韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
1994. 12. 제 33권, 제 2호, 251-265.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Dec. 1994. Vol. 33, No. 2, 251-265.

VAN HIELE 이론에 의한 중학생들의 기하적 사고 수준에 관한 연구

김 미 정(청량중)
이 종 희(이화여대)

Ⅰ. 서론

기하 교육은 논리적 사고 능력을 발달시키고 실세계의 공간에 대한 직관력을 발달시키기 위한 것으로서(Geddes, Forthunato, 1993), 수학적 사고력을 길러 주는데 가장 중요한 역할을 해왔다. 그러나, 현재의 중학교 기하 교육은 학생들의 사고 능력을 키워주기보다 주입식 교육에 치중해 있으며 학생들의 수준에 비해 지나치게 엄밀한 기하를 가르침에 따라서, 학생들이 기하를 공부할 때 곤란을 겪도록 하는 문제점을 갖고 있다. 학생들이 기하 학습시 겪는 어려움을 밝혀내기 위해 연구했던 van Hiele 부부는 기하적 사고를 5 수준으로 나누었고, 이것을 기초로 기하 사고 수준에 대한 이론을 세웠다. 이 이론은 1960년대에 소련 수학 교육자들의 집중적인 연구와 실험을 통해 그 타당성을 인정받았고 기하 교육 과정에 적용되어 성공적인 결과를 얻었다. 또한 미국에서는 최근 그 가치가 새롭게 인식되어 관련된 연구가 많이 이루어지고 있다(한태식, 1991).

이에 본 연구에서는 기하학에 있어서의 학생들의 van Hiele 수준을 조사하고 분석하여 효과적인 기하 교육 방법을 찾고자 한다. 본 연구에서 알아보고자 하는 구체적인 연구 문제는 다음과 같다.

(1) 우리 나라 중학생들 중 van Hiele 이론에 따라서 수준을 정할 수 있는 학생이 어느 정도인가?

(2) van Hiele level test를 통한 우리나라 중학생의 기하 수준은 어떠한가?

(3) van Hiele level test 결과에 의해 선택된 각 수준 학생들의 임상면담시 수준과 임상 면담을 통해 가능한 학생들의 van Hiele 수준의 진보 정도를 알아보고,

(4) van Hiele level test에 의한 학생들의 수준과 임상 면담에 의한 학생들의 수준 분포 사이에는 어떤 관계가 있는가?

(5) 학생들이 기하를 공부할 때 또는 진보하려할 때 어떤 어려움에 직면하는가?

Ⅱ. 이론적 배경

A. van Hiele 이론

1950년대, 네덜란드에서는 기하교육을 둘러싼 많은 문제점들이 제기되었고, 그에 대한 연구가 많이 이루어지고 있었다. 당시 네덜란드의 수학교사였던 P. M. van Hiele과 Dina van Hiele 부부 역시 중학교 기하에서 자신의 학생들이 직면했던 어려움들의 원인에 대해 의문을 갖고 연구한 결과 학생의 사고 수준을 올리고 기하에 대한 직관을 얻도록 학생들을 돕기 위한 원리들을 고안했다. van Hiele은 학생들의 기하에 대한 사고 수준을 다음과 같이 구분하였다.

제 1수준 (시각적 인식 수준) : 도형을 그 구성 요소에 대한 명확한 고려없이 전체로서 시각적 외관에 의해 판별한다. 이 수준의 학생은 도형의 성질이나 도형 사이의 관계를 알지 못하며 주변의 대상을 단지 모양이라는 수단에 의해 파악하기 때문에, 정사각형과 직사각형 등의 도형을 인지하면서도 직사각형은 정사각형

과는 전혀 다른 것으로 인식한다.

제 2수준 (도형의 분석적 수준) : 주변 대상의 정리 수단이던 모양(도형)이 연구의 대상이 되어 도형의 구성 요소와 성질에 대한 비형식적 분석을 통해 도형을 파악한다. 학생은 도형을 형식적으로 정의할 수는 없지만 경험에 의해 도형의 성질을 기술할 수 있고, 이렇게 얻어진 성질들을 수단으로 도형을 파악한다. 그러나 아직 도형의 성질들을 관련 지우지는 못한다.

제 3수준 (이론적 배열 수준) : 도형의 성질과 도형 사이의 관계가 연구의 대상이 되어 도형의 여러가지 성질 및 관계를 파악하고 정의를 이해한다. 도형과 그 성질들 사이의 논리적인 관계가 정의를 통해 확립되지만 아직 연역의 완전한 의미를 알지 못하며 공리의 역할이나 명제들 사이의 논리적 관계를 이해하지도 못한다. 즉 간단한 연역은 가능하지만 아직 증명은 이해되지 않는다.

제 4수준 (연역적 추론 수준): 명제가 연구의 대상이 되며 명제들 사이의 논리적 관계를 통하여 공리, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하며 기하의 연역적 체계를 파악한다. 또한 이 수준에 이른 학생은 기하학적인 사고의 전개와 형성의 수단인 연역의 의미를 이해하며, 생소한 정의로부터도 연역적인 사고를 할 수 있다.

제 5수준 (기하학의 엄밀화 수준): 기하학의 체제 그 자체가 연구의 대상이 되어 여러 가지 공리 체계를 비교할 수 있다. 이 수준의 학생은 구체적인 대상(도형)이 없어도 이론을 전개해 나갈 수 있을 정도로 사물에 대한 추상화가 발달되어있다. 형식적인 엄밀성과 고도의 추상 능력으로 특징지워지는 이 수준의 학생들은 비유클리드 기하를 이해할 수 있다.

van Hiele의 수학 학습 수준은 다음과 같은 특징을 갖고 있다(우정호,1986).

첫째, 학생들은 수학 학습에서 n-1 수준을 통과하지 않고는 n수준에 도달할 수 없으며, 수학적 사고는 모든 수준을 차례로 거쳐서 발달한다.

둘째, 모든 학생들이 같은 속도로 각 수준을 통과하지 않으며 수준의 이행은 적절한 지도에 의해 촉진될 수도 있고, 부적절한 지도때문에 지연될 수도 있다.

세째, 앞 수준의 사고에서 내재적이었던 것이 다음 수준에서 의식화되어 명확히 인식되게 된다.

네째, 각 수준의 사고는 그 자신의 기호와 그를 연결하는 관계망을 갖고 있다. 수준의 이행은 언어의 확장과 관계된다.

다섯째, 서로 다른 수준에서 추리하는 사람은 서로를 이해할 수 없다. 이것이 교사와 학생 사이에 자주 발생하여 학습-지도를 어렵게 만드는 요인이 되고 있다.

또한, P. M. van Hiele에 따르면, 한 수준에서 다음 수준으로의 진보는 안내 단계(inqurity), 직접 지도 단계(directed orientation), 명확화 단계(expliciting), 자유로운 탐구 단계(free orientation), 통합 단계(integration)의 다섯 국면을 포함한다.

B. van Hiele 이론을 기초로 한 연구

소련에서는 1960년대에 실험 연구를 통하여 van Hiele 이론의 타당성을 검증하였으며 이 연구를 바탕으로 국민학교 1~8 학년의 기하 교육 과정을 개발하였다. 그 교육 과정에 따라 학습한 8학년 학생들의 기하 수준은 전통적인 교육에 따라 학습한 11학년 학생들이 달성한 것과 비교될 수 있는 결과를 가져왔는데, Wirszup은 이것을 "거의 1세기 동안의 러시아 수학 교육에서 가장 획기적인 변화"라고 지적하고 있다(최현호, 한태식, 1990).

미국의 Chicago대학 Issak Wirszup 교수는 1974년 NCTM 연차 모임에서 van Hiele의 아이디어를 소개했다. 그는 소련에서의 van Hiele 연구에 대해 보고했으며, 이것은 미국 교육학자들로 하여금 van Hiele의 아이디어에 관심을 갖도록 만들어 주었다. 따라서 최근에 기하에서

van Hiele 모델을 다루는 세 가지 주요 연구가 보고되었다.

Oregon Project(Shaughnessy & Burger, 1985)는 학생들의 기하에 대한 이해를 측정하기 위하여 1-12학년 학생을 대상으로 인터뷰 작업을 실시했으며, van Hiele 이론이 기하 과제에 대한 학생들의 사고 과정을 나타내는데 유용한가를 밝히고자 하였다.

Chicago Project(Usiskin, 1982)는 van Hiele 이론의 수준과 학생의 기하학적 개념에 대한 성취도 및 증명 능력 사이의 관계를 보고자 하였다.

Brooklyn Project(Fuys, Geddes, Tishler, 1988)는 세 개의 초, 중등학교 기하 교과서를 심도있게 분석한 결과 교과서가 학생들의 van Hiele 수준 향상에 별 도움을 주지 못하게 구성되어 있다고 밝혔다. 또한, 6-9학년 학생들과의 임상 면담을 함으로써 학생이 기하를 어떻게 학습하며 기하를 학습할 때 어떤 어려움을 겪는지를 살피고 van Hiele 수준을 향상시키기 위한 교육적인 지도 모델을 제시하였다.

우리나라에서 van Hiele 이론에 근거한 연구는 아직 많지 않으며, 우리나라 학생을 대상으로 한 연구를 살펴보면 다음과 같다.

최혜정(1990)은 중학교 2학년과 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 Chicago Project의 van Hiele level test를 실시하여 van Hiele 이론이 타당성이 있음을 검증하였으며, 교과서의 기하 단원을 분석하여 현행 중학교 교과서 중 몇몇 단원이 van Hiele 이론과 일치하지 않고 있음을 지적했다.

최현호(1990)의 연구는 van Hiele 이론을 기초로 증명 능력에 관한 연구를 실시하여 중학교 2학년 학생에게 증명을 도입하는 것은 무리이며, 고등학교 1학년 학생들 역시 아직 완전히 증명을 이해하고 있지 않음을 밝혔다.

김효정 등(1993)의 연구는 중학생들을 대상으로 van Hiele level test를 실시했고, 이들 중 10명을 대상으로 Oregon Project에 의해서 임상 면담을 실시한 결과 2학년에서의 증명 수업이 수준의 진보에 별로 효과적이지 못했음을 알 수 있었고 Mayberry의 연구를 토대로 직사각형, 이등변삼각형, 정삼각형, 평행의 네 가지 개념에 대하여 수준의 일치도를 조사해본 결과 일치하지 않는 것으로 드러났다.

이상의 연구 결과들은 학생들의 기하학적 사고 과정을 설명하고 있는 van Hiele 이론이 유용함을 지지하고 있으며, 기하 학습시 van Hiele 이론에 바탕을 두고 지도되어야함을 지적하고 있다. 본 연구에서는 Brooklyn Project에 의한 임상 면담을 실시하므로 다음 단원에서는 이에 대해 자세히 살펴보기로 하겠다.

C. Brooklyn Project

Brooklyn 대학에서는 임상 연구를 위하여 임상 면담의 조사 도구로 사용할 세 Module을 개발하였으며, 이 Module은 도형의 개념, 각, 면적의 세 가지 주제로 이루어져 있다(Fuys, Geddes, Tishler, 1988).

1. Module의 주요 특징

임상 면담의 조사 도구로서 개발된 Module의 특징은 다음과 같다.

첫째, Module은 여러 가지 주제에 걸쳐서 사고 수준을 평가하기 위하여 여러 van Hiele 수준으로 표현 가능한 다양한 주제를 포함하고 있다.

둘째, 이 Module은 학생의 반응에 따라서 보충 교육을 융통성있게 실시하며, 학생의 반응에 의존하거나 용어를 바꿔 말하는 것을 허용한다.

세째, 학생의 수준을 결정하는 주요 요소는 학생의 능력과 이전의 기하 경험이며, Module은 처음 평가되는 초기 수준과 학습 중에 평가되는 수준을 평가한다.

네째, 다섯 단계의 국면을 임상면담에 통합하려고 시도했다.

다섯째, 주제를 시작하는 문맥을 제공하고, 흥미를 끌기 위한 시작 활동과 전체적인 시각적 구조를 특색짓는 활동을 포함한다.

여섯째, 손으로 조작하는 접근은 언어적인 표현이 부족한 학생들에게 기하에 대한 그들의 사고를 표현하도록 도울 수 있다.

2. Module의 내용

Module은 세 가지의 주제로 설정되어 있으며, Module 1 에서는 기초적인 기하 개념과 사각형의 성질을 다루고, Module 2 에서는 각의 측정과 삼각형, 사각형, 오각형의 내각의 합, 그리고 삼각형과 평행사변형에서의 각의 관계(즉, 외각과 대각)를 다룬다. 또한 Module 3 은 직사각형, 삼각형, 평행사변형, 사다리꼴에서의 넓이를 다룬다.

(1) Module 1

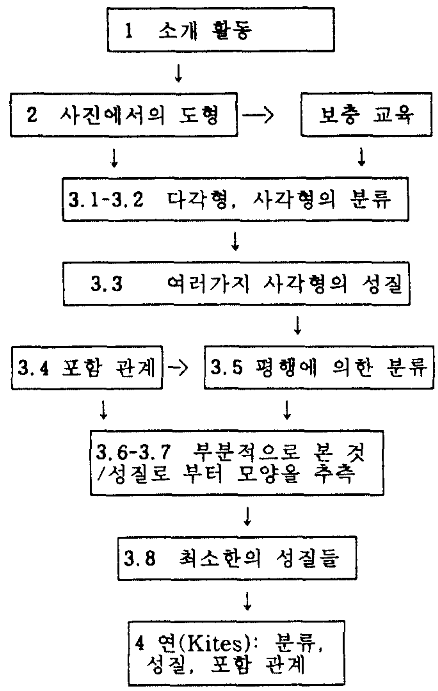
이 Module 1은 2차원의 도형을 분류하는 것에 관심을 갖는다<그림 1>. 먼저, 소개 활동은 도형과 성질에 대해 학생들이 어떤 사고 수준에서 생각하는지를 결정하기 위한 것으로, 필요에 따라서는 적절한 교육을 학생들에게 제공한다. 또한, 학생들은 어떤 그림의 기하적인 면에 대해 이야기하고, 도형에 대한 성질의 역할을 탐구하며, 특히 최소한의 성질에 대해 탐구한다. 끝으로 분류 활동은 학생들의 사고 수준이 변화했는지를 확인하기 위해 제공된다.

(2) Module 2

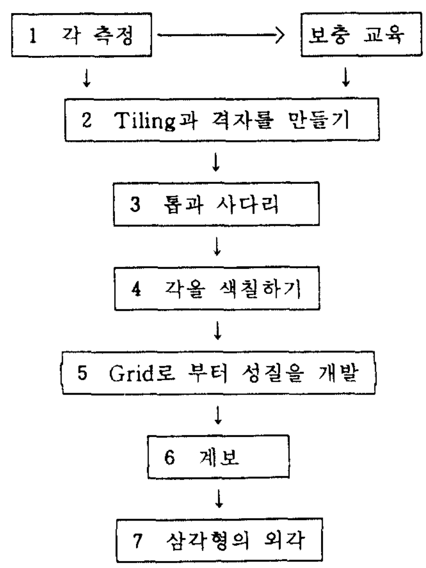
Module 2는 각의 측정과 다각형에서의 각의 관계에 대해 관심을 갖는다<그림 2>.

먼저, 학생이 각을 측정할 수 있는지를 평가하고, 필요하면 쐐기[1]와 overlay를 사용해서 각을 측정하도록 보충 교육을 받는다. 학생은 타일로 tiling 패턴을 만들고, 톱과 사다리의 성질을 형성하며, 톱과 사다리의 각의 합동과 평행선의 성질을 안다. 그리고 나서 면담자는 tiling

1) 일정한 기준 각을 갖는 부채꼴 형태로서 각을 측정하는 도구



<그림 1> Module 1의 내용

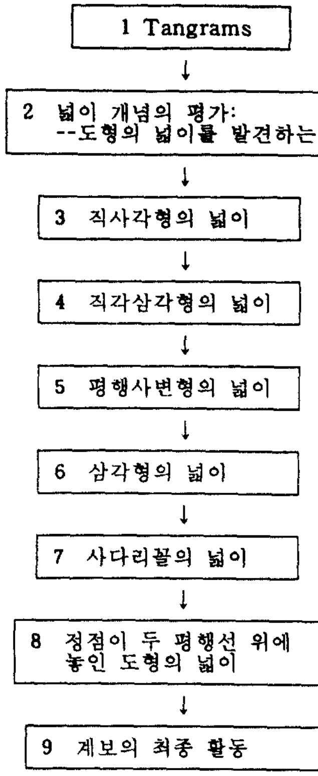


<그림 2> Module 2의 내용

격자를 사용하여 삼각형과 평행사변형의 각의 합에 대한 성질을 알아내고, 성질들 사이의 상호 관계를 형성하는 학생들의 능력을 평가한다. 학생들은 앞에서 배웠던 사실들(룸, 사다리, 삼각형의 내각의 합에 대한 성질들)을 새로운 상황(삼각형의 외각)에 적용하고, 앞에서 수준 2 또는 수준 3에서 사고했던 학생들이 새로운 상황에서도 할 수 있는지를 결정한다.

(3) Module 3

Module 3은 다각형의 넓이를 다룬다<그림 3>. 먼저 tangram 조각들을 사용하여 도형들의 넓이를 비교한다. 또한, 넓이의 개념, 넓이의 측정과 직사각형, 삼각형, 평행사변형, 사다리꼴의 넓이를 구하는 과정에 대한 학생들의 이해를 평가한다. 끝으로 3 수준으로 사고했던 학생들을 위한 것으로서 정점이 두 평행선 위에 놓인 도형의 넓이를 구하기 위한 일반적 원리를 발견하는 기회를 학생에게 제공한다.



<그림 3> Module 3의 내용[2)]

3. van Hiele Level Descriptors

van Hiele level Descriptors는 교과서와 임상면담에 의한 학생들 반응에 대하여 van Hiele 수준을 정하기 위해 만든 평가 도구로서, 열 개의 van Hiele 자료들을 자세히 조사함에 의해 구체화 되어졌다(Fuys, Geddes, Tishler, 1988).

Level 1: 학생은 도형들(예를 들어, 정사각형들, 삼각형들)과 다른 기하적 형태들(예를 들어, 직선들, 각들, 격자들)을 겉모양에 따라서 확인하고 조작한다. 학생은,

1) 전체적인 겉모양에 의해 도형을 인식한다.
2) 도형을 작도한다.
3) 표준적인 호칭과 비표준 호칭을 적절히 사용해서 도형과 다른 기하적 형태에 이름을 붙인다.
4) 전체적인 겉모양에 기초해서 도형들을 비교하고 분류한다. 그러나, 그것의 구성 요소에 의하여 도형을 분석하지 않는다.
5) 도형들을 직접 조작해봄으로써 정형 문제를 푼다.
6) 도형들의 특성을 묘사할 때 성질들을 생각하지 않는다.
7) 도형들에 대해 일반화하거나, 관련된 언어를 사용하지 않는다.

Level 2: 학생은 도형의 구성 요소들과 구성 요소들 사이의 관계에 의해 도형을 분석하고, 도형의 성질들을 경험적으로 확증하고, 문제들을 풀기 위하여 성질들을 사용한다. 학생은

1) 도형의 구성 요소들 사이의 관계를 관찰과 실험을 통해 확인한다.

2) 활동 2로부터의 결과들은 다음에 무슨 활동이 이루어지는지를 결정한다. 대개의 학생들은 활동 3 또는 4로 갔다.

2) 구성 요소들과 관계들에 대한 적합한 어휘를 상기하고 사용한다.

3) 그것들의 구성 요소들 사이의 관계에 따라서 또는 성질에 따라서 도형들을 분류한다.

4) 규칙들에 대한 언어적이거나 기호적인 문장을 해석하고, 그것들을 적용한다.

5) 특정한 도형들의 성질을 경험적으로 발견하고, 도형의 종류에 대한 성질들을 일반화한다.

6) 친숙하지 않은 도형들에 대한 성질들을 발견한다.

7) 도형들에 대해 알려진 성질들을 사용하거나 또는 통찰력있는 접근에 의해 기하 문제들을 푼다.

8) 교사/자료에 의해 지도받거나, 또는 자발적으로 개발한 도형들의 성질에 대하여 일반화를 명확하게 말하고, 관련된 언어(예를 들어, all, every, none)를 사용한다.

9) 도형의 성질들이 어떻게 서로 관련되어 있는지를 설명하지 못한다.

10) 형식적 정의를 형성하거나 사용하지 못한다.

11) 성질들 사이의 부분 집합 관계를 설명하지 못한다.

12) 경험적으로 발견된 일반화의 논리적 설명 또는 증명에 대한 필요를 알지 못하고, 관련된 언어(예를 들어 if-then, because)를 정확히 사용하지 못한다.

Level 3: 학생은 정의를 형성하고 사용하고, 전에 발견된 성질에 순서를 주는 비형식적인 연역적 논증을 제시한다. 학생은

1) 도형의 종류를 특징짓는 성질을 확인하고, 이것이 충분함을 시험한다.

2) 도형을 특징지을 수 있는 성질들의 최소 집합들을 확인한다.

3) 도형들의 종류에 대한 정의를 형성하고 사용한다.

4) (다이어그램들, 오려진 도형들, 또는 다른 자료들을 사용하여) 스스로 비형식적인 연역적 논증을 한다.

5) 성질에 의해 도형들을 배열하고, 부분 집합 관계를 설명한다.

6) 연역적 방법에 의해 새로운 성질들을 발견한다.

7) 계보에 여러 가지 성질들을 상호 관련시킨다.

8) 어떤 것을 증명하기 위해 한 개 이상의 설명을 주고, 계보를 사용해서 이 설명들을 증명한다.

9) 명제와 그 역 사이의 차이를 비형식적으로 인식한다.

10) 문제를 풀기 위해 전략들 또는 통찰력있는 추론들을 확인하고 사용한다.

11) 수학의 공리적 의미로 연역의 의미를 이해하지 못하고, 형식적인 증명을 할 수는 있으나 가정에서 결론으로 이끌어가는 논리적인 순서를 파악하지 못한다.

Level 4: 학생은 공리적 체계, 정리와 정리들의 상호 관계 안에서 증명한다. 학생은

1) 정의되지 않은 용어들, 정의들, 기초적인 가설들(예, 공준)에 대한 필요를 인식한다.

2) 형식적 정의의 특성(예, 충분조건)과 정의들의 동등성을 인식한다.

3) 수준 3에 대해 형식적으로 증명되었던 공리적 관계를 증명한다.

4) 정리와 관계된 명제들(예, 역, 이, 대우) 사이의 상호 관계를 증명한다.

5) 정리들의 관계망 사이의 상호 관계를 증명한다.

6) 정리들에 대한 여러 증명들을 비교하고 대조한다.

7) 논리적 결과에서 초기의 정의 또는 공준을 바꾼 결과들을 설명한다.

8) 몇가지의 다른 정리들을 통합한 일반적인 원리를 증명한다.

9) 논증을 뒷받침하기 위한 모델을 사용하면

서, 단순한 공리의 집합으로부터 자주 증명을 창조한다.

10)형식적인 연역적 논증을 한다. 그러나, 스스로 공리적 체계를 조사하거나 비교하지는 않는다.

Level 5: 학생은 여러 공준 체계에서 정리들을 엄밀히 증명하고, 이 체계들을 분석/비교한다. 학생은

1)여러 공리적 체계들로 정리들을 엄밀히 증명한다.(예를 들어, 기하의 기초에 대한 Hilbert의 접근)

2)공리적 체계를 비교한다.(예를 들어, 유클리드와 비유클리드 기하):공리들 중 변화가 결과적인 기하에 어떻게 영향을 주는지를 자발적으로 탐구한다.

3)공리들의 집합의 무모순성, 공리의 독립, 여러 공리들의 동등함을 증명한다; 기하에 대한 공리 체계를 창조한다.

4)문제들을 풀기 위하여 일반화된 방법을 생각해낸다.

5)수학적 증명/원리가 적용될 가장 넓은 문맥을 찾는다.

6)새로운 관점을 개발하고, 논리적 추리에 접근하기 위하여 주제에 대한 깊이있는 학습을 한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

A. van Hiele level test 실시

1. 대상

서울시 소재 1개 중학교 1, 2, 3 학년 남여 각각 2학급씩 12학급의 609명을 대상으로 실시하였다.

2 문항 구성

테스트의 문항은 Chicago Project에서 개발한 5지선다형 25문항 중 수준 5의 5문항을 제외하고 수준 1에서 수준 4의 20문항으로 구성되었으며, Wilson의 주장을 기초로 하여 수정되었다.

3. 테스트 실시 기간 및 방법

본 연구에서는 1993년 7월 6일에서 7월 12일 사이에 1회 25분간 실시했으며, 본 연구자와 다른 수학 교사들에게 의뢰하여 통제 실시되었다.

4. 채점절차

van Hiele level test는 객관식이므로 본 연구자가 직접 채점했으며, 학생들의 van Hiele 수준을 정하기 위해, 다음과 같이 점수를 배정하였다.

문항 1번 ~ 5번(수준 1)에서 기준에 도달하면 1점

문항 6번 ~ 10번(수준 2)에서 기준에 도달하면 2점

문항 11번~ 15번(수준 3)에서 기준에 도달하면 4점

문항 16번~ 20번(수준 4)에서 기준에 도달하면 8점

또한, 본 연구에서는 한 학생이 주어진 수준에서 5문제 중 4문제를 정답으로 했을 경우에 그 수준에 도달한 것으로 간주한다. 각 점수를 더한 합산점은 그 학생이 도달한 수준을 나타내 준다.

본 연구에서는 연속적으로 van Hiele 수준에 도달한 학생(fitters)과 비연속적으로 도달한 학생(non-fitters)의 두 그룹으로 나누어 조사했다. 연속적으로 도달한 학생의 van Hiele 수준은 그 학생이 도달한 가장 높은 수준으로 정했다. 그러므로 합산점 0, 1, 3, 7, 15는 van Hiele 수준의 수준 0 ~ 4를 나타낸다. 수준 0은 그 학생이 수준 1의 기준에도 도달하지 않았음을 의미한다.

비연속적으로 도달한 학생의 경우 그 학생이 비연속적으로 도달한 수준 중 가장 높은 수준으로 정하고 '준 level'이라 정의했으므로, 합산

점 2는 준 level 2를, 합산점 4 ~ 6은 준 level 3, 합산점 8 ~14는 준 level 4를 나타낸다.

B. 임상 면담

1. 대상

앞서 조사한 609명의 학생 중 각 수준과 각 준 level의 학생 9명을 <표 2>와 같이 임의로 선정하여 실시하였다.

<표 2> 임상 면담 대상자

대상 학생	수준	학년	성별	기준 4/5
A	수준 0	2	남	0
B	수준 1	2	남	1
C	수준 1	3	여	1
D	수준 2	2	남	3
E	수준 3	3	여	7
F	수준 4	3	남	15
G	준level 2	2	여	2
H	준level 3	3	남	5
I	준level 4	3	남	8

2. 임상 면담 내용 작성

임상 면담 내용은 Brooklyn Project에서 제시된 Module의 내용을 번역하여 우리나라 학생들의 수준에 맞게 정리하였다.

3. 임상 면담 실시 시기 및 방법

본 연구에서는 1993년 9월 15일에서 10월 9일 사이에 본 연구자가 학생당 40분씩 3-6회에 걸쳐 연구 대상 학생 1인씩과 임상 면담을 실시했다. 학생들은 연필, 자, 각도기를 사용했고, 본 연구자는 본 논문 2장의 이론적 배경에 적힌 Module의 내용에서 제시된 자료를 제작 사용하여 면담을 실시했다.

각 면담 내용은 녹음 테이프에 녹음됐으며, 녹음 테이프를 분석하여 각Module에 대해 학생들 사고의 처음 수준과 진보 정도, 어려움, 단어, 배우는 형태 등을 카드에 요약했다.

4. 임상 면담 결과의 분석 방법

본 논문에 기록된 van Hiele level descriptors를 기준으로 임상 면담 결과를 기록한 녹음 테이프와 요약 카드를 분석했다.

Ⅳ. 연구 결과

A. 연구문제 1: 현 우리 나라 중학생들 중 van Hiele 이론에 따라서 수준을 정할 수 있는 학생은 어느 정도인가?

van Hiele 이론을 적용할 수 있는 학생은 van Hiele의 이론 중 n-1 수준을 거쳐야만 n 수준으로 갈 수 있다는 성질을 적용할 수 있는 학생들(fitters)을 말하고, 그 이외의 학생들(non-fitters)은 van Hiele 이론을 적용할 수 없는 학생들이다.

연구 문제 1의 분석을 위해 van Hiele level test의 결과 van Hiele 수준에 연속적으로 도달한 학생과 비연속적으로 도달한 학생의 두 그룹으로 나누었으며, 결과는 다음 <표 3>과 같다.

<표 3> level fitters와 non-fitters의 수

학년	fitters	non-fitters	계
1	186 (88.6%)	24 (11.4%)	210
2	186 (89.4%)	22 (10.6%)	208
3	155 (81.2%)	36 (18.8%)	191
계	527 (86.5%)	82 (13.5%)	609

<표 3>에 알 수 있듯이 조사 학생들의 약 86.5%가 연속적으로 van Hiele 수준에 도달하여 van Hiele 이론에 따라 수준을 정할 수 있는 것으로 나타났다. 또한, Chicago Project

<표 4> 각 수준의 fitters의 분포

학년	수준					계
	0	1	2	3	4	
1	73(39.2%)	89(47.8%)	19(10.2%)	5(2.7%)	0(0%)	186
2	47(25.3%)	93(50.0%)	34(18.3%)	12(6.5%)	0(0%)	186
3	31(20.0%)	64(41.3%)	21(13.5%)	34(21.9%)	5(3.2%)	155
	151(28.7%)	246(46.7%)	74(14.0%)	51(9.7%)	5(0.9%)	527

(1982)에서는 약 88%, Senk(1983)의 보고서에서는 약 76%, 그리고 한태식 논문(1986)에서는 약 88%, 또한 우리 나라 학생들을 대상으로 한 연구 중 최현호 논문(1990)에서는 86%, 최혜정 논문(1990)에서는 82%, 김효정 등의 논문(1993)에서는 88%인 것으로 나타 볼 때, 본 연구 결과는 상당히 의미가 있는 것으로 해석된다.

B. 연구문제 2: van Hiele level test를 통한 우리나라 중학생의 기하수준은 어떠한가?

조사 대상자들의 기하학 수준을 알아보기 위해 van Hiele 수준의 분포를 조사하였다. 이때, <표 4>에서의 수준 0은 수준 1에 도달하지 못한 학생을 말한다.

<표 4, 5>를 기초로하여 다음의 몇 가지를 생각할 수 있었다.

첫째, 테스트 대상자 중 fitters들을 기준으로 우리나라 중학생들의 van Hiele 수준을 학년별로 보면, 1수준에 도달하지 못한 학생은 1학년이 39.2%이고, 2학년이 25.3%, 3학년이 20.0%인 것으로 미루어 보아 1학년의 기하 과정을 통해 학생들의 수준이 많이 진보했으나, 여전히 많은 학생이 수준 1에도 미치지 못했다.

둘째, 수준을 정할 수 있는 학생 중에서 2학년 학생들의 6.5%가 수준 3 이상이었고 3학년 학생들의 경우에는 학생들의 25.1%가 수준 3 이상으로서 18.6%가 수준 3 이상으로 진보한 것으로 나타났으나 그럼에도 불구하고 중학교 3학년 중 74.8%의 학생들이 수준 2 이하로 사고하는 것으로 나타났다.

세째, 2학년 학생 중 수준 2 이하인 학생이 93.6%에 이르므로 이들은 증명을 하는 데 어려움을 가질 것으로 보인다. 따라서, 교사들은 2학년 2학기에서의 증명을 도입하는 기하단원을 배우기 이전에 수준 2 미만인 학생들을 위해 비형식적인 기하 내용을 다루어 주어야 할 것으로 보인다.

C. 연구문제 3. van Hiele level test 결과에 의해 선택된 각 수준의 학생들은 임상면담

<표 5> 각 준 level의 non-fitters의 분포

학년	수준			계
	2	3	4	
1	9(37.5%)	15(62.5%)	0(0%)	24
2	7(31.8%)	14(63.6%)	1(4.5%)	22
3	6(16.7%)	24(66.7%)	6(16.7%)	36
	22(26.8%)	53(64.6%)	7(8.5%)	82

시 어느 수준에서 사고하는 것으로 나타나며, 학생들의 van Hiele 수준은 임상 면담을 통해 어느 정도 진보할 수 있는가?

연구문제 3의 분석을 위해 각 수준의 학생 9명을 대상으로 임상 면담을 실시했으며 각 학생에 대한 임상 면담 결과에 따른 수준은 <표

<표 6> 임상 면담 대상자의 각 Module에서의 van Hiele 수준
(p : 조언후의 응답, g : 지도 후의 응답)

면담내용 \ 학생		A	B	C	D	E	F	G	H	I
Module 1	기초개념	1	2	1	2	1-2	2	1-2g	2	1-2
	분류	1	2	1	2	2	2	2	1-2	2
	사각형의 성질	....	2	1-2	2	2	2	2	2	1-2p
	포함 관계	....	3	....	2-3g	2g	3	2	3	....
	도형을 밝힘	1	1-2	1-2	1-2	1-2g	4	1	4	1
	최소 성질들	1	2	2	1-2	....	3	3	3	2p
	정의	....	....	....	2g	3	3	....	3	1
	연의 성질	1	2	1-2	2	3	3	....	3	2
	부분 집합	....	3	....	2g	3	3	....	3	....
Module 2	각의 측정	1	2	1	1-2	2g	4	2	4	2
	톱/사다리	1	2p	2	3	2g	4	2	4	1-2p
	톱/사디리를 통한 증명	1	2	1-2p	2-3	3	3	2g	3	2-3
	각의 합:삼각형	1-2	2g	2	2-3	2-3	4	2-3g	4	2
	각의 합:사각형,오각형	2	2-3	2	2-3g	2-3p	3	2-3p	3	2-3p
	외각	1-2	2-3	1-2	3	3	3	3	3	2-3p
Module 3	면적의 개념	1	1-2	1-2	2	2	3	2	2	2
	면적:직사각형	2	2	2	2-3	3	3	2	3	3
	면적:직각삼각형	2-3	2-3	2-3	2-3	2-3	3	2-3	3	2-3
	면적:평행사변형	2	3	3	2-3p	2	3	2-3	3	2-3g
	면적:삼각형	2	2-3	3	3	2-3g	3	2-3	3	2-3g
	면적:사다리꼴	....	3	2-3	2-3	2	3	2-3	3	2
	면적:중선규칙	....	2	2	2	2	3-4g	....	3-4g	2g
van Hiele level test에 의한 수준		0	1	1	2	3	4	준 2	준 3	준 4

6>과 같다. 따라서 먼저 각 학생들의 특징을 살펴 보면 다음과 같다.

학생 A는 모든 것을 시각에 의존해서 사고했고 계산을 비교적 잘 해냈으나 자신이 왜 그 방법을 사용했는지를 잘 설명하지 못했다. 또한 타일을 만들 때도 면담 학생들 중 유일하게 타일을 하나씩 그렸다. 이 학생의 경우 자신이 말한 것에 대해 면담자가 이유를 묻거나 새로운 개념을 도입했던 대부분의 경우에 혼란스러워 했고 더 이상 생각하려 하지 않고 금방 포기해 버렸다.

학생 B는 성질을 정확히 사용했고 포함 관계를 잘 알아냈을 뿐 아니라 면적을 구하는 공식을 비형식적인 연역적 방법으로 잘 이끌어 냈다. 그러나 언어 사용에서 직사각형을 '직삼각형'이라고 사용하기도 했다. 이 학생은 임상 면담을 통해서 9명의 학생 중 가장 빠른 속도로 사고 수준이 향상되었다.

이에 반해 van Hiele level test에서 학생 B와 같은 수준 1에서 사고하는 것으로 나타났던 학생 C는 학생 B에 비해 더 낮은 수준에서 사고 했으며 모든 활동에서 반응이 매우 느렸고, 기초적인 기하 개념들인 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴 등에서 오류를 갖고 있었다. 예를 들어, 사다리꼴에 대해서는 한 변만 평행하다는 오류를 갖고 있었으며, 이것은 선행 학습시 접하게 되는 도형의 모양에 의해 갖게되는 오류라고 보여진다.

학생 D는 주로 성질에 의해 사고했고, 각이나 면적에 대해 처음에는 공식을 말했으나 스스로 이유를 제시했다. 또한 새로운 개념들을 쉽게 받아들였다.

학생 E는 van Hiele level test 시 수준 3으로 나타났으나 임상 면담 시 시각에 많이 의존했고 상대적으로 매우 낮은 수준에서 사고하는 것으로 나타났다. 특히, 시각적 오류를 많이 갖고 있을 뿐 아니라 공식이 생긴 이유에 대한 필요성을 전혀 느끼지 못하는 것으로 보였고, 이유를 말해보라고 하면 매우 당황해 했다. 이것은 현재 수학 교육이 주입식 교육으로 이루어지는데 기인한 것으로 보여진다.

학생 F는 모든 경우에 바른 기하 개념을 갖고 있을 뿐 아니라 면담자의 요구 없이도 연역적인 이유를 스스로 줄 수 있었고 새로운 개념을 쉽게 인식했다. 따라서 이 학생은 보다 공리적인 내용을 가르쳐도 잘 해낼 수 있으리라 여겨지며, 여기서 수준 3 까지만 응답한 것은 Module의 내용이 그 이상에서 사고하는 것을 이끌어 내지 못하기 때문이라고 여겨진다.

학생 G, H, I는 van Hiele level test에서 수준을 정할 수 없는 준 level의 학생들로서 학생 I의 경우에는 매우 낮은 수준에서 사고하는 것으로 나타났다. 이들에 대해 살펴 보면 다음과 같다.

학생 G는 대부분의 것을 시각에 의해 결정했고 선행 학습시 보아온 도형의 형태에 의해 생긴 시각적 오류를 갖고 있었다. 특히, 새로운 개념 도입시 난처하게 느꼈고, 매우 어려워했다. 이 학생은 성질과 시각에 동시에 의존하는 경향을 강하게 보였는데, 도형의 포함 관계나 최소 성질 등을 이야기할 때 많은 혼동을 가졌다.

학생 H는 학생 F와 거의 비슷한 수준에서 사고했으며 새로운 개념을 잘 받아들이고 익히는 태도를 보였다.

학생 I는 이전에 기하를 배울 때의 단편적인 도형들의 형태에 집착하여 많은 오류를 갖고 있었으며, 처음에는 정사각형의 모든 변이 합동이라는 사실조차 기억하지 못했다가 면담자의 자극에 의해 생각해냈다. 또한 사다리꼴은 아무 각이나 두 각이 같은 사각형이라고 말했다. 이외에도 기하 개념에 대한 많은 오류를 갖고 있음에 따라 계보를 형성할 때마다 다르게 형성하기도 했다.

위에서 살펴본 학생들의 반응을 전체적으로 분석해 보면 다음 몇가지를 생각할 수 있다.

첫째, 학생들은 임상 면담시 전반적으로 Module 2, 3에 비해 Module 1에서 낮은 수준을 보였는데, 이것은 학생들이 기하 교육시 각이나 면적의 개념을 알고 면적을 계산하는 것보다 도형에 대한 개념을 더 어려워하는 것 때문임을 알 수 있다.

둘째, 이 학생들은 초기 수준을 평가하는 내용에서 주로 수준 1 또는 2를 나타냈는데, 이는 학교에서 기하 교육을 할 때 단순히 주입식 또는 계산 위주의 교육을 강조함으로써 보다 높은 수준으로 생각하도록 가르치지 않기 때문이라고 여겨진다. 면담 대상 학생 모두는 교육적 Module을 통해서 임상 면담을 하는 중에 초기 수준보다 높은 수준을 보였는데, 다소 차이가 있긴 하지만 초기 수준보다 한 두 수준 정도 진보한 것으로 보인다.

세째, 많은 학생들이 새로운 개념이 도입될 때 어려움을 느끼는 경향이 있었으며, 특히, 학생 G의 경우 임상 면담 시 각 Module에서 수준 2 또는 3으로 응답했음에도 불구하고 새로

운 개념인 연이나 중선이 도입됐을 때는 전혀 응답할 수 없었다.

마지막으로, 학생 F, H는 중학교 수학이 목표로 하는 수준 3 보다 높은 수준에서 사고하는 것으로 나타났으므로, 이 학생들은 고등학교에서의 형식적 기하학을 공부하기 위한 준비가 된 것으로 보여진다.

임상면담 결과 각 Module에서의 학생들의 수준을 정리해 보면 <표 6>과 같다.

다음의 코드들이 학생들의 수준을 표시하기 위해 사용되었다.

…… : 응답을 할 수 없음

p : 조언후의 응답

g : 지도 후의 응답

1-2 : 한 활동을 시작할 때는 수준 1으로 응답하나 활동을 하는 동안에 스스로 수준 2로 응답

2-3 : 한 활동을 시작할 때는 수준 2로 응답하나 활동을 하는 동안에 스스로 수준 3으로 응답

3-4 : 한 활동을 시작할 때는 수준 3으로 응답하나 활동을 하는 동안에 스스로 수준 4로 응답

그 외에는 코드들을 조합해서 이해하면 되는데 한 가지만 예로 들면 다음과 같다.

2-3p : 한 활동을 시작할 때는 수준 2로 응답하나 면담자의 조언후 수준 3으로 응답

D. 연구문제 4: van Hiele level test에 의한 학생들의 수준과 임상 면담에 의한 학생들의 수준 분포 사이에는 어떤 관계가 있는가?

<표 6>을 살펴 보면, van Hiele level test에서의 수준과 임상 면담 시의 수준 사이에는 많은 차이가 있음을 알 수 있다. 이것은 van Hiele level test의 경우에 오지 선다형 문항으로 이루어져 있으므로 학생들의 단순한 지식만을 평가하게 되는 반면에 임상 면담에서는 학생의 생각에 대해 직접 이야기를 나눔으로써 각 주제에 대한 학생들의 사고 수준을 좀 더 정확하게 평가할 수 있기 때문인 것으로 보인다.

즉, 학생들이 van Hiele level test를 실시할 때 같은 문항에서 답을 맞게 말하는 경우에도, 학생들은 각자 다른 방법으로 사고함으로써 답을 구해낸 것일 수 있다.

예를 들어, 학생 B와 C는 van Hiele level test 결과 같은 수준 1 이었음에도 불구하고, 임상면담을 통해서 볼 때, 이들은 서로 다른 방법 - 즉, 학생 B는 성질에 의해 사고한 반면에 학생 C는 시각적인 면에 의존함-에 의해 사고하고 있었으며, 이들은 임상 면담시 서로 다른 수준을 보였다.

면담 결과 학생 B는 대부분의 면담 활동 시 수준 2-3를 보인 반면, 시각적인 면에 의존하는 학생 C는 주로 수준 1또는 2로 응답했음을 알 수 있다.

두번째 예로 학생 A를 들 수 있는데, 이 학생은 van Hiele level test에서 수준 1에도 못미친 수준 0이었으나, 임상 면담시 대부분 수준 1 또는 2에서 응답했으며, 면담자의 지도에 따라서 수준 3으로 사고하기도 한다는 것을 나타내기도 했다. 단, 학생 A의 경우 다른 학생에 비해 사고하는 속도가 느렸다.

또 다른 예로 학생 I는 van Hiele level test에 의하면 준 level 4인 학생으로, 1-3 수준을 건너 뛰고 수준 4에 도달한 학생이다. 그러나 <표 6>에

따르면 학생 I는 Module 1에서 수준 1 또는 2에서만 사고함을 보였으며, 임상 면담시 확인한 바에 의하면 주로 시각에 의존하여 사고하며 기초적인 기하 경험의 부족으로 인해서 수준 진보에 어려움을 갖고 있었다.

위의 경우들을 볼 때, van Hiele level test는 많은 학생들의 기하 사고 수준을 측정할 수 있는 장점을 갖고 있으나, 학생들의 수준을 정하는데 그치는 경향이 있으며 학생들이 어느 부분에서 어려워하거나 틀리는지를 파악하기에는

어려움이 있다.

따라서 위의 사실들로 미루어 볼 때, 학생들의 사고 수준을 알고 기하를 공부할 때의 어려움을 파악하기 위해서는 임상 면담이 반드시 수반되어야겠다.

E. 연구문제 5: 학생들이 기하를 공부할 때 또는 진보하려할 때, 어떤 어려움에 직면하는가?

면담 중에 본 연구자가 느낀 학생들의 어려움은 다음과 같다.

첫째, 학생들이 기하를 공부할 때 처음으로 직면하는 어려움은 언어의 사용이다.

면담을 한 학생 중 많은 학생이 면담 초기에는 부정확한 언어를 사용하기도 하고 어떤 기하 언어에 대해서는 전혀 다른 기하 개념을 가지기도 했으나, 면담이 진행됨에 따라서 용어를 더 정확하게 사용하게 되었다.

예를 들어, 학생 A는 평행사변형과 사다리꼴의 이름을 잘못 알아 바꾸어서 불렀으며, 이들 중 많은 학생이 '대변'이라는 용어를 사용하지 못했고, '대변'이란 용어를 사용한 학생 H 조차도 "대변의 길이가 평행"이라고 말했다. 또한 학생 I는 직사각형을 '직각 사각형'이라고 불렀으며, 학생 B와 C는 직각삼각형을 '직삼각형'이라고 말했다. 그러나 이 학생들은 면담 중에 교육을 통해서 언어를 보다 정확하게 사용하게 되었다.

둘째, 학생들은 그림을 포함하는 문제에서 항상 보아왔던 도형의 모양에 의존하여 생각하는 경향이 있다. 즉, 학생들은 평소 자신이 보아 왔던 도형이 다른 방향으로 놓여진 경우에 그 도형의 이름을 바르게 말하지 못했고, 습관적으로 도형을 익숙한 방향으로 돌려 놓은 후에야 비로소 이름과 성질 등을 확인할 수 있었다.

예를 들어, 정사각형을 돌려 놓았을 경우에 학생 A, B, C, G, H는 마름모라고 부르면서 정사각형임을 깨닫지 못했고, 익숙한 방향으로 놓은 후에야 정사각형임을 깨달았다.

세째, 선행 학습이 제대로 이루어지지 않았을 때는 도리어 기하 수준의 진보를 방해하는 경향을 나타냈다.

한 가지 예로, 대부분의 교과서 또는 교사가 설명하기 위해 그리는 도형들이 학생들에게 잘못된 시각적 편견을 갖게 하는 경우가 있을 수 있다. 예를 들어, 학생 A, B, E, G, I의 경우에 정사각형이 직사각형의 특별한 유형이라는 관계를 받아들이는데 어려움을 느꼈는데 그 이유는 대부분의 교과서에서나 교사가 설명할 때 직사각형을 두 개의 합동인 긴 변과 두 개의 합동인 짧은변을 가진 것으로 그리기 때문이다.

평행사변형과 사다리꼴에서 역시 이런 현상이 나타났는데, 학생 E는 사다리꼴이 서로 다른 길이와 다른 각을 가지며 90°인 각을 갖지 않는다는 오류를 갖고 있었으며, 학생 C, G, I는 평행사변형이 직각을 갖지 않는다는 오류를 갖고 있었다. 이에 따라서, 학생 C, E, G, I는 정사각형이나 직사각형을 사다리꼴, 평행사변형에 포함시키는데 어려움을 가졌는데, 이들 중 학생 E와 G는 면담시 교육을 통해서 성질을 잘 인식하여 포함 관계를 바르게 말할 수 있었던 반면에, 다른 학생들은 자신의 시각적 고정관념에 집착함으로써 오류에서 벗어나지 못했다.

네째로, 시각적인 면에 집착하여 전체적인 도형의 성질을 깨닫지 못하는 학생들이 있었는데, 학생 G와 I는 Module 1의 소개 활동에서 색이 같음을 도형들의 공통점으로 들면서, 다른 공통점에는 관심을 갖지 않았다.

다섯째로, 면적에서 계산 위주로만 교육받아온 학생들의 경우에 면적의 개념을 깨닫지 못하고 습관적으로 계산만을 하려고 했다.

학생 B, C, E는 Module 3의 tangrams 활동에서 도형들의 면적을 비교시 면적을 계산하느라 고민했고, 그 중 C는 제대로 비교하지도 못했으나, 다른 학생들은 도형을 이루고 있는 조

각들의 개수를 비교함으로써 모든 도형의 면적이 같음을 알아냈다. 이것은 계산 교육에 앞서 좀 더 옳바른 개념 교육이 이루어져야함을 시사해준다.

이상에서 살펴 본 진보를 방해하는 위의 예들은 학생들을 위해 교과과정을 더 주의깊게 구성해야할 뿐 아니라, 교사들이 교수 과정에서 많은 주의를 기울여야 할 것임을 나타내 주었다.

V. 결론 및 제언

A. 결론

1. 우리나라 중학생에게 van Hiele 이론의 적용 가능성

실험 결과 중학생 609명 중 약 86.5%가 연속적으로 van Hiele 수준에 도달하여 van Hiele 이론을 적용할 수 있는 것으로 나타났다. 이것은 다른 연구들의 fitters와 non-fitters의 분포와도 유사한 결과로서 상당히 의미있는 것으로 해석되며, van Hiele 이론의 타당성 또한 입증했다고 보여진다.

2. 우리 나라 중학생의 van Hiele level test에 의한 기하 수준

증명을 처음 배우는 중학교 2학년들의 약 93.6%, 중학교 3학년 학생들의 약 74.8%가 수준 2 이하에서 사고하는 것으로 나타났으며 이들은 증명을 이해하는 데 어려움을 가질 것으로 보인다.

3. 임상 면담에서 나타난 기하 수준과 수준의 진보

각과 넓이에 대한 개념과 측정을 다루는 Module 2, 3에서의 수준이 도형의 개념을 다루는 Module 1에서의 수준보다 높게 나타났으며, 이것은 도형에 대한 개념 교육이 각과 면적에 대한 개념보다 어렵기 때문인 것으로 생각된다.

또한 이 학생들의 초기 수준은 주로 1 또는 2 수준으로 나타났으나, 대부분의 학생은 교육적 Module을 통해서 임상 면담을 하는 동안 처음보다 높은 수준으로 진보했다.

4. van Hiele level test에 의한 학생들의 수준과 임상 면담에 의한 수준 분포 사이의 관계

임상 면담을 실시했던 대개의 학생들의 경우에 van Hiele level test에서의 수준과 임상 면담 시의 수준 사이에는 차이가 있었는데, 학생에 따라서는 임상 면담에 의한 수준이 높기 도하고 때로는 더 낮기도 했다. 이것은 van Hiele level test의 경우에는 학생들이 갖고 있는 지식을 평가하여 수준을 정하는데 그치는 반면에, 임상 면담에서는 학생들과의 면담을 통해 학생들이 사고하는 수준과 수준의 진보를 주관적으로 평가하고, 학생들이 겪는 어려움들을 파악함에 따라서 생기는 차이라 여겨진다. 따라서, 학생들의 사고 수준을 정확히 진단하고자 할 때 임상 면담도 병행해야 함을 알 수 있다.

5. 기하를 공부할 때 직면하는 어려움

기하를 공부할 때 부정확한 언어를 사용하거나 항상 보아 왔던 도형의 모양에 의존하여 생각하는 경향이 강함에 따라 진보하는데 어려움을 겪기도 하고, 또한 선행 학습들이 도리어 학습을 방해하기도 한다.

B. 제언

본 연구의 과정과 결과들을 토대로 다음과 같이 제언한다.

첫째, 잘못된 학습 경험 또는 선행 학습이 제대로 이뤄지지 않은 상태에서의 학습은 도리어

혼란을 가져올 수 있으므로, 교사들은 학생들이 국민학교에서부터 비형식적인 기하개념을 충분히 가지도록 교수 과정에서 많은 주의를 기울여야겠다. 또한, 중학교 2학년 중 수준 2 이하인 학생이 93.6%로써 이들은 증명을 하는데 어려움을 겪을 것으로 예상되므로, 교사는 증명을 도입하기 전에 비형식적인 기하 내용을 다루어 주는 것이 바람직하다. 특히, 면담 중에 사용했던 각 Module의 자료들을 실제 수업 진행 시 교편물로 사용함으로써 효과적인 기하 교육을 이룰 수 있을 것으로 본다.

둘째, 중학교 교사들은 기하적 사고 수준이 충분히 교정 가능한 중학생들을 위해서 오류와 잘못된 사고를 찾아내는데 주안점을 두고 임상면담을 실시함으로써, 학생들이 갖는 어려움들을 제거하고 기하 수준을 향상시킬 수 있는 적절한 지도 내용 및 방법을 지속적으로 연구해야겠다.

세째, 임상 면담 내용의 대부분이 현재 수학 교과 과정에서 다루어 지는 것임에도 불구하고 학생들은 낮은 수준으로 반응함을 알 수 있었다. 따라서 교사들은 기하 내용을 가르칠 때 학생들의 수준에 맞으며 학생들의 수준을 진보시킬 수 있는 적절한 지도 방법을 연구하고 사용해야겠다.

VI. 제한점

본 연구의 제한점은 다음과 같다.

첫째, 표본 설정이 한 학교 학생으로 제한되었으므로 그 연구 결과는 선정된 표본에 국한되며, 타지역 학생들을 위한 일반화에는 제한이 있다. 특히, 임상 면담의 결과를 보편적으로 적용하기에는 어려움이 있다.

둘째, 조사 대상자들이 그 동안 받아왔던 교수법이나 교사 개인의 차는 고려하지 않았다.

세째, 임상 면담의 경우 본 연구자가 결과를 분석하는데 있어, 객관성을 기하기는 했으나 수준을 정하기 어려운 경우에는 주관적인 판단이 가미되었다고 볼 수도 있다.

참 고 문 헌

김효정, 박완희, 채은주, 홍경아, 홍정희(1993). van-Hiele 이론에 근거한 우리나라 중학생의 기하 사고 수준 고찰. 추계수학 교육학 연구발표대회 논문집 (대한 수학교육학회), 159-174.

우정호(1986). van Hiele의 수학 학습 수준 이론에 대한 소고. 사대논총, 제 33집, 85-100.

최현호, 한태식(1990). 기하 영역의 van Hiele 수준과 증명 능력에 관한 연구. 수학교육논총, 제 8집, 대한 수학회, 219-261.

최혜정(1990). van Hiele 이론을 통한 기하학 . 의 개념이해 및 문제풀이 연구. 수학교육총론, 제 8집, 대한 수학회, 103-137.

한태식(1991). 기하 교육과 van Hiele 이론. 수학 교육. 한국 수학교육학회. 47-69.

Fuys, D., Geddes, D. & Tishler, R. (1988). The van hiele model of thinking in gemetry among adolescents. City Univercity of New York: Brooklyn College.

Geddes, D. & Forthunato, I. (1993). Geometry: Research and classroom activities. In D.T. Owens (Ed.), Research Ideas for The Classroom: Middle grades mathematics. NCTM..

Senk, S. L.(1983). Proof-writing achievement and Van Hiele levels among secondary school geometry students. Unpublished Doctoral Dissertation. Univ. of Chicago.

Shaughnessy, J. M. and Burger, W. F.(1985). Spadework Prior to Deduction in Geometry. Mathematics Teacher, 78, 419-428.

Usiskin. Z. (1982). Van Hiele levels and achivement in secondary school geometry: Final report of the CDASSG. University of Chicago.