

## 흐름의 影響을 考慮한 橢圓形 緩傾斜 方程式 Mild Slope Equation of Elliptic Type in Wave-Current Interaction

李 正 烈\*  
 Jung Lyul Lee

**요 지** : 緩傾斜 方程式을 에너지 保存式으로부터 직접 유도하였으며 에너지 保存式과 Green's first and second identities와의 관계를 분명히 밝혔다. 波浪-흐름 相互作用 時的 橢圓形 緩傾斜 方程式이 Berkhoff (1972)에 의해서 誘導된 흐름이 없는 경우와 같은 형태를 갖는다는 것이 제시되었으며, 또한 解釋的인 解를 통해 物理的 特性이 조사되었다.

**Abstract** □ The mild slope equation has been directly derived from the energy equation, and the relation between energy equation and Green's first and second identities was also clarified. It is shown here that the mild slope equation of elliptic type in the wave-current interaction has to have the same form as the one derived by Berkhoff (1972), and its physical meaning was investigated through analytical solutions.

### 1. 緒 論

파랑은 방파제 및 항만시설 등의 해안구조물 설계에 필요한 중요한 요소로 구조물에 커다란 동적 영향을 미치며, 항만내의 정온에 관계되는 중요한 인자로서 파랑의 특성변화에 대하여 많은 연구가 진행되어 왔다. 파랑에 대한 연구는 영역별로 크게 두가지로 구별되는 데, 심해에서 바람에 의해 생성되는 풍파에 대한 연구와 천해역으로의 진행에 따른 파랑의 변형에 대한 연구가 있다. 본 연구에서는 천해역으로 진행하면서 수심변화와 유속변화 등으로 변형되는 규칙파랑에 대한 지배방정식인 환경사 방정식에 대한 새로운 해석을 부여한다.

Berkhoff(1972)에 의해 유도된 식 (1)의 타원형 환경사 방정식이 제안된 이후 지난 20여년 동안 연안지역의 파랑 모델은 새로운 차원에서 개발되어 왔다. 이 환경사 방정식을 기초로 한 파랑모델들은 파의 천수와 굴절은 물론 회절 효과도 반영할 수 있어 고전적인 방법인 파향선법보다 파랑변형을 예측하는 데 우월하다.

$$\nabla_h \cdot (CCg \nabla \hat{\phi}) + k^2 CCg \hat{\phi} = 0 \quad (1)$$

이 식에 대한 수치 해석상의 상당한 진전이 Radder(1979), Copeland(1985), Ebersole 등(1986), Yoo and O'Connor(1986a), 그리고 Madsen and Larsen (1987) 등에 의해 이루어 졌으며 대체로 수치 해석상의 편리를 위해 환경사 방정식의 변형된 형태가 지배 방정식으로 사용되었다.

흐름이 존재하는 지역에 적용 가능한 쌍곡선형 환경사 방정식이 Kirby(1984)에 의해 식 (2)에서와 같이 유도되었으며 궁극적으로 Bretherton and Garrett(1969)에 의해 제안된 파랑 에너지 식으로 유도됨이 입증되었다.

$$\frac{D^2 \hat{\phi}}{Dt^2} + (\nabla_h \cdot \bar{U}) \frac{D \hat{\phi}}{Dt} + \nabla_h \cdot (CCg \nabla \hat{\phi}) + (\sigma^2 - k^2 CCg) \hat{\phi} = 0 \quad (2)$$

파랑-흐름 상호작용의 효과를 반영하는 윗 식은 Radder(1979)에 의해 Berkhoff(1972)의 환경사 방정식에 시도된 것과 같이 Kirby(1983)에 의해 포물선형 환경사 방정식으로 변형되어 해석되었다. Yoo and O'Connor(1986b)는 또한 그들이 제안한 방법에 흐름의 영향을 고려하여 이안류(wave-induced current)의

\*韓國海洋研究所 博士後 課程 (Ocean Engineering Division, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, 425-600, Korea)

해석에 적용하였고 Jeong(1990)은 Ebersole 등(1986)의 모델에 유속의 영향을 감안하여 조류와의 상호작용을 조사하였다. Ohnaka 등(1988)에 의해서 Copeland(1985)가 시도한 방법대로 흐름이 존재하는 영역에 적용가능한 쌍곡선형 환경사 방정식으로 변형되었으나 Lee(1993)는 그 변형된 식이 Bretherton and Garrett(1969)에 의해 제안된 파랑 에너지 식과 일치하지 않음을 입증하였다. 이 모순은 Berkhoff(1972)에 의해 제안된 식 (1)의 타원형 환경사 방정식이 파랑-흐름 상호 작용시에도 함께 적용될 때 비로서 해결되며 본 연구에서 식 (1)이 파랑-흐름 상호작용시에도 함께 적용될 수 있음을 보인다.

## 2. 에너지 保存式

비압축성 유체의 비점성 비회전성 흐름에 적용되는 운동량 방정식인 오일러 식에 유속의 스칼라 곱을 취해서 다음과 같이 에너지 보존식이 유도된다. 정지 상태의 수면에  $x, y$ 축과 수면 윗쪽으로  $z$ 축의 좌표계를 사용하면,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \frac{q^2}{2} \right] + \nabla \cdot \left[ U \left( \frac{\rho q^2}{2} + p + \rho g z \right) \right] = 0 \quad (3)$$

여기서  $\rho$ 는 해수 밀도이고 유속 벡터  $U$ 는  $(x, y, z)$ 축에 대하여 각각  $(u, v, w)$ 이며  $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$ ,  $p$ 는 압력,  $g$ 는 중력 가속도,  $\nabla$ 은  $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ 로 정의된다. 수심에 대해서 적분하여,

$$\int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \frac{q^2}{2} \right] + \nabla \cdot \left[ U \left( \frac{\rho q^2}{2} + p + \rho g z \right) \right] \right\} dz = 0 \quad (4)$$

이 수심적분된 에너지 식은 Green's Identities와 附錄에서 주어진 것과 같은 관계를 갖는다. 식 (4)를 Leibnitz rule을 이용하여 전개하고 운동학적 경계조건을 적용하면 다음과 같이 수심 적분항의 미분치로 표현되는 에너지 보존식이 유도된다.  $U = \nabla\phi$ 로 정의하여,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \frac{(\nabla\phi)^2}{2} dz + g\eta \frac{\partial\eta}{\partial t} - \nabla_h \cdot \int_{-h}^{\eta} \nabla\phi \frac{\partial\phi}{\partial t} dz = 0 \quad (5)$$

윗 식은 Longuet-Higgins and Stewart(1961)와 Whitham(1962)이 제시한 식으로 표현하여 다음과 같다.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_h \cdot (U_h E) = 0 \quad (6)$$

여기서

$$E = \int_{-h}^{\eta} \left[ \frac{\rho(\nabla\phi)^2}{2} + \rho g z \right] dz, \quad U_h E = - \int_{-h}^{\eta} \rho \nabla\phi \phi dz$$

## 3. 波浪의 에너지 保存式

### 3.1 수면에서의 경계조건

자유수면에서 운동학적 경계조건과 베르누이 식, 즉 동력학적 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \nabla_h \phi \cdot \nabla_h \eta - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + g\eta = 0 \quad (8)$$

속도 포텐셜과 수면 변위를 다음과 같이 흐름과 파랑에 의한 성분으로 구성되었다고 가정하여,

$$\phi(x, z, t) = \phi_c(x, z; t) + \varepsilon\phi_w(x, z, t) \quad (9)$$

$$\eta(x, t) = \eta_c(x; t) + \varepsilon\eta_w(x, t) \quad (10)$$

여기서  $\varepsilon$ 은 정의되지 않은 인자로서 흐름과 파랑의 성분을 분류하는 역할을 한다. 그리고 ' $t$ '는 파 주기보다 긴 시간에 걸쳐 서서히 변하다는 것을 의미한다. 식 (9)와 (10)을 식 (7)과 (8)에 대입하여 평균 수면에 대하여 테일러 전개를 취하고 조화운동을 하는 파랑의 성분만을 택하면 다음 운동학적 경계조건과 동력학적 경계조건을 얻는다.

$$\frac{\partial\phi_w}{\partial z} = \frac{D\eta_w}{Dt} + (\nabla_h^2 \phi_c)\eta_w \quad (11)$$

$$\eta_w = -\frac{1}{g} \frac{D\phi_w}{Dt} \quad (12)$$

여기서  $D/Dt$ 는  $\partial/\partial t + \nabla_h \phi_c \cdot \nabla_h$ 로 정의되며 식 (11)에서 평균 수면의 경사항은 무시되었다.

### 3.2 환경사 방정식의 유도

식 (4)에 식 (9)와 (10)을 대입하여 다음 식 (13)을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta_c} \left[ \frac{(\nabla \phi_c + \varepsilon \nabla \phi_w)^2}{2} \right] dz + g(\eta_c + \varepsilon \eta_w) \frac{\partial}{\partial t} (\eta_c + \varepsilon \eta_w) - \nabla_h \cdot \int_{-h}^{\eta_c} \left[ (\nabla \phi_c + \varepsilon \nabla \phi_w) \frac{\partial}{\partial t} (\phi_c + \varepsilon \phi_w) \right] dz = 0 \quad (13)$$

평균 수면  $\eta_c$ 에 대하여 테일러 전개를 취하여,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta_c} \left[ \frac{(\nabla \phi_c + \varepsilon \nabla \phi_w)^2}{2} \right] dz + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varepsilon \eta_w \frac{(\nabla \hat{\phi}_c + \varepsilon \nabla \hat{\phi}_w)^2}{2} \right] + g(\eta_c + \varepsilon \eta_w) \frac{\partial}{\partial t} (\eta_c + \varepsilon \eta_w) - \nabla_h \cdot \left[ \int_{-h}^{\eta_c} (\nabla \phi_c + \varepsilon \nabla \phi_w) \frac{\partial}{\partial t} (\phi_c + \varepsilon \phi_w) dz + (\varepsilon \eta_w (\nabla \hat{\phi}_c + \varepsilon \nabla \hat{\phi}_w)) \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\phi}_c + \varepsilon \hat{\phi}_w) \right] = 0$$

여기서 모자기호  $\Lambda$ 는 평균수면에서의 값을 의미한다.  $O(\varepsilon^2)$  항들을 모아서 다음 식을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta_c} \left[ \frac{(\nabla \phi_w)^2}{2} \right] dz + \frac{\partial}{\partial t} [\eta_w \nabla \hat{\phi}_c \cdot \nabla \hat{\phi}_w] + g \eta_w \frac{\partial \eta_w}{\partial t} - \nabla_h \cdot \left[ \int_{-h}^{\eta_c} \nabla \phi_w \frac{\partial \phi_w}{\partial t} dz + \nabla \hat{\phi}_c \eta_w \frac{\partial \hat{\phi}_w}{\partial t} \right] = 0 \quad (14)$$

파랑 성분의 속도 포텐셜,  $\phi_w$ 는 환경사에서 수면에서의 속도 포텐셜,  $\hat{\phi}_w$ 로 표시하여 다음과 같이 가정된다.

$$\phi_w(x, z, t) = f(z; t) \hat{\phi}_w(x, t) \quad (15)$$

미소진폭파 이론에 이론에 의하여  $f = \cosh k(h+z)/\cosh k(h+\eta_c)$ 으로 주어지며 식 (15)를 적용하여 식 (14)를 속도 포텐셜의 평균수면에서의 값으로만 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta_c} f^2 dz \left[ \frac{(\nabla \phi_w)^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta_c} f^2 dz \left[ \frac{(\hat{\phi}_w)^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial t} (\eta_w \nabla \hat{\phi}_c \cdot \nabla \hat{\phi}_w) + g \eta_w \frac{\partial \eta_w}{\partial t} - \nabla_h \cdot \left[ \int_{-h}^{\eta_c} f^2 dz \nabla \hat{\phi}_w \frac{\partial \hat{\phi}_w}{\partial t} + \nabla \hat{\phi}_c \eta_w \frac{\partial \hat{\phi}_w}{\partial t} \right] = 0 \quad (16)$$

위의 두 종류의 수심적분은 선형파 이론에 근거하여 다음과 같다.

$$\int_{-h}^{\eta_c} f^2 dz = \frac{CCg}{g} \quad (17)$$

$$\int_{-h}^{\eta_c} f^2 dz = \frac{\sigma^2 - k^2 CCg}{g} \quad (18)$$

여기서  $k$ 는 파수이고  $\sigma$ 는  $\sqrt{gk \tanh kh}$ 로 정의되며,  $C$ 와  $Cg$ 는 각각  $\sigma/k$ 와  $\partial \sigma / \partial k$ 으로 정의된다. 따라서 식 (17)과 (18)을 대입하여,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ CCg \frac{(\nabla \hat{\phi}_w)^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\sigma^2 - k^2 CCg) \frac{\hat{\phi}_w^2}{2} \right] + \frac{\partial \eta_w}{\partial t} (\eta_w \nabla \hat{\phi}_c \cdot \nabla \hat{\phi}_w) + g \eta_w \frac{\partial \eta_w}{\partial t} - \nabla_h \cdot \left[ \frac{CCg}{g} \nabla \hat{\phi}_w \frac{\partial \hat{\phi}_w}{\partial t} + \nabla \hat{\phi}_c \eta_w \frac{\partial \hat{\phi}_w}{\partial t} \right] = 0$$

규칙파의 경우, 식 (15)의  $f$ 가 오직  $z$ 의 함수가 되므로 위의 식은 다음 식 (19)와 같이 되며 궁극적으로 이른바 환경사 방정식이 된다. 따라서 환경사 방정식을 불규칙파에 직접 활용할 경우에는 주의가 뒤따라야 할 것이다.

$$CCg \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{(\nabla \hat{\phi}_w)^2}{2} \right] + (\sigma^2 - k^2 CCg) \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{(\hat{\phi}_w)^2}{2} \right] + \frac{\partial}{\partial t} [\eta_w \nabla \hat{\phi}_c \cdot \nabla \hat{\phi}_w] + g \eta_w \frac{\partial \eta_w}{\partial t} - \nabla_h \cdot \left[ \frac{CCg}{g} \nabla \hat{\phi}_w \frac{\partial \hat{\phi}_w}{\partial t} + \nabla \hat{\phi}_c \eta_w \frac{\partial \hat{\phi}_w}{\partial t} \right] = 0 \quad (19)$$

파랑 성분을 의미하던 하첨자  $w$ 를 생략하고 이 후의 하첨자를 미분 연산자로 두어 식 (19)를 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$CCg \nabla_h \hat{\phi} \cdot (\nabla_h \hat{\phi})_t + \hat{\phi}_t (\sigma^2 - k^2 CCg) \hat{\phi} + g \eta_w \bar{U} \cdot \nabla \hat{\phi} + g \eta_w \bar{U} \cdot \nabla \hat{\phi}_t + g^2 \eta_w \eta_t - \hat{\phi}_t \nabla_h \cdot (CCg \nabla \hat{\phi}) - CCg \nabla \hat{\phi} \cdot \nabla_h \hat{\phi}_t - g \phi_t \nabla_h \cdot (\bar{U} \eta) - g \eta_w \bar{U} \cdot \nabla_h \hat{\phi}_t = 0$$

여기서  $\bar{U} = \nabla \hat{\phi}_c$ 이다. 일곱번째항 그리고 넷째항과 아홉째항을 서로 소거하여,

$$\begin{aligned} & \hat{\phi}_t(\sigma^2 - k^2 CCg)\hat{\phi} + g\eta_t \bar{U} \cdot \nabla \hat{\phi} + g^2 \eta_t \\ & - \hat{\phi}_t \nabla_h \cdot (CCg \nabla \hat{\phi}) - g \hat{\phi}_t \nabla_h (\bar{U}\eta) = 0 \end{aligned}$$

둘째항과 셋째항에 식 (12)의 동력학적 경계조건을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \hat{\phi}_t(\sigma^2 - k^2 CCg)\hat{\phi} - g\hat{\phi}_t \eta_t - \hat{\phi}_t \nabla_h \cdot (CCg \nabla \hat{\phi}) \\ & - g \hat{\phi}_t \nabla_h (\bar{U}\eta) = 0 \end{aligned}$$

여기에 식 (11)의 운동학적 경계조건을 적용하고  $\hat{\phi}_t$ 를 소거하면 다음 정상상태의 파랑 에너지의 보존을 지배하는 식을 얻는다.

$$(\sigma^2 - k^2 CCg)\hat{\phi} - \nabla_h \cdot (CCg \nabla \hat{\phi}) - g\hat{\phi}_z = 0 \quad (20)$$

여기서  $\hat{\phi}_z$ 는 두 종류의 관계가 가능한 데 첫째는 식 (12)를 (11)에 대입하여 다음 식 (21)에서 주어진 바와 같고 둘째는 식 (15)로부터 식 (22)에서와 주어진 바와 같다.

$$\hat{\phi}_z = -\frac{1}{g} \left[ \frac{D^2 \hat{\phi}}{Dt^2} + (\nabla_h \cdot \bar{U}) \frac{D\hat{\phi}}{Dt} \right] \quad (21)$$

$$\hat{\phi}_z = \frac{\sigma^2}{g} \hat{\phi} \quad (22)$$

첫번째 관계를 식 (18)에 대입하여 우리에게 일반적으로 잘 알려진 쌍곡선형 완경사 방정식이 유도된다.

$$\begin{aligned} & \frac{D^2 \hat{\phi}}{Dt^2} + (\nabla_h \cdot \bar{U}) \frac{D\hat{\phi}}{Dt} - \nabla_h \cdot (CCg \nabla \hat{\phi}) \\ & + (\sigma^2 - k^2 CCg)\hat{\phi} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Kirby(1984)에 의하여 식 (23)을 한 주기 평균된 파랑 에너지,  $E$ 의 함수로 표현하여 다음과 같이 주어졌다.

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla_h \cdot [(Cg + \bar{U})E] = 0 \quad (24)$$

여기서  $Cg$ 는 군속도 벡터이다. 위 식은 파랑 에너지가 절대 군속도인  $Cg + \bar{U}$ 에 의해 전파된다는 것을 암시한다. 사실 Kirby (1984)는 파랑 에너지의 함수가 아닌 파 작용(wave action)의 함수로 표현하였으나 절대 각주파수(absolute frequency)가 정상상태에서 전 영역에서 일정하고 파랑 에너지는 파 작용과 절대각주파수의 곱으로 정의되므로 식 (24)로 주어진 것과 동일한 것으로 간주한다. 두번째 관계는 다음과 같이

흐름이 존재하지 않을 때의 타원형 방정식과 동일한 식을 낳는다.

$$\nabla_h \cdot (CCg \nabla \hat{\phi}) + k^2 CCg \hat{\phi} = 0 \quad (25)$$

식 (25)는 흐름이 존재하지 않을 때의 경우처럼  $E$ 의 함수로 다음 식 (26)과 같이 주어지는 데, 정상상태에서 파랑 에너지가 단순히 군속도에 의하여 보존된다는 것을 의미한다.

$$\nabla_h \cdot (CgE) = 0 \quad (26)$$

Lee (1993)에 의하면 흐름이 존재하는 영역에서 한 주기 평균된 파랑 에너지가 정상상태를 찾을 수 있는 한 예는 흐름의 수평 변화가 없어  $\nabla_h \cdot (\bar{U}E) = 0$ 인 경우이다. 따라서 그러한 경우 식 (24)는 정상상태에서 (26)이 된다.

#### 4. 橢圓形 緩傾斜 方程式의 한 分析的인 例

새로 제시된 타원형 완경사 방정식이 갖는 가장 중요한 물리적 특성을 분석적인 해석이 가능한 다음의 한 예를 통하여 파악해본다. 지금까지 파랑과 흐름이 col-linear한 경우, 식 (24)의 첫번째 항을 무시하여 얻어진 파고에 대한 해가 파장이 유한함에도 불구하고 무한한 값을 갖는 물리적으로 납득하기 어려운 현상을 유발하였는데 이 비현실적인 현상이 식 (26)의 타원형 에너지 보존 식에 의하여 해소된다. 심해에서 흐름의 영향에 의한 파고의 변화는 이론적인 해를 갖는 데 이 경우를 분석해 보기로한다. 식 (26)의 파 미분치는 다음과 같이 전영역에서 일정하고,

$$Cg \frac{H^2}{\sigma} = const \quad (27)$$

그래서  $U$ 가 짧은 곳의 값을 하첨자  $o$ 로 표기하여 다음과 같은 파고의 무차원 값을 얻는다.

$$\frac{H^2}{H_o^2} = \frac{\sigma Cg_o}{\sigma_o Cg} \quad (28)$$

심해에서  $\sigma$ 는  $g/C$ 이고  $Cg$ 는  $C/2$ 이므로 식 (28)은 단순히 파고가 상대 파속에 반비례하거나 상대 각주파수 또는 파수의 제곱근에 비례한다는 다음 관계를 준다.

$$\frac{H}{H_o} = \frac{C_o}{C} = \frac{\sigma}{\sigma_o} = \sqrt{\frac{k}{k_o}} \quad (29)$$

파랑과 흐름이 col-linear한 경우 Doppler 식으로부터 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$\frac{k}{k_o} \left( \frac{C}{C_o} + \frac{u}{C_o} \right) = 1 + \frac{u_o}{C_o} \quad (30)$$

여기서  $u_o$ 는 零으로 가정하였고 식 (29)에서와 같이 파수가 상대 파속으로 치환될 수 있으므로 식 (30)은 다음과 같이 상대 파속의 무차원 값에 대하여 2차 방정식을 준다.

$$\left( \frac{C}{C_o} \right)^2 - \left( \frac{C}{C_o} \right) - \frac{u}{C_o} = 0$$

그러므로 2차 방정식을 풀어,

$$\frac{C}{C_o} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 + 4 \frac{u}{C_o} \right)^{1/2} \right] \quad (31)$$

이 식은  $u/C_o$ 가  $-1/4$ 일 때 零의 상대 파속을 주어 파가 거슬러 전파할 수 없는 흐름의 상대 속도가 존재한다는 것을 보여주며 이 때의 상대 속도를 한계 속도(critical speed)라고 한다. 식 (29)로부터 심해에서의 한계 속도는 단지 두배의 파고를 낳는다는 것을 알 수 있다. Figure 1은 심해에서 상대 속도에 대한 파장, 상대 파속 및 파고의 변화를 보여주고 있다.

### 5. 結 論

파랑-흐름 상호작용에 대한 환경사 방정식이 에너지 보존식으로부터 직접 유도되는 과정을 소개하였으며 유도된 쌍곡선형 환경사 방정식은 Kirby(1983)에 의해 유도된 것과 같고 타원형 방정식은 Berkhoff(1972)에 의해 흐름의 영향을 무시하고 유도된 것과 동일하였다. 환경사 방정식이란 파랑변형이 정상상태에 이르렀다는 가정하에 유도된 것이나 특히 수평 변화를 갖는 흐름이 파의 진행과 역행하는 경우에 정상상태를 유지하기 어렵다는 것이 실험 결과 밝혀졌다(Wang, et al., 1992). 그러나 흐름의 수평 변화가 없는 경우, 흐름의 진행 방향과 관계없이 정상상태를 유지할 수 있으며 그 때 Kirby(1983)의 쌍곡선형 환경사 방정

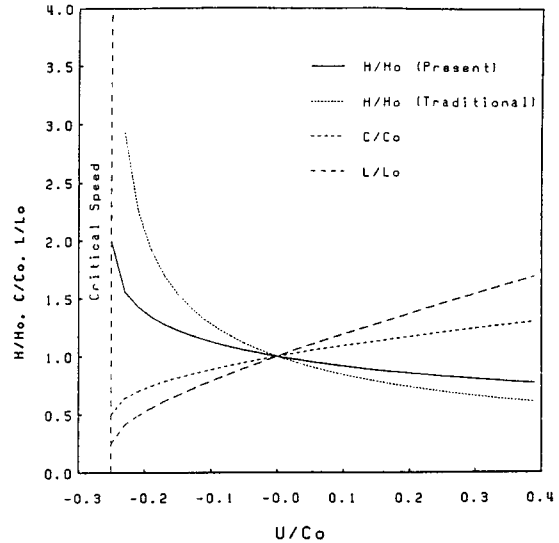


Fig. 1. Variations of dimensionless wave length, phase speed and wave height.

식은 Berkhoff(1972)에 의해 유도된 것과 같은 타원형 환경사 방정식이 된다. 이 타원형 방정식은 기존의 파랑 에너지식이 이론적으로 한계 속도에서 유한한 파장을 갖음에도 불구하고 무한한 파고를 갖는 비현실성을 타파함으로써 그 타당성이 간접 입증되었다. 비록 흐름의 영향에 의해서 정상상태를 완전히 유지할 수 없는 경우라도 파랑 에너지가 전 영역에 충분히 전달된 경우, 우리는 준 정상상태를 기대할 수 있으며 이 때 그 파의 확률적(stochastic) 특성은 타원형 환경사 방정식에 의해 지배된다고 가정할 수 있을 것이다. 따라서 흐름이 존재하는 파랑 영역에서 파의 변형을 예측하는 모델은 지배방정식으로서 기존의 쌍곡선형보다 여기서 유도된 타원형 환경사 방정식을 사용하도록 제안하는 바이다.

### 附 錄

지금까지 파랑의 에너지 보존을 지배하는 환경사 방정식은 Green's second identity나 variational principle로부터 유도되었는데, 본 附錄에서 식 (4)의 수직 적분된 에너지 식과 Green's second identity와의 정확한 관계를 밝힌다. 베르누이 식에 의하여 식 (3)의 좌변은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \frac{q^2}{2} \right] - \rho \nabla \cdot \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \mathbf{U} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \frac{q^2}{2} \right] - \rho \mathbf{U} \cdot \nabla \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{U}$$

여기서  $\mathbf{U} = \nabla \phi$ 로 정의하며 우변의 첫째항과 둘째항이 서로 상쇄되므로 식 (4)는

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \phi}{\partial t} (\nabla_h^2 \phi + \phi_{zz}) dz = 0 \quad (\text{A.1})$$

이 된다. 여기서  $\nabla_h$ 는 부분 적분을 취하여,

$$\int_{-h}^{\eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \nabla_h^2 \phi - \frac{\partial \phi_z}{\partial t} \phi_z \right) dz = - \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi_z \Big|_{-h}^{\eta}$$

연속 방정식으로부터  $\nabla_h^2 \phi = -\phi_{zz}$ 이므로 위 식은 다음과 같이 Green's first identity가 된다.

$$\int_{-h}^{\eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi_{zz} + \frac{\partial \phi_z}{\partial t} \phi_z \right) dz = \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi_z \Big|_{-h}^{\eta} \quad (\text{A.2})$$

식 (A.2)의 스칼라 값인  $\phi_t$ 와  $\phi$ 를 서로 바꾸고 식 (A.2)에서 빼면 다음 Green's second identity가 된다.

$$\int_{-h}^{\eta} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi_{zz} + \frac{\partial \phi_{zz}}{\partial t} \phi \right) dz = \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \phi_z - \phi \frac{\partial \phi_z}{\partial t} \right]_{-h}^{\eta} \quad (\text{A.3})$$

이상에서 알 수 있듯이 에너지 식과 동일한 표현의 Green's identities는 엄밀히  $\phi_t$ 와  $\phi$ 의 함수로 주어짐에도 실제 환경사 방정식의 유도에 쓰인 Green's second identity는 다음과 같이  $f$ 와  $\phi$ 의 함수로 주어졌다.

$$\int_{-h}^{\eta} (f \phi_{zz} - \phi f_{zz}) dz = [f \phi_z - \phi f_z]_{-h}^{\eta} \quad (\text{A.4})$$

따라서 Green's second identity에 의해서 얻은 환경사 방정식은 정상상태라는 가정하에서 유도된 것이다.

### 参考文献

- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction, *Proc. 13th ICCE*, ASCE, pp. 471-490.
- Bretherton, F.P., and Garrett, C.J.R. 1969. Wave trains in inhomogeneous moving media, *Proc. Royal Society of London*, London, England, A **302**: 529-554.
- Copeland, G.J.M., 1985. A practical alternative to the mild slope wave equation, *Coastal Eng.*, **9**: 125-149.
- Dalrymple, R.A., Kirby, J.T. and Chae, J.W., 1988. Very wide angle water wave models and wave diffraction. Part 2. Irregular bathymetry, UFL/COEL-88/001 (Chapter 4), Coastal and Oceanographic Engineering Department, Univ. of Florida, Gainesville.
- Dalrymple, R.A., Suh, K.D., Kirby, J.T. and Chae, J.W., 1989. Models for very wide-angle water waves and wave diffraction. Part 2. Irregular bathymetry, *J. Fluid Mech.* **201**: 299-322.
- Ebersole, B.A., Cialone, M.A. and Prater, M.D., 1986. Regional coastal processes numerical modeling system, Report 1, RCPWWAVE-A linear wave propagation model for engineering use, Technical report CERC-86-4, US Army Engineer WES, Vicksburg, Mississippi.
- Horikawa, K. and Kuo, C.T., 1966. A study of wave transformation inside the surf zone, *Proc. 10th ICCE*, ASCE, Tokyo, 217-233.
- Ito, Y. and Tanimoto, K., 1972. A method of numerical analysis of wave propagation—Application to wave diffraction and refraction, *Proc. 13th ICCE*, ASCE, pp. 503-522.
- Jeong, S.T., 1990. Wave transformation in regions of slowly varying depths with currents, Ph.D dissertation, Dept. of Civil Engineering, Seoul National Univ., Seoul, Korea.
- Kirby, J.T., 1983. Propagation of weakly-nonlinear surface water waves in regions with varying depth and current, ONR Tech. Report 14, Research Rep. CE-83-37 Dept. of Civil Eng., Univ. of Delaware, Newark.
- Kirby, J.T., 1984. A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography, *J. Geophys. Res.*, **89**(C1): 745-747.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A., 1986. Modeling waves in surfzones and around islands, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, **112**: 78-93.
- Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W., 1960. The changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents, *J. Fluid Mech.*, **8**: 565-583.
- Longuet-Higgins, M.S. and Stewart, R.W., 1961. The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, *J. Fluid Mech.*, **10**: 529-549.
- Madsen, P.A. and Larsen, J., 1987. An efficient finite-difference approach to the mild-slope equation, *Coastal Eng.*, **11**: 329-351.
- Mei, C.C., 1982. *The applied dynamics of ocean surface waves*, Wiley-Interscience, New York.
- Ohnaka, S., Watanabe, A. and Isobe, M., 1988. Numerical modeling of wave deformation with a current, *Proc. 21th ICCE*, ASCE, pp. 393-407.
- Panchang, V.G., Cushman-Roisin, B. and Pearce, B.R., 1988. Combined refraction-diffraction of short-waves in large coastal regions, *Coastal Eng.*, **12**: 133-156.
- Radder A.C., 1979. On the parabolic equation for water-wave propagation, *J. Fluid Mech.*, **95**: 159-176.
- Stoker, J.J., 1957. *Water waves: The mathematical theory with applications*, Interscience publishers, Inc., New York.

- Wang, H., Lin, L., Zhong, H. and Miao, G., 1991. Sebastian Inlet physical model studies. Part I-Fixed bed model, UFL/COEL-91/001, Coastal and Oceanographic Engineering Department, Univ. of Florida, Gainesville.
- Watanabe, A., and Maruyama, M., 1986. Numerical modeling of nearshore wave field under combined refraction, diffraction and breaking, *Coastal Engineering in Japan*, **29**: 19-39.
- Whitham, G.B., 1962. Mass, momentum and energy flux in water waves, *J. Fluid Mech.*, **12**: 135-147.
- Winer, H.S., 1988. Numerical modeling of wave-induced currents using a parabolic wave equation, Ph.D dissertation, Coastal and Oceanographic Engineering Department, Univ. of Florida, Gainesville.
- Yan, Y., 1987. Numerical modeling of current and wave interaction on an inlet-beach system, Technical Report No. 73, Coastal and Oceanographic Engineering Department, Univ. of Florida, Gainesville.
- Yoo, D. and O'Connor, B.A., 1986a. Mathematical modeling of wave-induced nearshore circulations, *Proc. 20th ICCE, ASCE*, pp. 1667-1681.
- Yoo, D. and O'Connor, B.A., 1986b. Ray model for caustic gravity waves, *Proc. 5th Congress of Asian and Pacific Division, IAHR*, **3**: 1-13.