 풀어 쓰면 식 (35)가 된다.

$$\frac{\partial B}{\partial X_n} = \frac{\partial B}{\partial A_n} + \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial A_n}, \quad (n=1, \dots, N). \quad (35a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial X_{N+1}} = \frac{\partial B}{\partial k} + \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial k} \quad (35b)$$

$$\frac{\partial B}{\partial X_{N+2}} = \frac{\partial B}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \psi_s} \quad (35c)$$

그리고  $\bar{B}$ 도 식 (35)와 동일한 형태의 미분식으로 나타내져야 한다.

식 (35)의 해면변위를 미분할 때 주의를 기울여야 한다. 식 (30)에서 알 수 있듯이 해면  $\zeta$ 가 기저함수에도 포함되어 있고 이는 또 미지수의 함수이기 때문이다. 이에 대한 간단한 모형으로  $y=g(x, y(x))$  형태의 식을  $x$ 에 대해 미분하는 경우를 먼저 살펴보자: 예를 들면  $y=xy^2$ . 우선 이 식을  $y$ 에 대해 풀면  $y=1/x$  또는 0으로 주어진다. 결과식을  $x$ 에 대해 미분하면  $dy/dx$ 는  $-1/x^2$  또는 0이 된다. 한편 별개의 방법인 chain rule을 사용하면

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} \quad (36a)$$

가 되며 이를 정리하면 식 (36b)를 얻는다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-2xy} \quad (36b)$$

그리고 나서 식 (36b)의  $y$ 에  $1/x$  또는 0을 대입하면 위에서 얻은 결과와 같게 된다.

위와 같은 방법이  $\zeta$ 를  $A_n, k$  또는  $\hat{\psi}_s$ 에 대해 미분할 때 적용되어야 한다.  $\zeta$ 에 대한  $A_n$ 와  $\hat{\psi}_s$ 에 대한 미분 결과식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial A_n} = \frac{\frac{\sinh kn(h+\zeta)}{\cosh knh} \cos n\theta}{C-u} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \psi_s} = \frac{1}{C-u} \quad (38)$$

여기서

$$u = \sum_{m=1}^N A_m k m \frac{\cosh km(h+\zeta)}{\cosh kmh} \cos m\theta$$

그리고 제 3.1절에 지적한 바와 같이 기저함수 분모의  $\cosh knh$ 으로 인해 특히  $k$ 에 대한 미분은 더 복잡하게 된다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial k} = \frac{C\zeta}{C-u} + \sum_{m=1}^N \frac{km}{C-u} \frac{\cosh km(h+\zeta)}{\cosh kmh} \times \cos m\theta \{h+\zeta - h \tanh km(h+\zeta) \tanh kmi\} \quad (39)$$

식 (22)에 포함된 미지수가 동력학 경계조건을

하기 위해 최소자승법을 사용하면 식 (32)~(34)로 구성되는 연립방정식을 얻게 된다. 이 연립방정식을 풀면 구하고자 하는 해인 유량함수를 얻게 되고 이로부터 파랑의 특성인 유속과 압력 등을 구할 수 있다.

### 3.3 비선형 연립방정식의 선형화

제 3.2절의 연립방정식은 변수인 미지수의 곱이 모든 방정식에 존재하므로 비선형이다. 비선형 방정식의 수치계산은 반복법을 사용하며 가장 간단한 방법은 수렴속도가 늦은 단점이 있다. 본 논문에서는 비교적 수렴속도가 빠른 Newton방법을 사용하였다(Hildebrand, 1976). 이 방법은 Taylor 급수전개로부터 유도되며 선형항까지만 취해 단계적으로 계산한다. 즉 식 (32)~(34)의  $(i+1)$  단계의 변수를  $(i)$  단계의 값으로 표시하면 다음과 같은 식들이 얻어진다.

$$B^{i+1} \equiv B(X_n + \Delta X_n) \approx B^i + \sum_{n=1}^{N+2} \left( \frac{\partial B}{\partial X_n} \right)^i \Delta X_n \quad (40a)$$

$$\zeta^{i+1} \approx \zeta^i + \sum_{n=1}^{N+2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial X_n} \right)^i \Delta X_n \quad (40b)$$

$$\lambda_1^{i+1} \approx \lambda_1^i + \Delta \lambda_1 \quad (40c)$$

$$\lambda_2^{i+1} \approx \lambda_2^i + \Delta \lambda_2 \quad (40d)$$

$$\left( \frac{\partial B}{\partial X_n} \right)^{i+1} \approx \left( \frac{\partial B}{\partial X_n} \right)^i + \sum_{m=1}^{N+2} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial X_n \partial X_m} \right)^i \Delta X_m \quad (40e)$$

식 (40)에서  $\Delta$ 는 미소 증분을 의미한다. 마찬가지로  $\bar{B}$ 에 관련된 항들도 식 (40)과 유사한 방법을 사용하여 식 (32)~(34)에 대입하여 선형항만을 모으면 미지수의 증분에 대한  $(i)$  단계의 값으로만 표시되는 연립방정식을 얻는다.

$$\left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[ \left( \frac{\partial B}{\partial X_n} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_n} \right) \left( \frac{\partial B}{\partial X_m} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_m} \right) + (B - \bar{B}) \left( \frac{\partial^2 B}{\partial X_n \partial X_m} - \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial X_n \partial X_m} \right) \right] d\theta + \left( \frac{\partial^2 \zeta_C}{\partial X_n \partial X_m} - \frac{\partial^2 \zeta_T}{\partial X_n \partial X_m} \right) \Delta \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_n \partial X_m} d\theta \right\} \Delta X_m + \left( \frac{\partial \zeta_C}{\partial X_n} - \frac{\partial \zeta_T}{\partial X_n} \right) \Delta \lambda_1 + \left( \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial X_n} d\theta \right) \Delta \lambda_2 = - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (B - \bar{B}) d\theta$$

$$\left( \frac{\partial B}{\partial X_n} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_n} \right) d\theta - \lambda_1 \left( \frac{\partial \zeta_C}{\partial X_n} - \frac{\partial \zeta_T}{\partial X_n} \right) - \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial X_n} d\theta \quad (41)$$

$$\left( \frac{\partial \zeta_C}{\partial X_m} - \frac{\partial \zeta_T}{\partial X_m} \right) \Delta X_m = \zeta_C - \zeta_T - H \quad (42)$$

$$\left( \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial X_m} d\theta \right) \Delta X_m = - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \zeta d\theta \quad (43)$$

종합하면 선형화한 결과  $N+4$ 개의 미지수( $\Delta A_n (n=1, \dots, N)$ ,  $\Delta k$ ,  $\Delta \psi_s$ ,  $\Delta \lambda_1$ ,  $\Delta \lambda_2$ )에 대한 同數의 연립방정식이 구성되어 미지수를 구할 수 있다. 즉 식 (41)에서  $N+2$ 개의 방정식과 식 (42)과 (43)로부터 각각 한개씩의 선형방정식이 얻어진다.

### 3.4 수치모형

제 3.3절에서 언급한 선형화의 방법은 미지수의 선형항 전부를 나타낸 식이며 식 (41)에 2차 미분항이 존재하므로 계산과정이 매우 복잡하며 소요 시간도 많이 든다. 따라서 기존의 Dean 모형에서는 2차 미분항을 무시한 식 (44)를 사용하였다.

$$\left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\partial B}{\partial X_n} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_n} \right) \left( \frac{\partial B}{\partial X_m} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_m} \right) d\theta \right\} \Delta X_m + \left( \frac{\partial \zeta_C}{\partial X} - \frac{\partial \zeta_T}{\partial X_n} \right) \Delta \lambda_1 + \left( \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial X_n} d\theta \right) \Delta \lambda_2 = - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (B - \bar{B}) \left( \frac{\partial B}{\partial X_n} - \frac{\partial \bar{B}}{\partial X_n} \right) d\theta - \lambda_1 \left( \frac{\partial \zeta_C}{\partial X_n} - \frac{\partial \zeta_T}{\partial X_n} \right) - \frac{\lambda_2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial \zeta}{\partial X_n} d\theta \quad (44)$$

식 (44)은 식 (41)에 비해 계산과정이 간단하나 완전한 Newton방법을 사용하지 않으므로써 수렴속도가 늦은 단점과 쇄파에 가까운 경우 해를 구할 수 없는 경우가 생길 것으로 추정된다. Dean 모형은 쇄파에 가까운 경우 보다 안정적인 해를 얻기 위해 계산된 미소증분에 damping 상수(D)를 곱해 그 일부만을 앞 단계에서 구한 값에 더하는 방법을 사용하였다. 따라서 식 (41)과 식 (44)은 비선형 연립방정식의 해를 구하는 방법상에 차이가 있으며 식 (44)은 쇄파에 가까운 경우를 제외하면 수렴속도만이 늦을 것으로 사료된다. 여기서는 식 (42)~(44)으로 주어지는 모

극대값을 보이는 가에 초점을 맞추었고 이점을 검토하였다.

식 (44)에서 평균 Bernoulli 상수( $\bar{B}$ )의 도입에 대한 필요성을 추측할 수 있다. 어떤 미지수의 값이 연립 방정식에서 상대적으로 아주 큰 값을 가지는 경우 이로 인해 연립방정식의 해는 상당한 수치오차를 받게 된다. 즉 연립방정식의 행렬이 ill-conditioned의 행렬로 되게 된다. 식 (44)의 경우에는 파수에 해당하는 성분들이 매우 큰 것으로 나타났다. 이 점을 보완하기 위하여 목적함수에  $\bar{B}$ 를 포함함으로써 안정하고 수렴이 빠른 수치해를 얻게 된다.

선형화된 연립방정식인 식 (42)~(44)은 적분식으로 되어 수치적으로만 풀 수 있다. 이를 위해 적분구간( $0 \leq x \leq \pi$ )을  $M+1$ 개 격자점으로  $M$ 개의 균등한 세부구간으로 만들어 Simpson의 수치적분법을 사용하였다. 수치적분에는 각 격자점에서의 해면의 값이 필요하며 격자점  $j$ 에서  $i$ 단계의 해면  $\zeta_j^i$ 은 Newton 방법에 의해 식 (45)로부터 계산하였다.

$$\zeta_j^{i+1} = \zeta_j^i - \frac{f(\zeta_j^i)}{df(\zeta_j^i)/d\zeta_j^i}$$

$$f(\zeta) = \frac{\psi_s}{C} + \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{C} \frac{\sinh kn(h+\zeta)}{\cosh knh} \cos n\theta_j - \zeta \quad (45)$$

식 (45)에서  $A_n$ ,  $k$ ,  $\psi_s$ 는 주어진 값이고 단계  $i$ 는 연립방정식의 단계와는 별개의 단계이다. 따라서 이 경우에도 별도의 해면 초기값과 허용오차가 필요하며 초기값은 연립방정식의 전 단계에서 주어진 해면값을 초기값으로 사용하였다. 그리고 허용오차는 식 (46)으로 주어진 값을 사용하였다.

$$\frac{|\zeta_j^{i+1} - \zeta_j^i|}{\zeta_j^i} \leq 10^{-4} \quad (46)$$

수치 계산은 주어진 허용오차보다 작으면 종료하였고 평균해면 오차( $E_L$ ), Bernoulli상수 오차( $E_B$ ) 그리고 파고 오차( $E_H$ )의 절대값의 합을 오차( $E$ )로 간주하였고 다음 식 (47)으로 각각 정의하였다.

$$E = |E_H| + |E_B| + |E_L| \leq 10^{-4}$$

$$E_H = H - \zeta_c - \zeta_i$$

$$E_L = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (B - \bar{B})^2 d\theta}$$

$$E_L = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \zeta d\theta \quad (47)$$

식 (47)에서 허용오차는 오차 성분  $E_B$ 에 의해 크게 좌우되는 것으로 밝혀졌다.

파고가 크거나 장파인 경우 선형파랑의 값은 차이가 크므로 초기값으로 적절하지 않아 해를 구하기 어렵기 때문에 변형된 선형파랑의 값을 사용하였다. 즉  $A_1$ 을 제외한  $A_n$ 의 값은 0으로 두고  $A_1$ 은 식 (48)로

$$A_1 = \frac{gH}{2\alpha} \approx \frac{HC \cosh kh}{2 \sinh k \left( h + \frac{H}{2} \right)} \quad (48)$$

파수  $k$ 는 Dean 모형을 따라 선형분산식으로부터 구한 파수  $k_0$ 를 사용하여 식 (49)로 각각 계산하였다.

$$k = \frac{k_0}{1 + 0.656 \left( \frac{H/T^2}{0.266 \tanh(2.93 h/T^2)} \right)^2} \quad (49)$$

수치모형의 계산과정을 종합하면 다음과 같다. 위에 언급한 초기조건을 사용하여 해수면을 식 (45)로부터 구하고 선형 연립방정식 (42)~(44)을 풀어 미지수의 증분을 계산한다. 계산된 증분으로부터 다음 단계의 미지수를 구하여 새로운 해수면을 계산하면 다음 단계의 증분을 계산할 수 있다. 이러한 과정을 허용오차에 이를 때까지 반복한다.

#### 4. 수치결과 및 분석

Dean(1974)은 유량함수 파랑이론을 사용하여 천해에서 심해에까지 40개의 파랑에 대한 결과를 제시하여 많은 연구자들이 모형의 결과를 비교하고 검증하는데 이용한다. 그 한 예로 Huang과 Hudspeth(1984)는 Dean의 모형을 발전시킨 Dalrymple모형을 사용한 결과와 Chaplin모형(1980)과 정밀도를 비교하기 위해 Bernoulli상수 오차를 제시하였다. 본 논문에서는 Huang과 Hudspeth의 결과와 비교하고 파고증가에 따른 파장의 변화를 나타내고자 한다.

천해역의 파랑에 대한 유량함수 파랑이론 결과는 경우에 따라 유일한 해를 얻을 수 없음이 지적되었다. Dalrymple과 Solari(1986; Sobey, 1988). 유일한 해를 찾기 위해 여러 가지 방법이 제시되었으나



**Table 1.** Effect of damping coefficients(D) on solutions; Maximum order of theory=60, Number of points=201,  $h/L_0=0.1$ ,  $H/L_0=0.054927$

N	$L/L_0$	$E_B$	D	$L/L_0$	$E_B$	D	$L/L_0$	$E_B$	D	$L/L_0$	$E_B$	D
5	0.783264	0.1447E-01	1.0	0.783275	0.1516E-01	0.5	0.785636	0.4945E+00	0.1	0.783264	0.1447E-01	0.7
10	0.783156	0.3604E-03	1.0	0.783156	0.3628E-03	0.5	0.784021	0.2259E+00	0.1	0.783156	0.3604E-03	0.6
15	0.783154	0.6604E-05	1.0	0.783155	0.5409E-04	0.5	0.783457	0.9376E-01	0.1	0.783155	0.8603E-04	0.5
20	0.783154	0.7512E-05	1.0	0.783155	0.3144E-04	0.5	0.783260	0.3719E-01	0.1	0.783155	0.4936E-04	0.5
25	0.783154	0.1294E-06	1.0	0.783154	0.1742E-04	0.5	0.783191	0.1437E-01	0.1	0.783155	0.2734E-04	0.5
30	0.783154	0.2266E-08	1.0	0.783154	0.9481E-05	0.5	0.783167	0.5454E-02	0.1	0.783155	0.1488E-04	0.5
35	0.783154	0.4019E-10	1.0	0.783154	0.5097E-05	0.5	0.783159	0.2045E-02	0.1	0.783155	0.8002E-05	0.5
40	0.783150	0.7209E-12	1.0	0.783154	0.2715E-05	0.5	0.783156	0.7597E-03	0.1	0.783155	0.4263E-05	0.5
45							0.783155	0.2802E-03	0.1			
50							0.783155	0.1028E-03	0.1			
55							0.783155	0.7843E-04	0.1			
60							0.783155	0.7362E-04	0.1			

**Table 2.** Effect of number of points( $N_p$ ) on solutions; Maximum order of theory=70,  $h/L_0=0.1$ ,  $H/L_0=0.065737$

N	$N_p=401$		$N_p=201$		$N_p=141$	
	$L/L_0$	$E_B$	$L/L_0$	$E_B$	$L/L_0$	$E_B$
5	0.809267	0.147336E+00	0.809268	0.147346E+00	0.809268	0.147360E+00
10	0.806096	0.405204E-01	0.806096	0.405236E-01	0.806096	0.405272E-01
15	0.805412	0.115409E-01	0.805412	0.115422E-01	0.805412	0.115334E-01
20	0.805312	0.333120E-02	0.805312	0.333097E-02	0.805312	0.330275E-02
25	0.805298	0.968842E-03	0.805298	0.967732E-03	0.805298	0.931132E-03
30	0.805296	0.283611E-03	0.805296	0.281706E-03	0.805296	0.258753E-03
35	0.805295	0.934055E-04	0.805295	0.913960E-04	0.805295	0.964776E-04
40	0.805295	0.941823E-04	0.805295	0.919753E-04	0.805295	0.939327E-04
45	0.805295	0.721676E-04	0.805295	0.702860E-04	0.805295	0.720362E-04
50	0.805295	0.534204E-04	0.805295	0.519957E-04	0.805295	0.532965E-04
55	0.805295	0.392004E-04	0.805295	0.381543E-04	0.805295	0.391143E-04
60	0.805295	0.286341E-04	0.805295	0.278651E-04	0.805295	0.285638E-04
65						
70						

N	$N_p=71$		$N_p=51$		$N_p=31$	
	$L/L_0$	$E_B$	$L/L_0$	$E_B$	$L/L_0$	$E_B$
5	0.809270	0.147431E+00	0.809270	0.147294E+00	0.809238	0.142119E+00
10	0.806089	0.399229E-01	0.806093	0.374491E-01	0.806244	0.409163E-01
15	0.805421	0.104550E-01	0.805469	0.113491E-01	0.805302	0.133039E-01
20	0.805326	0.327084E-02	0.805314	0.366551E-02	0.805272	0.104591E-02
25	0.805301	0.100097E-02	0.805292	0.949111E-03	0.805287	0.588502E-04
30	0.805296	0.312924E-03	0.805295	0.109527E-03	0.805289	0.335173E-04
35	0.805295	0.975869E-04	0.805295	0.802528E-04	0.805276	0.180186E-04
40	0.805295	0.903126E-04	0.805295	0.599380E-04	0.805267	0.994914E-05
45	0.805295	0.672097E-04	0.805296	0.443836E-04	0.805253	0.549566E-05
50	0.805295	0.494880E-04	0.805208	0.326787E-04	0.805171	0.585428E-05
55	0.805295	0.362689E-04	0.805120	0.319474E-02		
60	0.805296	0.264783E-04	0.804937	0.102772E-01		
65			0.806817	0.568515E-01		
70			0.807555	0.258294E-01		

본 논문에서는 Dalrymple과 Solana의 제안 중 하나인 저차로부터 점차적으로 차수를 증가시키는 방법을 사용하였다. 본 논문에서는 5차 이론으로부터 시작하여 5차의 간격으로 점차적으로 증가시켜 해를 구하였다.

제 3.4절에서 언급한 바와 같이 본 모형은 비선형 연립방정식의 선형화 과정에서 일부 만을 사용하였기 때문에 경우에 따라 damping 상수를 사용해야 할 필요가 있다. damping 상수가 수치해의 수렴속도 및 정밀도에 미치는 영향을 규명하기 위해 Dean의 표 가운데 Case 6C에 대한 결과를 표 1에 나타내었다 (제원: 표 3 참조). 표에서 N은 유량함수 이론의 차수, 심해파장 비는  $L/L_0$ , Bernoulli상수 오차는  $E_B$  그리고 damping 상수는 D로 표기하였다.

수치해가 수렴하면 차수의 증가에 따른 유량함수 진폭  $A_n$ 의 변화는 크지 않는 것으로 나타났다. 따라서 초기 차수는 5차부터 시작하고 주어진 차수에 최대 반복횟수는 10번으로 정해 다음 차수로 넘어가는 방법을 사용하였기 때문에 제 3장에서 언급된 모형의 종료점 이외에 주어진 차수에서 첫번째 오차가 허용 오차보다 작은 경우가 연속 5번이 되면 프로그램을 종료하는 방법을 추가하였다. 표에서 첫 세 경우는 D를 고정시킨 경우이며 D가 감소하면 수렴속도도 늦어지는 것을 알 수 있다. 이를 감안하여 마지막 경우는 D의 값을 1로부터 시작하여  $E_B$ 값이 전 반복 단계보다 큰 경우에는 0.1씩 감소시키는 방법을 사용하여 계산한 결과이다. 이 방법의 결과를 다른 경우와 비교할 때 수렴속도도 비교적 빠르고 보다 안정한 해를 얻을 수 있어 이후의 계산에는 이 방법이 사용되었으며 쇠파에 가까운 경우 파고가 커서 해를 얻을 수 없는 경우에는 초기 D의 값을 1보다 작은 값으로 부터 시작하였다.

최소자승법을 이용한 유량함수 이론은 적분이 포함되고 적분값이 수치해에 영향을 준다. 이를 보이기 위해 최대 차수를 고정하고 적분구간의 격자점 갯수 ( $N_p$ )을 변화시켜 계산한 결과를 표 2에 나타내었다. 이 결과는 Case 6D의 입력조건을 사용하였고 앞에서 언급한 프로그램 종료방법에 따라 70차 이론 이하에서 종료하기 때문에 최대 차수를 70으로 정하였고 초기 damping 상수 1을 사용하였다. 표에 나타난 바와 같이 최대 차수의 2배 이상의 격자점을 취한 경우 수치해는 거의 비슷하나 격자점의 수가 작아질수록 수치해의

**Table 3.** Numerical solutions of the 30 waves tabulated by Dean(1974) and of the 10 cases(D) added by Chaplin(1980)

Case	N	$h/L_0$	$H/L_0$	$L/L_0$	$\zeta_c/H$	L/h
1A	45	0.002	0.000390	0.119589	0.909492	59.79
1B	65	0.002	0.000779	0.127926	0.938795	63.96
1C	70	0.002	0.001169	0.135485	0.953610	67.74
1D	95	0.002	0.001408	0.139238	0.960751	69.62
2A	40	0.005	0.000974	0.186445	0.857051	37.29
2B	50	0.005	0.001946	0.198859	0.903663	39.77
2C	60	0.005	0.002925	0.210519	0.927348	42.10
2D	75	0.005	0.003469	0.215894	0.937816	43.18
3A	35	0.010	0.001948	0.259467	0.798579	25.95
3B	45	0.010	0.003886	0.275765	0.864216	27.58
3C	55	0.010	0.005821	0.291591	0.897816	29.16
3D	70	0.010	0.006978	0.299485	0.913937	29.95
4A	35	0.020	0.003902	0.358612	0.722604	17.93
4B	40	0.020	0.007772	0.379135	0.809541	18.96
4C	45	0.020	0.011678	0.400838	0.857847	20.04
4D	65	0.020	0.013998	0.411682	0.881468	20.58
5A	35	0.050	0.009752	0.541054	0.622847	10.82
5B	35	0.050	0.019505	0.566044	0.715653	11.32
5C	40	0.050	0.029163	0.597609	0.784615	11.95
5D	70	0.050	0.035097	0.613638	0.824466	12.27
6A	30	0.100	0.018312	0.718140	0.570872	7.18
6B	35	0.100	0.036631	0.743848	0.641529	7.44
6C	40	0.100	0.054927	0.783154	0.713325	7.83
6D	60	0.100	0.065737	0.805295	0.761769	8.05
7A	30	0.200	0.031267	0.899312	0.544301	4.50
7B	35	0.200	0.062490	0.931053	0.593040	4.66
7C	35	0.200	0.093785	0.981156	0.652704	4.91
7D	55	0.200	0.112043	1.011617	0.701981	5.06
8A	30	0.500	0.041995	1.013133	0.533860	2.03
8B	30	0.500	0.083974	1.059139	0.569636	2.12
8C	35	0.500	0.125988	1.125261	0.611428	2.25
8D	40	0.500	0.151278	1.169216	0.645568	2.34
9A	30	1.000	0.042615	1.017456	0.533682	1.02
9B	30	1.000	0.085197	1.065169	0.568895	1.07
9C	35	1.000	0.128025	1.133727	0.609452	1.13
9D	40	1.000	0.152685	1.177352	0.640156	1.18
10A	30	2.000	0.042602	1.017454	0.533671	0.51
10B	30	2.000	0.085218	1.065211	0.568908	0.53
10C	35	2.000	0.127534	1.132886	0.608910	0.57
10D	40	2.000	0.153361	1.178530	0.641155	0.59

정밀도가 떨어져 해의 신뢰도가 상당히 떨어지게 된다. 반면에 격자점을 많이 취할수록 수치해의 신뢰도가 높아지나 계산시간이 많이 드는 단점이 있다.

정밀도와 계산시간을 감안하여 격자점의 갯수를  $N_p$ 의 2배로 정해 계산하는 것이 최적인 것으로 판

**Table 4.** Numerical solutions by Chaplin(1980), Huang and Hudspeth(1984) and present model for Case 3 and 7

Case 3		Chaplin		H & H		Present		
$h/L_o$	$H/L_o$	$L/L_o$	$\zeta_c/H$	$L/L_o$	$\zeta_c/H$	$L/L_o$	$\zeta_c/H$	N
0.010	0.005821	0.2916	0.8979	0.2918	0.8985	0.29159	0.89782	55
0.010	0.006978	0.2995	0.9141	0.2998	0.9153	0.29949	0.91394	70
0.010	0.007133	0.3003	0.9162	0.3004	0.9170	0.30028	0.91611	75
0.010	0.007288	0.3009	0.9185	0.3011	0.9195	0.30093	0.91833	80
0.010	0.007443	0.3014	0.9208	0.3017	0.9222	0.30138	0.92059	90
0.010	0.007520	0.3015	0.9221	0.3019	0.9238	0.30149	0.92174	95
0.010	0.007598	0.3014	0.9234	0.3020	0.9254	0.30151	0.92291	110
0.010	0.007675	0.3010	0.9250	0.3019	0.9275	0.30140	0.92404	130

Case 7		Chaplin		H & H		Present		
$h/L_o$	$H/L_o$	$L/L_o$	$\zeta_c/H$	$L/L_o$	$\zeta_c/H$	$L/L_o$	$\zeta_c/H$	N
0.200	0.099600	0.9918	0.6662	0.9918	0.6663	0.99182	0.66620	40
0.200	0.104530	1.0008	0.6788	1.0008	0.6790	1.00074	0.67883	40
0.200	0.108310	1.0071	0.6895	1.0072	0.6901	1.00705	0.68966	45
0.200	0.112020	1.0116	0.7020	1.0124	0.7057	1.01160	0.70190	55
0.200	0.114520	1.0111	0.7113	1.0135	0.7074	1.01158	0.71089	75*

\*denotes a local minimum in  $E_b$ .

단되며 최고 harmonic성분의 반 파장에는 3개의 격자점이 놓이게 된다.

앞에서 검토한 바에 기초한 최적 방법을 사용하여 10개 경우에 대한 40개 파랑의 결과를 표 3에 나타내었다. 표에 사용된 자료는 각 경우 중 파고가 가장 큰 파랑을 제외하면 Dean의 표에 제시된 자료와 같다. Chaplin(1980)이 지적한 바와 같이 각 경우에 대한 Dean의 최대 파랑은 쇄파고를 넘는 경우도 있어 Chaplin은 최대파랑의 90%에 해당하는 파랑에 대한 결과를 제시하였다. 표에서 최대 차수는 100으로 정하였고 격자점( $N_p$ )는 201개를 초기 damping 상수는 1을 각각 사용하였다.

표 3으로부터 다음과 같은 결론을 도출할 수 있다. 기존의 연구에서 지적한 바와 같이 Dean의 표에 제시된 결과는 너무 낮은 차수(21차 이하)를 사용하여 수치해의 정밀도가 떨어지는 것으로 확인되었다. 그림 2에서도 알 수 있듯이 동일한 조건에도 파고가 커질수록 보다 많은 파랑의 성분이 필요하며 표에서도 같은 결과를 보여주며 천해로 갈수록 많은 성분이 필요하다. 결국 파고가 클수록 그리고 천해로 갈수록 보다 고차의 성분이 필요하다.

마지막으로 본 모형과 유사한 모형의 결과들과 본 모형의 결과를 비교하여 본 모형의 정밀도를 평가하였다. 최소자승법을 이용한 모형의 결과들과 비교하여

Huang과 Hudspeth(1984)가 정리하였으며 이 결과들은 유량함수에 분모를 포함하지 않은 모형들로 파고가 상당히 큰 Case C이상의 결과들이다. 표 4에는 Huang과 Hudspeth 결과와 Chaplin(1980) 결과 및 본 모형의 결과를 비교하기 위해 수록하였다. 표에서 최대 차수는 200으로 정하였고 격자점( $N_p$ )는 401개를 사용하였다.

표에서 나타내고자 하는 가장 중요한 점은 파장이 쇄파 한계파고에 이르기 전에 극대값을 보이는 가에 있다. 본 모형의 결과는 이를 보여주나 Chaplin의 결과 만큼 현저하게 감소하지 않는 것으로 나타났다. Huang과 Hudspeth의 결과는 파장이 극대값에 이르기 전에도 다른 두 결과와 상당한 차이를 보이며 이는 유량함수의 차수(13차-27차)를 너무 낮게 사용한 것이 가장 큰 요인이라 추정된다. 반면에 Chaplin은 39차에서 49차를 사용한 반면에 본 결과는 최고 종료차수가 130차로 Chaplin의 결과 보다는 상당히 많은 차수가 사용된 것임을 알 수 있다. 본 결과는 극대값에 이르기 전에는 Chaplin의 결과와 동일한 값을 가지나 이후에는 완만한 감소 형태를 보이고 있다.

본 논문의 주요 관점인 파장의 파고에 따른 변화를 보다 세밀히 검토하기 위해 표 4에 사용한 입력자료 이외의 제원을 추가 사용하여 계산한 결과를 그림 3에 나타내었다. 계산에 사용된 경우는 세 경우로 Case

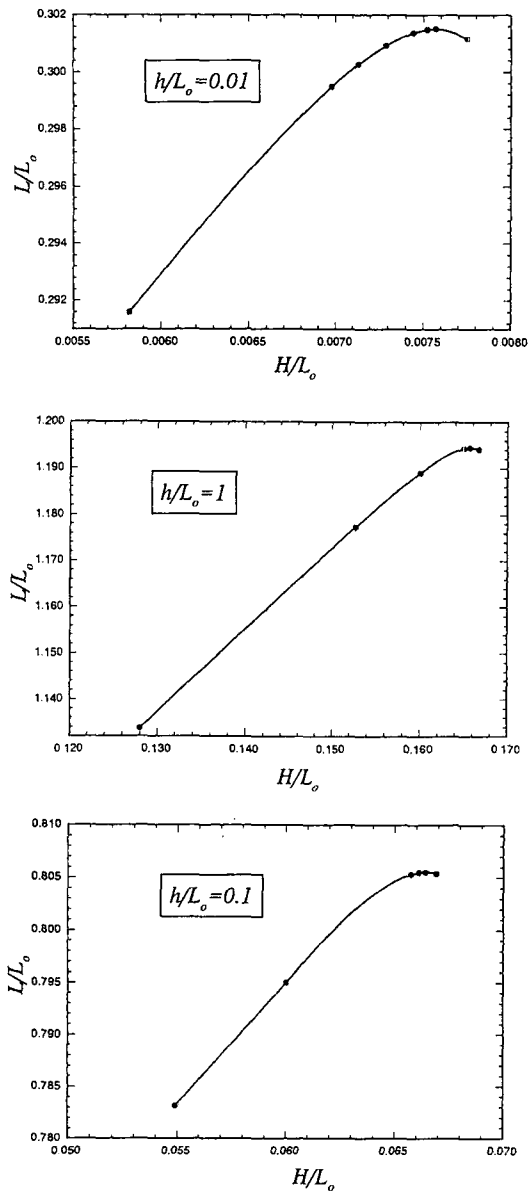


Fig. 3. Wave length variation with increasing wave heights.

3, 6 그리고 9로 천해로부터 심해까지 각 경우를 대표하도록 선정하였으며 입력제원은 상당히 큰 파고인 각 경우 C의 제원으로 부터 시작하여 안정한 해를 얻을 때까지 계산하였다. 쇄파고에 가까울수록 수치해는 상당히 불안정하게 되며 보다 안정한 값들을 얻기 위해 초기 damping 상수 0.5를 사용하였다. Case 3의 경우에는 최고 종료 차수가 170차까지 이

때문에 격자점을 401개로 사용하였으나 Case 6과 9는 100차이하에서 종료되어서 201개의 격자점을 사용하였다.

본 모형은 천해역으로 갈수록 파장의 극대점에 이른 후 감소하는 추세가 뚜렷이 나타나나 Chaplin의 결과만큼 현저하게 감소하지 않는 것으로 나타났다. 그림 3에서의 결론은 Dean의 모형을 발전시킨 본 모형도 쇄파 한계파고에 이르기 전에 파장의 극대값을 보이며 이전의 모형들이 이를 재현하지 못한 가장 큰 요인으로는 사용된 유량함수의 차수가 너무 낮은 것으로 판단되며 적분값을 계산하기 위해 취한 격자점 수가 너무 적은 것으로 사료된다.

### 5. 결 론

일정 형태의 비선형 파랑을 기술하기 위해 유량함수를 사용하여 파랑의 특성을 계산하였다. 동력학 경계조건 오차를 최소화 하기 위해 최소자승법을 사용하여 유량함수의 미지수를 구하는 본 방법은 Dean (1965)이 처음 제시한 모형의 개선된 형태라 할 수 있다. 정밀한 해를 구하기 위해 선행되어야 할 점들을 검토하였다. 첫째 비선형 연립방정식을 선형화하여 연립방정식을 풀 때 damping 상수가 수치해에 미치는 영향을 분석하여 적합한 방법을 제시하였다. 둘째 연립방정식에 포함된 적분값을 계산할 때 파랑 성분의 수와 격자점의 수가 수치해의 정밀도에 주는 영향을 분석하여 격자점의 수는 유량함수 최고 차수의 두배로 정하는 것이 적합함을 밝혔다.

공학이용에 편리하도록 Dean(1974)이 도표화한 40개의 파랑을 Chaplin이 수정 보완한 파랑제원에 대한 정밀한 수치해를 구해 이들의 특성을 도표화하였다. 이로부터 파고가 클수록 그리고 천해로 갈수록 보다 고차의 성분이 필요함을 밝혔다.

마지막으로 기존의 연구 결과에서 밝혀진 파장이 쇄파 한계파고에 이르기 전에 극대값을 보이는 것을 제시함으로써 본 모형의 정밀도를 검증하였다.

### 감사의 글

본 연구는 1994년 한국해양연구소에서 실시한 기본연구 (PE00462) 연구의 일부결과이며 연구비를 지원

를 드림

## 参考文献

- Ames, W.F., 1977. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2nd ed., Academic Press, New York.
- Cokelet, E.D., 1977. Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 286: 183-230.
- Chaplin, J.R., 1980. Developments of stream-function wave theory, *Coastal Engrg.*, 3: 179-205.
- Dalrymple, R.A. and Solana, P., 1986. Nonuniqueness in stream function wave theory, *Journal of Waterways, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, ASCE, 112(2): 333-337.
- Dean, R.G., 1965. Stream function representation of non-linear ocean waves, *J. Geophys. Res.*, 70(18): 4561-4572.
- Dean, R.G., 1974. Evaluation and development of water wave theories for engineering application. U.S. Army Corps Eng., CERC Spec. Rep. No.1.
- Dean, R.G. and Dalrymple, R.A. 1984. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Greenberg, M.D., 1978. *Foundations of Applied Mathematics*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Hildebrand, F.B., 1976. *Advanced Calculus for Applications*, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Huang, M.-C. and Hudspeth, R.T., 1984. Stream function solutions for steady water waves, *Continental Shelf Res.*, 3(2): 175-190.
- Rienecker, M.M. and Fenton, J.D., 1981. A Fourier approximation method for steady water waves, *J. Fluid Mech.*, 104: 119-137.
- Sobey, R.J., 1988. Discussion of Nonuniqueness in Stream Function Wave Theory, by R.A. Dalrymple and P. Solana, *Journal of Waterways, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, ASCE, 114(1): 112-114.