

## 非線形 不規則 緩傾斜 波浪 모델의 誘導 Derivation of Nonlinear Model for Irregular Waves on Mild Slope

李 正 烈\*  
Jung Lyul Lee\*

**要 旨** : Boussinesq 식과는 달리 深海로부터 淺海까지 波浪의 全領域에 適用 可能한 非線形 規則/不規則 波浪의 豫測 모델의 지배방정식이 提示되었다. 根本은 쌍곡선형 緩傾斜方程式(Copeland, 1985)에 根據를 두고 있다. 제시된 식은 深海로부터 淺海까지 선형 波浪電波의 분산 관계를 嚴密히 滿足시켜 주며 식을 展開하였을 때 Boussinesq 식의 여러 형태와 同一性を 維持하고 있음을 입증할 수 있었다. 또한 선형성을 維持하는 대표유속의 자유수면아래 위치를 算定할 수 있는 관계식을 제시하였다.

**Abstract** □ An equation set of nonlinear model for regular/irregular waves presented in this study can be applied to waves travelling from deep water to shallow water, which is different from the Boussinesq equations. The presented equations completely satisfy the linear dispersion relationship and when expanded, they are proven to be consistent with the Boussinesq equation of several types. In addition, the position of averaged velocity below the still water level is estimated based on the linear wave theory.

### 1. 서 론

파랑은 심해에서 바람에 의해 생성되어 천해역으로 진행하면서 수심변화로 변형되고 특히 해양환경과 방파제 및 항만시설 등의 해안구조물에 커다란 동적 영향을 미치는 설계파의 경우 그 비선형성이 증가됨으로써 보다 정확한 예측이 요구되고 있으며 더욱이 실제 파랑은 발생시 불규칙적인 특성을 갖고 있어 그 복잡한 현상을 규명하기가 여간 어려운 것이 아니다. 본 연구에서는 이러한 비선형이며 불규칙적인 파가 심해로부터 천해역으로 진행하면서 수심변화로 변형되는 현상을 규명할 지배방정식으로서 비선형 불규칙 환경사 방정식을 제안함과 동시에 현존하는 비선형 규칙파를 해석하는 Boussinesq 식과의 비교를 통하여 그 타당성을 조사한다.

Berkhoff(1972)가 회절-굴절 및 반사효과를 반영할 수 있는 환경사 방정식을 提案함으로써 선형파의 파고예측에 일대 變革이 일어났다 할 수 있으나 비선형파에 대한 接近은 아직도 전영역에 적용가능한 식의

유도가 이루어지고 있지 않았다. 비선형 파랑의 예측 모델은 大別하여 심해영역에 적용가능한 Stokes형 환경사 방정식(Kirby, 1983)과 천해파 영역에서 비선형성을 해석할 수 있는 Boussinesq 식(Peregrine, 1967)을 기본식으로 하는 두 種類가 있다.

최근에 천해는 물론 심해까지 適用可能한 Boussinesq 식의 개발에 많은 關心을 보이고 있는 데 대표적으로 Madsen *et al.* (1991), Madsen and Sorensen(1992), Nwogu(1993), Kirby and Wei(1994), Grilli *et al.*(1994) 등이 있다. 그러나 이들의 접근 방법은 Boussinesq식의 선형항들이 선형파 이론으로부터 얻어진 선형 분산 방정식과 천수효과를 만족하도록 변형하는 데 그치고 있다. Madsen *et al.* (1991)은 Boussinesq식의 대표적인 형태를 수면과 바닥면에서의 유속 그리고 평균 유속의 函數로 연속방정식과 운동량방정식으로 표현하고 그 결과식의 분산방정식을 檢討함으로써 심해파로의 계산능력 擴大정도를 把握함과 아울러 適切한 대표유속의 選擇을 통하여 Boussinesq식에 의한 심해파해석의 가능성을 제시한 바

\*한국해양연구소 해양공학연구부 (Ocean Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, Ansan 425-600 Korea)

Division, Korea Ocean Research and Development Institute,

있으며 Madsen and Sorensen(1992)은 천수효과를 적절히 반영하도록 대표유속에 수반되는 계수를 결정하였다. Nwogu(1993)는 대표유속으로 정수면 아래 수심의 0.53지점의 유속을 택하여 선형분산 방정식에 가장 가까운 분산특성을 얻었으며 기존의 Boussinesq 식의 개선을 위한 最適의 값으로 提案하였다. Kirby and Wei(1994)는 유속의 함수대신에 속도 포텐셜의 함수로 유도하여 Nwogu(1993)에 의해서 유도된 것과 동일한 결과를 얻었다. 그러나 留意할 것은 비선형 파를 해석할 경우 대표유속은 또한 파고에도 당연히 비례하므로 이러한 어려움을 극복할 방법의 摸索이 要求된다.

본 연구에서는 전 영역의 비선형파 해석은 물론 불규칙파에도 적용가능한 비선형 환경사 방정식을 제시한다. 쌍곡선형 緩傾斜方程式(Copeland, 1985)에 根據를 두고 있으며 비선형성이 큰 천해파 영역에서 그 비선형성이 유지되는지를 Boussinesq 식과 比較하여 그 근사적근방법의 妥當性を 검토하기로 한다.

## 2. 비선형 환경사방정식의 유도

Berkhoff(1972)에 의해 유도된 식 (1)의 타원형 환경사 방정식이 제안된 이후 지난 20여년동안 연안지역의 파랑 모델은 새로운 차원에서 개발되어 왔다. 이 환경사 방정식을 기초로 한 파랑모델들은 파의 천수와 굴절은 물론 회절 효과도 반영할 수 있어 고전적인 방법인 파향선법보다 파랑변형을 예측하는 데 우월하다.

$$\nabla_h \cdot (CCg \nabla \hat{\phi}) + k^2 CCg \hat{\phi} = 0 \quad (1)$$

이 식에 대한 수치 해석상의 상당한 진전이 Radder (1979), Copeland(1985), Ebersole 등(1986), Yoo and O'Connor(1986), 그리고 Madsen and Larsen(1987) 등에 의해 이루어 졌으며 대체로 수치 해석상의 편리를 위해 환경사 방정식의 변형된 형태가 지배 방정식으로 사용되었다. 그 중 본 연구에서는 천수방정식 및 Boussinesq 식과 유사한 식으로 Copeland (1985)에 의해서 유도된 식을 변형하여 비선형 불규칙파에 적용될 수 있도록 한다.

식 (1)에서 속도 포텐셜,  $\phi$ 는 선형파 이론에 의하여 자유 수면의 변위인  $\eta$ 와 다음 관계가 성립한다.

$$\phi = \frac{g}{i\sigma} \eta \quad (2)$$

$t$ 로 미분을 취하면,

$$\phi = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (3)$$

따라서 식 (1)은 다음과 같이 평균수면에서의 유속 벡터,  $\hat{u}(\hat{u}, \hat{v})$ 와 자유수면  $\eta$ 의 함수로서 다음과 같이 1차 편미분 방정식으로 표시된다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{nC^2 \hat{u}}{g} \right) + \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{nC^2 \hat{v}}{g} \right) = 0 \quad (4)$$

식 (2)에 수평미분을 취하고  $t$ 로 미분하면 다음  $x, y$  각 방향의 1차 편미분 방정식을 낳는다.

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

여기서  $n = Cg/C_0$ 이고 기호  $\hat{u}$  은 자유수면에서의 값을 의미한다.

비선형 장파의 지배방정식인 천수방정식과 Boussinesq 식의 誘導과정과 같이 다음 수심적분된 연속방정식과 자유수면에서의 오일러 운동방정식으로부터 시작하여 환경사 방정식에 비선형성을 부여하기로 한다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u} \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u} \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{u} \hat{w}}{\partial z} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{v} \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v} \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v} \hat{w}}{\partial z} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

Boussinesq 식은 수심 적분항의 적분이 유속성분의 테일러 전개(Taylor expansion)를 통하여 유도되는데 반하여 본 연구에서는 선형파이론을 적용하여 다음과 같이 그 적분이 이루어진다.

$$u = f(z) \hat{u} = \frac{\cosh k(d+z)}{\cosh kd} \hat{u}, \text{ where } d = h + \eta$$

라 가정하여 식 (7)을 수직적분하면 다음을 얻는다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{C^2 \hat{u}}{g} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{C^2 \hat{v}}{g} \right) = 0 \quad (10)$$

천해파 영역에서  $C^2 = gd$ 이므로 다음 식 (11)이 되고 유속성분의 垂直分布가 일정하므로 천수방정식의 연속방정식과 동일하다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

식 (10)은 각각 천해 영역의 비선형 효과를 반영해주는 천수방정식과 심해영역에 적용가능한 쌍곡 선형 환경사 방정식과 一致하도록 變形된다. 천해파 영역에서 식 (4)와 (10)은  $n$ 과  $C^2$ 이 각각 1과  $gd$ 이므로 代入하여 淺水 方程式의 連續 方程式과 同一한 식들이 얻어지나 深海波에서 식 (10)은 파의 에너지 電波를 엄밀하게 지배하는 식 (4)와 비교하여  $n$ 가 첨가되어야 한다고 본다. 식 (4)의 적분항에 선형파이론을 적용하였어도 천수방정식의 연속방정식인 식 (11)을 낳고 4절에서 立證되듯이 비선형을 반영하는 Boussinesq 식과 비교하여 同一한 결과를 낳는다.

지배방정식이 자유수면과 자유수면에서의 유속으로 표현된다면 비선형성이 큰 운동방정식에 분산항과 같은 추가항이 필요없이 정확한 비선형 효과는 물론 수치해석상의 잇점을 준다. 운동방정식을 자유수면에서의  $x, y$  유속으로 표현하기 위하여 다음과 같이 흐름의 비회전성과 3次元 연속방정식이 사용된다. 우선 비회전성 흐름에서,

$$u_y - v_x = 0, \quad v_z - w_y = 0, \quad w_x - u_z = 0 \quad (12)$$

여기서 하첨자는 미분을 의미한다. 그리고 연속방정식으로부터,

$$w_z = -(u_x + v_y) \quad (13)$$

식 (12-13)을 식 (8-9)에 代入하여 다음 식을 얻는다.

$$\hat{u}_t + \hat{u}\hat{u}_x + \hat{v}\hat{u}_y + \hat{w}\hat{w}_x + g\eta_x = 0 \quad (14)$$

$$\hat{v}_t + \hat{u}\hat{v}_x + \hat{v}\hat{v}_y + \hat{w}\hat{w}_y + g\eta_y = 0 \quad (15)$$

여기서  $\hat{w}$ 는 다음 자유수면의 運動學的 境界條件으로부터 구해진다.

$$\hat{w} = \eta_x + \hat{u}\eta_x + \hat{v}\eta_y \quad (16)$$

따라서 Boussinesq형 非線形 緩傾斜 方程式은 식 (5-6)의 線形 運動方程式에 식 (14-15)에서 주어진 바와 같이 비선형성을 加味하여 식 (4-6)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{nC^2 \hat{u}}{g} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{nC^2 \hat{v}}{g} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\hat{u}_t + \hat{u}\hat{u}_x + \hat{v}\hat{u}_y + \hat{w}\hat{w}_x + g\eta_x = 0 \quad (14)$$

$$\hat{v}_t + \hat{u}\hat{v}_x + \hat{v}\hat{v}_y + \hat{w}\hat{w}_y + g\eta_y = 0 \quad (15)$$

Boussinesq 식과는 달리 분산항(dispersive term)이 연속방정식의 flux항에 포함되어 있어 천수방정식과 유사한 형태로 수치해석상 기존의 조석 또는 해수순환 모델을 쉽게 변형하여 수치해석할 수 있다. 4절에서 연속방정식의 flux항이 어떻게 분산항으로 표현되는지를 조사하고 또한 비선형 파랑의 연속성을 유지하고 있는지를 확인한다.

### 3. 평균유속의 위치 선정

선형파 이론을 基礎로 선형파의 분산방정식을 만족시켜 주는 대표유속으로서의 평균유속의 위치,  $\bar{z}$ 를 把握하여 본다.

$$\bar{u} = \frac{C^2}{gd} \hat{u} = f(\bar{z}) \hat{u} \quad (16)$$

선형파 이론을 적용하여,

$$\bar{u} = \frac{\tanh kd}{kd} \hat{u} = \frac{\cosh kd(1+\bar{z}')}{\cosh kd} \hat{u} \quad (17)$$

정리하여 무차원화 된  $\bar{z}'$ 에 대한 해는 다음 식으로부터 구해진다.

$$\cosh kd(1+\bar{z}') = \frac{\sinh kd}{kd} \quad (18)$$

Hyperbolic cosine을 exponential로 표현하고

$$P = e^{kd(1+\bar{z}')} , \quad Q = \frac{\sinh kd}{kd}$$

라 두면 식 (18)은 다음 2차 방정식이 된다.

$$P^2 - 2QP + 1 = 0 \rightarrow P = (Q + \sqrt{Q^2 - 1}) \quad (19)$$

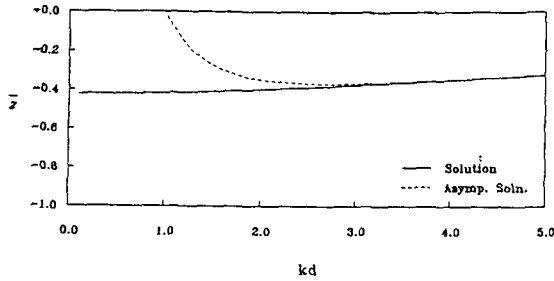


Fig. 1. Variation of  $\bar{z}'$  w.r.t.  $kd$ .

$kd$ 가 零에 가까울 때  $P$ 는 1이 되고 따라서  $\bar{z}'$ 의 가능한 모든 값에 대하여 만족된다. 즉 천해에 가까와질수록 수면으로부터 바닥면까지 유속이 일정하게 되므로 대표유속의 위치가 특별히 특정지어지지 않는다. 반면에 식 (19)에서  $Q^2$ 이 1보다 큰 심해영역에서  $P \approx 2$ 가 되므로 결국 접근하는 다음과 같다.

$$\bar{z}' = -\frac{\ln kd}{kd}$$

Fig. 1은  $kd$ 에 대한  $\bar{z}'$ 의 변화를 보여주고 있으며 접근하는 심해영역에서 유효한 것으로 보인다.

그러나 천해에서는 유속의 수직분포가 거의 일정하므로 수심의 모든 점에서 평균유속이 될 수 있으므로 Fig. 2에서 일정 오차, 1, 5, 20, 50, 100, 200, 400%를 허용하는 등오차선을 각각 도시하여  $\bar{z}'$ 의 변화에 따른 오차의 정도를 조사하여 보았다. 천해지역에서는 대체로 5%의 허용오차 한도내에 있으며 심해로 갈수록 그 신뢰영역은 감소한다. 오차는 다음 식과 같이 정의되었다.

$$\frac{|\cosh kh(1+\bar{z}') - \sinh kd/(kd)|}{\sinh kd/(kd)} \times 100 = (\%)$$

#### 4. Boussinesq 식과의 비교

##### 4.1 Peregrine (1967)의 Boussinesq식과의 비교

비선형 환경사 방정식으로提示된 식 (4)는 단순히 선형 환경사 방정식의 형태를 유지하고 있으므로 여러 형태의 Boussinesq 식과는 달리 분산 방정식의 선형성이 보장된다. 그러나 문제는 식 (4)가 비선형 파랑의 연속성을 유지하고 있는지를 확인하는 일이다. 다음은 Peregrine(1967)에 의해서 평균유속의 함수로

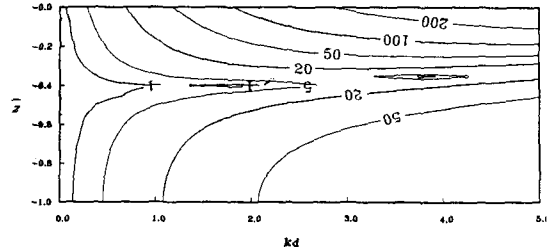


Fig. 2. Relative error distribution on a plane of  $kd$  and  $\bar{z}'$ .

주어진 Boussinesq식과 비교하여 식 (4)와 (14-15)가 비선형 파랑의 특성을 적절히 유지하고 있는지를 확인한다.

$$\eta_t + \nabla \cdot (d\bar{u}) = 0 \tag{20}$$

$$\bar{u}_t + (\bar{u} \cdot \nabla)\bar{u} + g\nabla\eta = \frac{h}{2}\nabla[\nabla \cdot (h\bar{u}_t)] - \frac{h^2}{6}\nabla[\nabla \cdot \bar{u}_t] \tag{21}$$

여기서  $\bar{u}$ 는 수심평균된 유속 벡터로서 2절에서 선형 파 이론에 입각하여 자유수면 유속과 다음 관계를 갖는다.

$$\hat{u} = \frac{gd}{C^2} \bar{u} \tag{22}$$

즉,

$$\hat{u} = \frac{kd}{\tanh kd} \bar{u} \tag{23}$$

식 (23)의 hyperbolic cotangent를 展開하여 자유수면 유속을 다음과 같이 평균유속으로 表現할 수 있다.

$$\hat{u} = \left(1 + \frac{1}{3}k^2d^2 - \frac{1}{45}k^4d^4 + \dots\right) \bar{u}$$

일정수심에서 다음 관계,  $k^2\bar{u} = -\nabla[\nabla \cdot \bar{u}]$ 가 성립한다고 하여,

$$\hat{u} = \bar{u} - \frac{1}{3}d^2\nabla[\nabla \cdot \bar{u}] + \dots \tag{24}$$

식 (22)와 식 (24)의 관계를 각각 식 (4)와 (14-15)에 대입하여 운동방정식의  $O(kd)^2$ 항까지 취하고 유속의 수직성분 항을 무시하면 일정수심하에서 식 (20-21)

로부터 얻은 결과와  $n$ 이 도입되었다는 것을 제외하고는 일치한다. 차이점은 분산항의 수심이 정체수면,  $h$ 로 주어졌다는 것이다. 따라서 비록 선형파를 이용하여 얻어진 관계이지만 순간 수심,  $d$ 를 적용하였을 때 식 (23)의 관계는 Boussinesq식과 비교할 때 허용할 정도에 있는 것으로 사료된다.

**4.2 Madsen et al. (1991)의 Boussinesq 식들과의 비교**

다음은 일정수심에서 비선형을 무시하고 自由水面의 유속, 평균유속 그리고 바닥면 유속으로 표현되는 Boussinesq식에 대하여 식 (4)와 (14-15)으로부터 유도되는 Boussinesq형의 식들과 Madsen et al. (1991)에 의해 주어진 선형 Boussinesq 식들을 비교한다.  $x$ 방향의 전파에 대하여 연속방정식의 flux는 2절에서 다음과 같은 관계를 얻었다.

$$\frac{C^2}{g} \hat{u} = \int_{-h}^{\eta} u dz \tag{20}$$

평균유속  $\bar{u}$ 는 선형파이론을 적용하여 다음과 같이 자유수면유속으로 표현된다.

$$\bar{u} = \frac{\tanh kd}{kd} \hat{u} \tag{25}$$

식 (25)의 hyperbolic tangent를 展開하여 평균유속을 다음과 같이 자유수면 유속으로 表現할 수 있다.

$$\bar{u} = \left(1 - \frac{1}{3}k^2d^2 + \frac{2}{15}k^4d^4 + \dots\right) \hat{u}$$

일정수심에서  $k$ 를 선형파의 분산방정식보다는 다음 관계,  $k^2\hat{u} = -\hat{u}_{xx}$ 로부터 決定된다고 하면,

$$\bar{u} = \hat{u} + \frac{1}{3}d^2\hat{u}_{xx} + \dots \tag{26}$$

식 (26)의 관계를 식 (4)에 대입하고  $O(kd)^2$ 까지 취하여 같은 조건하에 Madsen et al. (1991)에 의해 구해진 식 (6)과 동일한 형태의 식인 식 (27)을 얻는다. 차이점은 그들의 식이 총수심,  $d$ 대신 평균수면에 대한 수심,  $h$ 로 표현되었다는 점이다.

$$\eta_t + d\hat{u}_x + \frac{1}{2}d^3\hat{u}_{xxx} = 0 \tag{27a}$$

$$\hat{u}_t + g\eta_x = 0 \tag{27b}$$

따라서 식 (25)에서 주어진 바와 같은 선형파 이론의 결과를 이용하되 그 파수,  $k$ 를 유속의 微分을 통하여 얻을 수 있다면 주기의 변위가 다양한 불규칙파는 물론 비선형 파의 연속성을 보장하는 식으로써 식 (4)를 사용할 수 있으리라 思料된다.

자유수면 유속이 아닌 평균유속의 함수로 식을 전개하면 연속방정식은 분산항을 갖지않고 대신 운동방정식이 갖는다. 식 (25)로부터,

$$\hat{u} = \frac{kd}{\tanh kd} \bar{u} \tag{28}$$

식 (28)의 hyperbolic cotangent를 展開하여 자유수면 유속을 또한 다음과 같이 평균유속으로 表現할 수 있다.

$$\hat{u} = \left(1 + \frac{1}{3}k^2d^2 - \frac{1}{45}k^4d^4 + \dots\right) \bar{u}$$

다음 관계,  $k^2\bar{u} = -\bar{u}_{xx}$ 가 성립한다고 가정하여,

$$\hat{u} = \bar{u} - \frac{1}{3}d^2\bar{u}_{xx} + \dots \tag{29}$$

식 (29)를 식 (8)에 대입하고 비선형을 무시하여  $O(kd)^2$ 까지 취하면 같은 조건하에 Madsen et al. (1991)에 의해 구해진 식 (9)와 동일한 식인 식 (30)를 얻는다.

$$\eta_t + d\bar{u}_x = 0 \tag{30a}$$

$$\bar{u}_t + g\eta_x - \frac{1}{3}d^2\bar{u}_{xxx} = 0 \tag{30b}$$

바닥면 유속의 함수로 식을 전개하면 연속방정식과 운동방정식 모두 분산항을 갖는다. 선형파 이론을 이용하여,

$$\hat{u} = \cosh kdu_b \tag{31}$$

따라서 식 (25)로부터,

$$u = \frac{\tanh kd}{kd} \cosh kdu_b \tag{32}$$

식 (31)과 (32)의 hyperbolic cosine과 tangent를 展開하여 자유수면 유속과 평균유속을 다음과 같이 바닥면 유속으로 表現할 수 있다.

$$\hat{u} = \left(1 + \frac{1}{2}k^2d^2 + \frac{1}{24}k^4d^4 + \dots\right)u_b \quad (33)$$

$$\bar{u} = \left(1 - \frac{1}{3}k^2d^2 + \frac{2}{15}k^4d^4 + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{2}k^2d^2 + \frac{1}{24}k^4d^4 + \dots\right)u_b = \left(1 + \frac{1}{6}k^2d^2 + \dots\right)u_b \quad (34)$$

따라서 같은 조건하에 Madsen *et al.* (1991)에 의해 구해진 식 (3)과 동일한 식인 식 (35)를 얻는다.

$$\eta_t + du_{bx} - \frac{1}{6}d^3u_{bxxt} = 0 \quad (35a)$$

$$u_{bt} + g\eta_x - \frac{1}{2}d^2u_{bxxt} = 0 \quad (35b)$$

4.3 Nwogu(1993)의 Boussinesq 식과의 비교

최근에 제안된 Boussinesq 식으로선 가장 좋은 선형 분산특성을 보이는 Nwogu(1993)의 연속방정식 및 선형 운동방정식과 비교하여 선형 분산특성을 완벽하게 만족시키는 대표유속의 위치를 파악한다. Nwogu(1993)의 결과 식은 대표유속 벡터,  $u_a$ 을 도입하여 유도되었으며 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\eta_t + \nabla \cdot M = 0 \quad (36)$$

$$u_{at} + (u_a \cdot \nabla) u_a + g\nabla\eta + V = 0 \quad (37)$$

여기서,

$$M = d u_a + \left[ \left( \frac{hz_a^2}{2} - \frac{h^3}{6} \right) \nabla(\nabla \cdot u_a) + \left( hz_a + \frac{h^2}{2} \right) \nabla(\nabla \cdot (h u_a)) \right]$$

$$V = \left[ \frac{z_a^2}{2} \nabla(\nabla \cdot u_{at}) + z_a \nabla(\nabla \cdot (h u_{at})) \right]$$

$x$ 방향으로 일정수심위를 전파하는 선형파에 대하여 식 (36)과 (37)은 다음과 같이 단순화된다.

$$\eta_t + du_{ax} + \left( \alpha + \frac{1}{3} \right) h^3 u_{axxt} = 0 \quad (38)$$

$$u_{at} + g\eta_x + \alpha h^2 u_{axxt} = 0 \quad (39)$$

본 논문에서 주어진 식 (4)와 (5)에 윗 식 (38-39)와 동일한 조건을 취하고 비교하면,

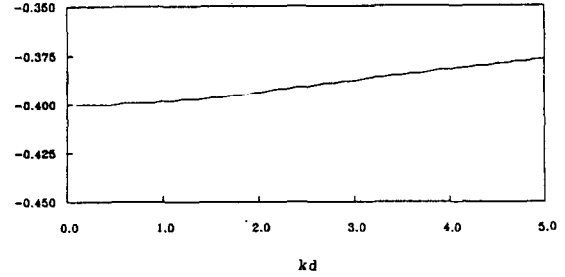


Fig. 3. Variation of  $\alpha$  w.r.t.  $kd$ .

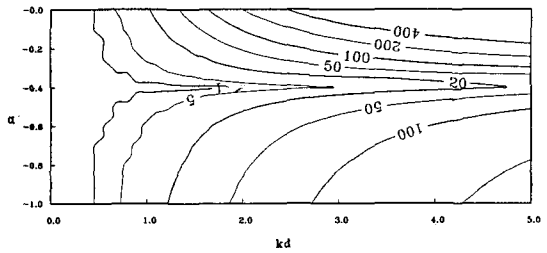


Fig. 4. Relative error distribution of phase speed on a plane of  $kd$  and  $\alpha$ .

$$\frac{\tanh kd}{kd} \hat{u} = \left[ 1 - \left( \alpha + \frac{1}{3} \right) (kd)^2 \right] u_a \quad (40)$$

$$\hat{u} = [1 - \alpha(kd)^2] u_a \quad (41)$$

여기서  $d \cong h$ 로 가정하였고  $\hat{u}_{xx} = -k^2 \hat{u}$ 라는 관계가 적용되었다. 두 식 (40)과 (41)은 다음에 주어지는 바와 같이 대표유속의 함수로 표현되는 연속방정식과 운동방정식을 만족시키는 두 미지수,  $\alpha$ 와  $u_a$ 의 추정을 가능케한다. 식 (40)과 (41)로부터  $u_a$ 를 소거하면  $kd$ 의 함수로서 표현되는  $\alpha$ 를 구할 수 있다.

$$kd \left[ 1 - \left( \alpha + \frac{1}{3} \right) (kd)^2 \right] = \tanh kd [1 - \alpha(kd)^2] \quad (42)$$

$$\therefore \alpha = \frac{(kd - \tanh kd) - \frac{1}{3}(kd)^3}{(kd)^2(kd - \tanh kd)} \quad (43)$$

Fig. 3에  $kd$ 의 변화에 따른  $\alpha$ 값의 변화를 보여준다. 이 값은 Nwogu(1993)에 의해서 선형 분산특성을 비교적 잘 나타내는 값으로 제시된 일정한 값인 -0.39과 비교하여  $kd$ 가 커짐에 따라서 심해파 영역에서 특히 그 차이가 증가되는 경향을 보이고 있다. 선형

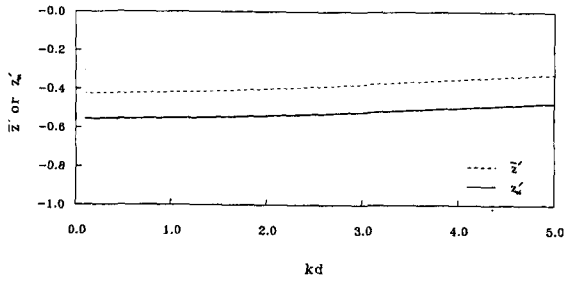


Fig. 5. Variation of  $z'_a$  w.r.t.  $kd$ .

분산식과의 상대오차의 분포를 Fig. 4에 도시하였는데 심해로 갈수록  $\alpha$ 의 작은 변화로도 상당한 오차를 나타내고 있으므로 narrow band spectrum을 갖는 불규칙파를 다룰 경우 식 (43)에서 주어진 바와 같이  $kd$ 의 변화에 따라서  $\alpha$ 값을 적절히 변화시켜주는 것이 바람직할 지 모른다. 오차는 다음 식과 같이 정의되었다.

$$\left| \frac{1 - (\alpha + 1/3)(kd)^2}{1 - \alpha(kd)^2} - \frac{\tanh kd}{kd} \right| \frac{\tanh kd}{kd} \times 100 = (\%)$$

식 (41)에 대입하여  $u_\alpha$ 를 구하면,

$$u_\alpha = \frac{3(kd - \tanh kd)}{(kd)^3} \hat{u} \quad (44)$$

대표유속은 선형파 이론을 적용하여 다음 식 (45)과 같이 표현될 수 있으며,

$$u_\alpha = \frac{\cosh kd(1 + z'_a)}{\cosh kd} \hat{u} \quad (45)$$

따라서 식 (44)와 (45)로부터 Nwogu(1993)에 의해 제시된 대표유속의 상대위치  $z'_a$  값을 파악할 수 있다.

$$3(kd \cosh kd - \sinh kd) = (kd)^3 \cosh kd(1 + z'_a) \quad (46)$$

$z'_a$ 에 대한 해는 hyperbolic cosine을 exponential로 표현하고

$$P_\alpha = e^{kd(1+z'_a)}, \quad Q_\alpha = \frac{3(kd \cosh kd - \sinh kd)}{(kd)^3}$$

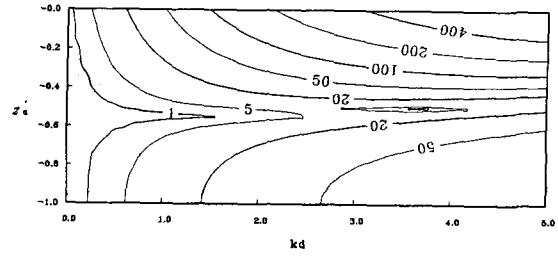


Fig. 6. Relative error distribution on a plane of  $kd$  and  $z'_a$ .

라 두변 식 (46)은 다음 2차 방정식이 된다.

$$P_\alpha^2 - 2Q_\alpha P_\alpha + 1 = 0 \rightarrow P_\alpha = (Q_\alpha + \sqrt{Q_\alpha^2 - 1}) \quad (47)$$

식 (47)로부터 구한  $z'_a$ 의 해는 Fig. 5에 도시되었으며 3절에서 구한  $\bar{z}$ 의 해와 비교하여 대체적으로 0.14  $d$  정도 낮은 위치에서 대표유속이 결정됨을 알 수 있다. 평균유속과 대표유속의 차이를 언급한다면 평균유속은 연속방정식 상의 적분을 대표하는 평균값으로서의 유속인 반면에 대표유속이란 하나의 변수로서 연속방정식과 운동방정식 모두를 함께 만족시키는 미지수로서의 대표유속이다. 평균수면이나 자유수면이 아닌 대표유속으로 연속방정식과 운동방정식이 표현되므로 각각 분산항을 지닌다는 것이 대표유속으로 표현되는 Boussinesq 식의 특징이다. 이러한 대표유속은 Fig. 5에서 알 수 있듯이 대체로 평균유속보다 작게 산정되고 있다.

$z'_a$ 는 0과 -1사이의 값으로 그 값과  $kd$ 의 변화에 따른 오차분포를 Fig. 6에 제시한다. 오차는 다음 식과 같이 정의되었다.

$$\frac{|(kd)^3 \cosh kd(1 + z'_a) - 3(kd \cosh kd - \sinh kd)|}{3(kd \cosh kd - \sinh kd)} \times 100 = (\%) \quad (48)$$

Nwogu(1993)는  $z'_a$ 와  $\alpha$ 의 관계를 제시하였는데  $O(kd)^2$ 까지 취하여 같은 관계를 얻을 수 있음을 보인다. 식 (45)를 식 (41)에 대입하면

$$\cosh kd = [1 - \alpha(kd)^2] \cosh kd(1 + z'_a) \quad (49)$$

$$\rightarrow \left( 1 + \frac{1}{2}(kd)^2 + \frac{1}{24}(kd)^4 + \dots \right) =$$

$$\left[1 - \alpha(kd)^2\right] \left(1 + \frac{1}{2}(kd(1+z_a'))^2 + \frac{1}{24}(kd(1+z_a'))^4 + \dots\right) \quad (50)$$

그러므로  $O(kd)^2$ 까지 취하여 Nwogu에 의해서 제시된 식과 동일한 관계 식인 식 (51)을 얻었다.

$$\alpha \cong \frac{(z_a')^2}{2} + z_a' \quad (51)$$

### 5. 2차원 파역에서의 파수의 산정

4절에서  $x$ 방향의 전파에 대하여 파수를 단지  $\hat{u}$ 의 2계 미분을 통하여 산정하였는데  $x$ - $y$  2차원 파역에서 식 (23)의 관계를  $u$ 와  $v$ 에 대하여 분류하여 쓰면 다음과 같다.

$$\bar{u} = \frac{\tanh k_u d}{k_u d} \hat{u}, \quad \bar{v} = \frac{\tanh k_v d}{k_v d} \hat{v} \quad (52)$$

그리고 각 파수는 다음 미분 관계의 유한차분을 통하여 추정될 수 있다.

$$k_u^2 = -\frac{\hat{u}_{xx} + \hat{v}_{xy}}{\hat{u}}, \quad k_v^2 = -\frac{\hat{v}_{yy} + \hat{u}_{xy}}{\hat{v}} \quad (53)$$

식 (52-53)의 관계는  $\hat{u}, \hat{v} \neq 0$ 일 때 적용되며  $\hat{u}, \hat{v} = 0$ 일 때는  $\bar{u}, \bar{v} = 0$ 로 적용된다. 식 (4)를 식 (52)로부터 얻어지는 평균유속의 함수로 표현하면,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{n_u} \frac{\partial n_u \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{n_v} \frac{\partial n_v \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (54)$$

여기서

$$n_u = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k_u d}{\sinh 2k_u d}\right),$$

$$n_v = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k_v d}{\sinh 2k_v d}\right)$$

### 6. 결 론

Boussinesq 식과는 달리 深海로부터 淺海까지 波浪의 全領域에 適用 가능한 非線形 規則/不規則 波浪의 豫測모델이 提示되었다. 본 모델은 쌍곡선형

緩傾斜方程式(Copeland, 1985)에 根據를 두고 있다. 제시된 식은 深海로부터 淺海까지 波浪電波의 분산 관계 및 에너지 전파를 嚴密히 滿足시켜 주고 있으며 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \eta_t + n_u^{-1}(n_u \bar{u})_x + n_v^{-1}(n_v \bar{v})_y &= 0 \\ \hat{u}_t + \hat{u} \hat{u}_x + \hat{v} \hat{u}_y + \hat{u} \hat{w}_x + g \eta_x &= 0 \\ \hat{v}_t + \hat{u} \hat{v}_x + \hat{v} \hat{v}_y + \hat{w} \hat{v}_y + g \eta_y &= 0 \end{aligned}$$

여기서,

$$n_u = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k_u d}{\sinh 2k_u d}\right), \quad n_v = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2k_v d}{\sinh 2k_v d}\right),$$

$$\bar{u} = \frac{\tanh k_u d}{k_u d} \hat{u}, \quad \bar{v} = \frac{\tanh k_v d}{k_v d} \hat{v},$$

$$k_u^2 = -\frac{\hat{u}_{xx} + \hat{v}_{xy}}{\hat{u}}, \quad k_v^2 = -\frac{\hat{v}_{yy} + \hat{u}_{xy}}{\hat{v}},$$

$$\hat{w} = \eta_t + \hat{u} \eta_x + \hat{v} \eta_y$$

식을 展開하였을 때 Peregrine(1967)의 Boussinesq식과 비교하여 일정수심에서  $0(kd)^2$ 까지 유사한 결과를 주며 Madsen *et al.* (1991)에 의해 구해진 Boussinesq 식의 3가지 형태 즉, 바닥면 유속, 평균 유속 그리고 자유수면 유속으로 각각 표현되는 Boussinesq 식들과 同一性을 維持하고 있음을 입증할 수 있었고 Nwogu(1993)의 Boussinesq 식과 比較하여 연속방정식과 선형 운동방정식을 만족시키는 계수,  $\alpha$  및 대표유속의 위치,  $z_a$ 를 파악할 수 있었다. 또한 선형성을 維持하는 평균유속의 자유수면 아래 위치를 算定할 수 있는 관계식을 제시하였는데 대표유속의 위치에 비해 대체적으로 0.14d 정도 높은 위치에서 평균유속이 決定됨을 알 수 있었다.

### 참고문헌

- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction, *Proc. 13th ICCE*, ASCE: 471-490.  
 Copeland, G.J.M., 1985. A practical alternative to the mild slope wave equation, *Coastal Eng.*, 9: 125-149.  
 Grilli, S.T., Subramanya, R., Kirby, J.T. and Wei, G., 1994. Comparison of modified Boussinesq and fully nonlinear potential models for shoaling solitary waves, *Proc. of International Symposium: Waves-Physical and Numerical Modelling*, IAHR, Vancouver: 524-533.  
 Kirby, J.T. and Wei, G., 1994. Derivation and properties of a fully nonlinear model for weakly dispersive wa-



- ves. *Proc. of International Symposium, Waves-Physical and Numerical Modelling*, IAHR, Vancouver: 386-395.
- Liu, P.L-F., Yoon, S.B. and Kirby, J.T., 1985. Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water, *J. Fluid Mech.*, **153**: 185-201.
- Madsen, P.A., Murray, R. and Sorensen, O.R., 1991. A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics, *Coastal Eng.*, **15**: 371-388.
- Madsen, P.A. and Sorensen, O.R., 1992. A new form of Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2: Slowly-varying bathymetry, *Coastal Eng.*, **18**: 183-204.
- Peregrine, D.H., 1967. Long waves on a beach, *J. Fluid Mech.*, **27**: 815-827.
- Nwogu, O., 1993. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation, *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Eng.*, **119**(6): 618-638.
- Yoo, D. and O'Connor, B.A., 1986. Ray model for caustic gravity waves, *Proc. 5th Congress of APD*, IAHR, **3**: 1-13.