정수를 이용한 퍼지최대흐름에 관한 연구
A Study on the Fuzzy Maximal Flow using Interger

신 재 환*
김 창 은**
심 종 칠***

Abstract

In the existing deterministic network, the capacity of each arc has determined property. But actually, it may be a property which cannot be determined. Even though it should be determining, it contains many errors. In treating these kinds of problems, fuzzy theory is suitable. Recently, due to development, the study on complicated and indefinited systems which contain fuzziness could be possible.
This paper includes that the capacity of each arc and the goal quantity with nonnegative integer have the fuzziness. The object is to search the new mathod of fuzzy maximal flow quantity. If the degree of arc membership function of the minimal cut part is not larger than that of arc membership function of the part except the minimal cut, first calcurate nonfuzzy maximal flow quantity, and then can compute the optimal quantity the 3rd step at one time with Max-Min fuzzy operating in the arc capacity of minimal cut and the goal quantity without a great number of recalculation.

I. 서론

인간의 지식과 기술의 끊임없는 발달로 현대사회는 그 구성요소들 사이의 복잡하고 다양한 결합으로 형성되는 많은 문제들을 안고 있으며 또한 이를 해결하고자 노력하고 있다. 1965년 Zadeh에 의해 최초로 제안된 퍼지집합은 불확실한 경계를 갖고 있는 집합의 인식을 기초로 한다. 즉, 어떤 대상이 명확하게 정의되어 있지 않고 구성된 원소들의 경계가 명확하지 않는 경우이다. 예를 들면 '젊은 사람들의 집합', '늙은 사람들의 집합' 등과 같은 경우에는 경계가 불확정적이며, 이러한 집합에서의 대상의 해석은 객관적 개념이라기 보다는 주관적 개념, 즉 확률적이라기 보다는 모호성(fuzziness)과 관련된다.[1, 2, 3, 5]
이러한 복잡하고 해결이 어려운 문제들은 시스템으로 파악될 수 있기 때문에 network라는 수학적 구조로 표시될 수 있으며 아울러 network 모형으로 구성될 수 있다. 이런 network에 적용되는 기존의 기법들은 결정론적(deterministic)인 방법을 취하고 있다.[5] 그러나 기존의 결정론적인 Network에서는 각 arc의 용량이 결정적인 성질의 것이었지만 실제로 각 arc의 용량은 결정될 수 없는 성질을 가질 수 있으며 결정된다 하더라도 많은 오차를 포함하고 있다.
이러한 성질의 문제를 처리하는 데 있어서 퍼지이론(Fuzzy theory)이 매우 적절하며, 입력자료를 퍼지이론으로 처리하면 모형과정에서 불확실성을 반영하고 이러한 불확실성을 포함하는 결론을 얻을 수 있-

* Lousiana State Univ.
** 명지대학교 산업공학과
*** 명지대학교 대학원 산업공학과

다. 최근에 퍼지이론의 발달로 인하여 모호성(fuzziness)이 포함된 복잡하고 불분명한 시스템에 관한 연구가 가능하게 되었다.[2, 3, 5]

퍼지이론을 이용한 Network에 관한 연구들을 살펴보면 먼저 Stefan CHANAS와 Jerzy KAMBUROWSKI[8]가

쓴 The Use of Fuzzy Variables in PERT 논문은 Network모델내에 활동기간을 Fuzzy Variables의 형태로 나타난 상황으로 볼 때 완성기간 추정에 관한 방법을 제시하였고, 이를 FPERT로 불렀다. Stefan CHANAS와 Waldemar KOLODZIEJCZYK[9]가 쓴 Maximum Flow in a Network with Fuzzy Arc Capacities 논문은 Network흐름의 비음 정수인 arc 용량이 모호성을 가지고 모호성을 가진 목표와 함께 비퍼지 network의 최대흐름양부터 하나씩 증가시켜 최적치를 구하는 방법을 제시하였고, Real-Valued Flows in a Network with Fuzzzy Arc Capacities의 논문은 arc 용량이 실수일 때 최적치의 방법을 제시하였다. Igor Gazdik[7]의 Fuzzy-Network Planning - FNET 논문은 Fuzzy를 이용한 Network에 있어서 Max-Min방법을 이용하여 최장경로를 찾는 방법을 제시하였고, Fuzzy shortest paths를 쓴 Cerry M. Klein[6]은 동적계획법(DP)를 도입하여 가능한 경로 중 최소의 소속함수를 갖는 경로 구하는 방법을 제시하였다.

본 논문에서는 유향그래프(directed graph)의 network에 있어서 각 arc의 용량과 의사결정자의 목표량이 모호성을 가질 때 퍼지이론을 적용하여 퍼지최대흐름의 최적량에 대해 새로운 방법을 찾아 보는 것이 목적이다.

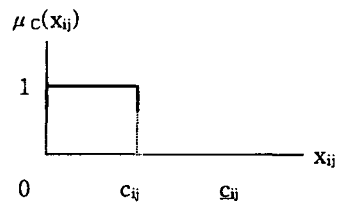
II.퍼지최대흐름

기존의 Network에서는 각 arc의 용량이 정확히 결정되어지고, 그에 따라 최대흐름을 구하는 여러가지 알고리즘을 개발하였으나, 실지로 Network상의 arc용량은 흐름의 손실 변화등으로 인하여 퍼지화시키는 것이 바람직 할 것이다. 아울러 목표량도 또한 퍼지화하여, 퍼지최대흐름의 문제해결을 위한 퍼지이론의 몇가지 정의와 가정들을 살펴보고, 문제 설립 후 문제해결을 시도하고자 한다.

2.1 퍼지집합의 소속함수

(1) 각 arc용량의 소속함수

$$\mu_C(x_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_{ij} < c_{ij} \\ R[\ c_{ij},\ \underline{c_{ij}} : x_{ij}] & \text{if } c_{ij} \le x_{ij} \le c_{ij} \\ 0 & \text{if } x_{ij} > c_{ij} \end{cases}$$

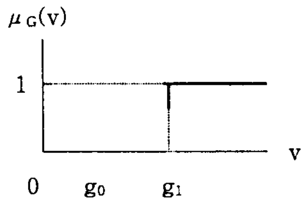


< 그림 2-1 > arc(i,j)의 용량에 대한 소속함수

(2) 목표량의 소속함수

의사결정자가 만족할 수 있는 목표량 G는 퍼지집합이다. 소속함수는 다음과 같다.

$$\mu_G(v) = \begin{cases} 0 & \text{if } v < g_0 \\ L[\ g_0,\ g_1 : v] & \text{if } g_0 \le v \le g_1 \\ 1 & \text{if } v > g_1 \end{cases}$$



< 그림 2-2 > 목표량 G에 대한 v의 소속함수

의사결정자의 목표량이 g_1 이상의 양일 경우 충분히 만족할 수 있으므로 소속함수 값은 1이 된다.

(3) 결정소속함수

문제해결을 위한 퍼지결정 D는 다음과 같다.

$$D = \bigcap_{(i,j)\in A} C_{ij} \cap G$$

즉, D내의 소속함수 $\mu_D(v)$의 값중 최대값이 최적값이 된다.

$$\mu_D(v) = \mu_C(v) \wedge \mu_G(v)$$

$$\text{Max } \mu_D(v) = \text{Optimal value}$$

여기서 $\mu_C(v)$는 $\wedge_{(i,j)\in A}\ \mu_C(x_{ij})$이고, 모든 network arc의 흐름에서 마지막 node t에 도달한 양이 v가 되는 소속함수 값이 된다.

2.2 문제형성

본 논문에서는 algorithm의 성격상 비음 정수만 다루기로 한다.

(1) 최대흐름(maximal flow)

기존의 최대흐름의 방법은 아래와 같다.

Network S = < N, A, C > (출발지 $s \in N$과 도착지 $t \in N$일 때)에서 최대흐름의 전형적인 형식이 형성된다고 하자. N은 node의 집합이며 $i,j \in N$이라 정의하고, $A \subset N \times N$은 arc의 집합, $c(i,j)=c_{ij} \in C$는 ark$(i,j) \in A$의 용량이라 정의한다. 비음정수 x_{ij}는 network arc들에 관련있고 다음의 조건들을 만족한다.

(i) $0 \le x_{ij} \le c_{ij}, \qquad \forall\ i,j \in N$

(ii)

$$\sum_{i\in F} x_{ij} - \sum_{i\in \bar{F}} x_{jk} = \begin{cases} -v & \text{for } j = s, \\ 0 & \text{for } j \neq s,\ t, \\ v & \text{for } j = t \end{cases}$$

여기서 F는 j의 선행 node의 집합이고, $\bar{F}$은 j의 후속 node의 집합이다.

(iii) max v

(2) 최대흐름의 정의

정의 1. 최대화(Maximization)

$$\mu_{OvP}(z) = \bigvee_{x \vee y = z} [\mu_O(x) \wedge \mu_P(y)], \quad z \in X$$

여기서, z의 원소는 x와 y원소의 한개 이상의 조합으로 구성된다. 이 때 x와 y의 소속함수를 비교하여 적은 값을 택한 뒤 그 값들 중 최대로 큰 값이 z의 소속함수가 된다.

정의 2. 최대값(Maximum value)

집합 O에서 최대가 되는 값을 결정하는 방법은 다음과 같다.

$$\mu_O(x_0) = \text{Max } \mu_O(x)$$

여기서 $\mu_O(x_0)$은 집합 M의 소속함수이고, $\mu_O(x)$가 최대가 되도록 해주는 원소가 x_0가 되는 것이다.

정의 3. 최대흐름

v가 network 상의 흐름량이고 v의 집합을 D라 할때, 다음과 같은 조건에서 v^*의 흐름이 최적흐름이다. 이때 D는 용량과 목표량 사이에 관계되는 결정집합이며, 결정소속함수에 이용된다.

$$\mu_D(v^*) = \underset{v}{\mathrm{Max}}\ \mu_D(v)$$

정의 4. cut($\underline{X}$,X)

비퍼지 network에서 출발지 s와 도착지 t사이에 분리할 수 있는 cut($\underline{X}$,X)가 존재하며 만약 v가 network S=<N,A,C> 내에서 최적흐름이라면 다음과 같은 조건을 만족하는 network S가 된다. 이런 cut의 집합 $\underline{X}$와 집합 X 사이에서 합집합은 $\underline{X} \cup X = N$이 되며, 교집합은 $\underline{X} \cap X = \phi$이 된다.

(i) $(i,j) \in (\underline{X},X),\ i \in \underline{X},\ j \in X \ \Rightarrow\ \mu_C(x_{ij}) \geq \mu_C(v)$

(ii) $(i,j) \in (X,\underline{X}),\ i \in X,\ j \in \underline{X} \ \Rightarrow\ x_{ij} = 0$

정의 4.에 나타난 cut($\underline{x}$,x)는 비퍼지 최대흐름에서 '병목'의 형태를 이루는 cut를 최소 cut라 부른다. 각 arc의 흐름량이 x_{ij}이고 전체 흐름량이 v일 때 다음과 같은 등식을 얻을 수 있다.

$$v = \sum_{(\underline{X},X)} x_{ij}$$

이와 같은 최소 cut의 개념은 본 논문의 해결기법에 아주 중대한 영향을 끼친다. 퍼지최대흐름의 경우에서 network내의 최적흐름은 최소cut에 있는 arc를 이용해 결정한다.

2.3 퍼지 최대흐름의 해결방법

문제의 해결방법은 용량의 제약을 만족시키면서 '가능한 큰값'과 '가능한 최선의 방법'이 되는 흐름을 찾는 것이다. 앞에서 논의된 정의들은 최적흐름의 결정을 위한 연산방법의 구조내에 이용된다.

< 연산방법 >

초기화

$\mu_C(x_{ij})=1$ 로만 구성된 arc용량 c_{ij}가 포함된 비퍼지(non-fuzzy) network S=<N,A,C>내에서 최대흐름량 v를 찾는다. 만약 여기서 $\mu_G(v)=1$이면 이것이 최적량이 되며 끝난다. 아니면 다음의 단계로 간다.

단계 1.

최소 cut(i,j)로 이루어진 arc용량들의 소속함수 $\mu_C(x_{ij})$를 다음과 같이 계산하여 $\mu_T(v_g)$를 구한다. $x_{ij} \in T$

$$\mu_T(v_g) = \mathrm{Max}\ \underset{x_{ij} \in T}{\mathrm{Min}}\ [\ \mu_T(x_{ij})\ ]$$

단계 2.

아래의 공식

$$\mu_T(v_g) \leq \mu_C(v_g)$$

이 성립하면 다음 단계 3으로 가고 아니면 v_g 양을 하나 추가하여 다시 단계 1로 되돌아 간다.

단계 3.

단계 2.에서 나온 마지막 v_g 값으로 최대의 정도(degree)로 용량제약을 만족하는 전체흐름을 다시 만들어 다음 조건을 검토한다.

$$\mu_T(v_g) = \mu_C(v_g)$$

위의 조건이 성립하면 최적해가 되며 끝난다. 아니면 다음 단계 4.로 간다.

위의 조건은 최소 cut집합 T에서의 부분집합으로만 계산해서 나온 $\mu_D(v_g)$ 값이 전체집합 N에서 v_g양만큼 계산한 $\mu_C(v_g)$ 값과 살펴볼 때 동일하다는 것은 s부터 T까지의 arc와 T에서 t까지의 arc에서 $\mu_D(v_g)$ 값 이하로 arc가 없어서 최적해가 된다는 것이다.

단계 4.

v_g의 양을 하나 감하여 전체 network의 흐름을 다시 만든다.

단계 5.

다음의 공식이 성립하면 v_g+1이 최적이다. 아니면 단계 4.로 다시 간다.

$$\mu_C(v_g) > \mu_G(v_g)$$

Ⅲ.예제

다음 그림 3-1의 network에서는 node가 10개인 퍼지network모형이다. 이때 퍼지최대흐름을 구하여 보면각 arc A, B, ... , S의 용량이 모호성을 가진다. 용량의 퍼지숫자는 다음 표와 같다.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
c_{ij}	4	20	13	4	5	7	7	2	15	7
$\underline{c}_{ij}$	10	23	23	8	11	17	14	3	15	13

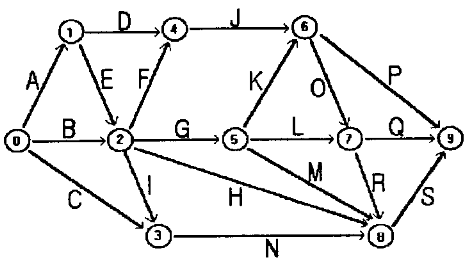
	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
c_{ij}	9	7	15	8	5	10	15	6	11
$\underline{c}_{ij}$	17	7	31	24	8	10	32	15	15

< 표 3-1 > 각 arc의 퍼지용량

목표량 G의 퍼지숫자는 다음과 같다.

v	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
μ_G	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0

< 표 3-2 > 목표량의 소속함수

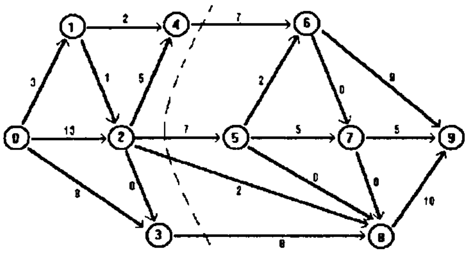


<그림 3-1 > 퍼지 Network

<단계 1.>
기존의 최대흐름방법으로 비퍼지최대흐름을 구하면 다음 그림 3-2와 같이 구할 수 있다. 최소cut의 arc와 그 용량은 아래와 같고 그림에서 점선 부분에 나타난다.

최소cut의 arc(i,j)와 x_{ij}: (4,6)→7, (2,5)→7, (2,8)→2, (3,8)→8

최대흐름량 = 24



<그림 3-2 > 비퍼지 최대흐름도

<단계 2.>

여기서 '+' 기호는 덧셈이 아니라 조합적 합계(combinatorial sum)를 뜻하며, 최소cut에 소속된 arc의 소속함수로 Max-Min 계산을 한다. * 기호는 흐름량 v에서의 값이다.

24(v_g)   25(v_g)   26(v_g)

1.*   0.8333(J)   (2J) 0.6667
0.8571(G)   (2G) 0.7143
0.9375(N)*   (2N) 0.875 *
(J+G) 0.8333 + 0.8571 = 0.8333
(J+N) 0.8333 + 0.9375 = 0.8333
(G+N) 0.8571 + 0.9375 = 0.8571
소속함수의 값 0.875 (해당경로 2N)

27(v_g)

(3J) 0.5
(3G) 0.5714
(3N) 0.8125
(2J+G) 0.6667+0.8571=0.6667
(2J+N) 0.6667+0.9375=0.6667
(2G+J) 0.7143+0.8333=0.7143
(2G+N) 0.7143+0.9375=0.7143
(2N+J) 0.875 +0.8333=0.8333
(2N+G) 0.875 +0.8571=0.8571*
(J+G+N) 0.8333+0.8574+0.9375=0.8333
소속함수의 값 = 0.8571, (해당경로 2N+G)

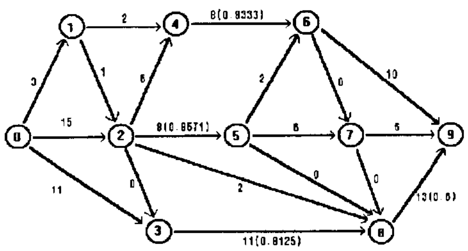
28(v_g)

(4J) 0.3333
(4G) 0.4286
(4N) 0.75

(3J+G) 0.5+0.8571=0.5
(3J+N) 0.5+0.9375=0.5
(3G+J) 0.5714+0.8333=0.5714
(3G+N) 0.5714+0.9375=0.5714
(3N+J) 0.8125+0.8333=0.8125
(3N+G) 0.8125+0.8571=0.7186
(2J+2G) 0.6667+0.7143=0.6667
(2J+2N) 0.6667+0.875 =0.6667
(2G+2N) 0.7143+0.875 =0.7143
(2J+G+N) 0.6667+0.8571+0.9375=0.6667
(J+2G+N) 0.8333+0.7143+0.9375=0.7143
(J+G+2N) 0.8333+0.8571+0.875 =0.8333*
소속함수의 값 = 0.8333, (해당경로 J+G+2N)

29(v_g)

(5J) 0.1667
(5G) 0.2857
(5N) 0.6875
(4J+G) 0.3333+0.8571=0.3333
(4J+N) 0.3333+0.9375=0.3333
(4G+J) 0.4286+0.8333=0.4286
(3J+2G) 0.5 +0.7143=0.5
(3J+2N) 0.5 +0.875 =0.5
(3G+2J) 0.5714+0.6667=0.5714
(3G+2N) 0.5714+0.875 =0.5714
(3N+2J) 0.8125+0.6667=0.6667
(3N+2G) 0.8125+0.7143=0.7143
(4G+N) 0.4286+0.9375=0.4286
(4N+J) 0.75 +0.8333=0.75
(4N+G) 0.75 +0.8571=0.8571
(3J+G+N) 0.5 +0.8571+0.9375=0.5
(J+3G+N) 0.8333+0.5714+0.9375=0.5714
(J+G+3N) 0.8333+0.8574+0.8125=0.8125*
(2J+2G+N) 0.6667+0.7143+0.9375=0.6667
(2J+G+2N) 0.6667+0.8571+0.875 =0.6667
(J+2G+2N) 0.8333+0.7143+0.875 =0.7143
소속함수의 값 0.8125 (해당경로 J+G+3N)
이하생략.
단계 2에서 v_g의 적정값은 29가 되고 소속함수 값은 0.8125가 된다.

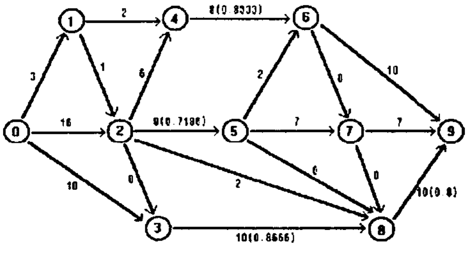


<그림 3-3 > v_g =29, 단계 2.의 퍼지최대흐름도

그림 3-3은 단계 2에서 구한 퍼지용량을 network에 나타낸 것이다.

<단계 3.>

v_g=29에서 다시 퍼지최대흐름을 만들면 다음 그림 3-4와 같다.



<그림 3-4 > v_g =29 의 퍼지최대흐름도

소속함수값이 제일 적은 arc G가 0.7186이다. 단계 3의 공식을 살펴보면

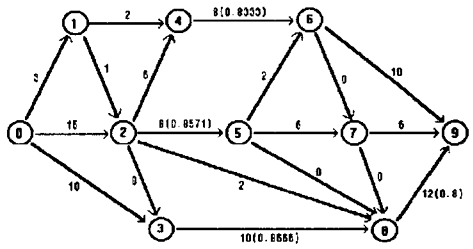
$$\mu_T(v_g)=0.6 \neq \mu_C(v_g)=0.7186$$

이기 때문에 최적값이 아니다.

단계 2.에서 Max-Min 연산에 의해 나온 최소 cut에 해당되는 arc 부분의 $\mu_T(v_g)$ 값과, 실제 $\mu_C(v_g)$ 값은 틀리다는 것을 알 수 있다. 즉 Max-Min 연산은 최소 cut의 흐름에서만 연산을 한 것이고, 이때 실제 흐름에서 소속함수 $\mu_C(v_g)$ 값은 최소 cut 이외 다른 arc의 소속함수에서 보다 작아질 수 있음을 알 수 있다.

<단계 4.>

앞의 단계 5의 조건을 만족하지 않기 때문에 v_g = 29-1 = 28이 되며 그 흐름은 다음 그림 3-5와 같다.



<그림 3-5 > v_g =28 의 퍼지최대흐름도

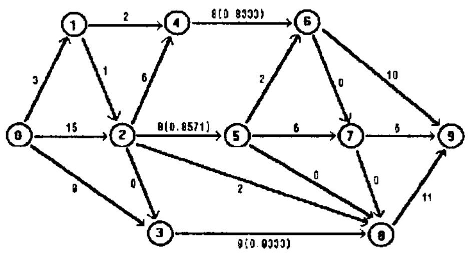
$$\mu_C(v_g) = 0.8 \text{ (arc S)}$$

<단계 5.>

$\mu_C(v_g)=0.8$ 〈 $\mu_G(v_g)=0.8$ 이 성립하지 않기 때문에 단계 4.로 간다.

<단계 4.>

앞의 단계 5의 조건을 만족하지 않기 때문에 v_g = 28-1 = 27이 되고 그 흐름은 다음 그림 3-6과 같다.



<그림 3-6> v_g =27 의 퍼지최대흐름도

$\mu_C(v_g)$ = 0.8333 (arc J)

<단계 5.>

$\mu_C(v_g)$=0.8333 〉 $\mu_G(v_g)$=0.7

식이 성립하기 때문에 v = 27-1 = 28이 최적량이며 $\mu_C(v)$=0.8이다.

Ⅳ.결론

기존의 network시스템에서는 결정적인 용량으로 하여 계량화 모형을 이용하고 있었다. 그러나 사실상 현실적으로 이러한 모형에서 각 arc의 용량은 결정될 수 없는 성질이 있을 수 있으며, 결정된다 하더라도 많은 오차를 포함하고 있다.

따라서 본 논문은 퍼지집합론의 이론적 특성을 이용하여 주관적 판단을 포함한 모호성을 각 arc의 용량에 적용하여 퍼지최대흐름의 최적량에 대해 새로운 방법을 찾아보았다.

비퍼지의 최대흐름량에서 모호성 목표량과 비교하면서 흐름량을 하나씩 증가시켜 최적량을 찾는다는 Stefan CHANAS and Waldemar KOLODZIEJCZYK 방법은 흐름량을 하나씩 증가시키면서 똑같이 계속 반복 수행해야 하므로 양의 규모가 커짐에 따라 반복횟수 또한 커진다.

그러나 본 논문에 제시된 방법의 결론은 최소 cut부분의 arc소속함수의 정도가 최소 cut를 제외한 부분의 arc 소속함수 정도보다 크지 않다는 조건을 갖는다면, 비퍼지 최대흐름량을 구한 후 수차례 내지 수십차례의 반복연산을 하지 않고 단계 3.까지 단 한번의 Max-Min 퍼지연산으로 최적량을 구할 수 있었다.

이런 조건 이외에 최소 cut 이외 arc 소속함수의 정도가 최소 cut arc 소속함수의 정도보다 적다면, 그리고 이런 arc들이 많이 있다면, 비퍼지 최대흐름 이후부터 흐름량을 하나씩 증가시켜 최적량을 찾는 방법보다 본 논문에 제시된 방법이 우수하다는 것을 밝히지 못하였으며, 향후 이 문제를 연구과제로 남긴다.

Ⅴ.용어설명

c_{ij}는 node i에서 node j까지 가는 arc의 비퍼지성 용량이다.

$\underline{c}_{ij}$는 arc의 용량이 모호성을 가질 때 소속함수 값이 0이 되는 용량이다.

G는 목표량으로서 퍼지집합이다.

g_0는 소속함수 값이 0, g_1은 1로서 목표량의 퍼지함수는 구간 [g_0, g_1]에서 증가하는 함수이다.

i,j는 각각 node를 가리킨다.

L( )과 R( )은 참조함수이다.
T는 최소 cut(i,j)의 집합이다.
v_g는 목표량의 변수이다.

參 考 文 獻

1. 박민용, 최항식, 퍼지시스템의 응용입문, 대영사, 1990.
2. 이광형, 오길록, 퍼지이론 및 응용:1권 이론, 홍릉과학출판사, 1991.
3. , 퍼지이론 및 응용:2권 응용, 홍릉과학출판사, 1991.
4. 윤석철, 계량경영학, 경문사, 1982.
5. Arnold KAUFMANN and Modan M. GUPTA, Fuzzy Mathmatical Models in Engineering and Management Science, North-Holland, 1988.
6. Cerry M. Klien and Fuzzy shortest paths, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 39, pp27-41, 1991.
7. Igor Gazdik, Fuzzy-Network Planning - FNET, IEEE Transactions on Reliability, Vol. R-32, pp304-313, 1983.
8. Stefan CHANAS and Jerzy KAMBUROWSKI, The Use of Fuzzy Variables in PERT, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 5, pp 11-19, 1981.
9. Stefan CHANAS and Waldemar KOLODZIEJCZYK, Maximum Flow in a Network with Fuzzy Arc Capacities, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 8, pp 163-173, 1982.
10. , Real-Valued Flows in a Network with Fuzzy Arc Capacities, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 13, pp 139-151, 1984.