韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1994. 12. 제 33권, 제 2호, 235-249.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Dec. 1994. Vol. 33, No. 2, 235-249.

수학적 문제해결 과정 중 탐구 단계에서 나타나는 메타인지에 관한 연구

-중학교 2학년 우수아를 대상으로-

정 문 숙 (연서중)
이 영 하 (이화여대)

I. 서 론

수학교육의 목표 중 하나인 문제해결 능력 향상을 위해 그동안 수학교육학계에서는 수학 문제해결에 관한 연구에 많은 노력을 기울여 왔다. 그러나 이러한 연구 노력은 대부분 수학 문제나 수학 문제와 유사한 문제에 대한 해결 과정에 나타나는 인지적 전략이나 인지작용의 과정, 인지작용의 산물 등에 집중되어 왔다.

학생 개개인이 실제로 문제에 접하게 될 때, 성공적으로 해결하지 못하는 원인에는 비인지적이거나 메타인지적인 요인에서 비롯되는 경우가 많다. 따라서 학생들의 성공적인 문제해결을 위해서는 문제해결 과정을 수학 인식론적 입장에서 분석하거나 접근하는 방식외에 개개인의 심리적인 측면을 존중하는 메타인지적 관점에서 문제해결 행위를 분석하는 것도 필요하다.

Garofalo와 Lester(1985)는 메타인지가 많은 수학 교육 연구의 대상이 되지 못한 이유를 다음과 같이 들고 있다.

첫째, 메타인 지적 지식과 자기통제(regulation)는 대개 암암리에 이루어지기 때문에 자료를 모으고 분석하기에 매우 어렵다는 것이다. 물론, 문제를 푸는 동안 개인에게 큰 소리로 이야기하게(thinking aloud) 요구하거나 또는 개인의 결정 행동을 회고하도록 할 수 있다. 그러나 많은 심리학자들은 개인이 얼마나 정확하게 자기 자신의 정신 과정을 보고할 수 있는지에 대해 의문을 제기하고 있다.

둘째, 자기 보고(self-reports)가 타당한 데이터의 형태라고 믿는 사람조차도, 한 개인으로 하여금 문제를 푸는 동안 자신의 사고를 언어로 표현하기 위해 사고에 주의를 기울이도록 요구하는 것이 정신 과정에 영향을 미칠 수도 있다고 염려한다.

세째, 그동안 수학교육학자들은, 메타인지를 연구 대상으로 받아들이기를 꺼려해 온 심리학자의 입장을 단순히 뒤쫓아 왔다.

그러나, 최근에 들어서는 수학 문제해결에 관한 연구 방향이 인지적 측면에서 점차 메타인지적 측면으로 그 초점이 맞추어지고 있으며, 문제해결 과정에서 메타인지가 차지하는 역할의 중요성에 대한 인식도 확대되고 있다. 그 예로, Silver(1982)는 수학 문제해결에서 메타인지를 'driving force'라고 부르면서, 메타인지가 아직도 드러나지 않은 주제이지만 앞으로 수학교육 연구의 주된 방향 중의 하나가 될 것이라고 보고 있다(Kroll, 1988, p 58-59).

본 연구의 목적은 수학 문제해결 연구에서 문제해결자의 인지·심리적 특성 내에 존재하는 메타인지에 대한 분석과 문제해결 활동에 작용하는 역할을 구체적으로 살펴보는 것이다.

그 중에서도 특히, 학생들이 고난도의 수학 문제를 푸는 동안 그들이 사용하는 인지적 과정에 미치는 메타인지의 영향을 결정하기 위해서, 문제해결 과정 중 문제해결의 결정적인 단계로 볼 수 있는 탐구 단계를 중심으로 학생들이 어떠한 메타인지를 나타내는지 조사하고자

한다. 왜냐하면 문제해결 과정 중에서 탐구 단계는 학생들의 문제해결에 열쇠가 되는 창의성 및 자신의 아이디어가 포함되는 부분으로 다른 단계에 비해 메타인지가 잘 나타나리라 생각하였기 때문이다.

이를 위해 본 연구에서는 연구 대상을 중학교 2학년 우수아로 삼았다. 연구 결과를 바탕으로 일반 학생보다 수학적 능력이 우수한 학생들이 문제해결 과정의 탐구 단계에서 나타내는 메타인지가 무엇인지 그 특징을 살펴봄으로써 앞으로 수업 현장에서 우수아와 일반 학생들을 지도하는데 도움을 주고자 한다. 본 연구에서 연구 대상을 특별히 우수아로 잡은 이유는 이들이 다른 학생들보다 문제해결 과정 중에서 메타인지를 더 많이 보여줄 것으로 기대되고 또한 그들이 보여주는 메타인지가 성공적인 문제해결에 도움이 되는 측면이 있을 것이며, 이를 통하여 교수 학습적 시사점을 얻을 수 있을 것으로 예상되기 때문이다.

본 연구의 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 중학교 2학년 학생들이 고난도의 수학문제를 풀려고 할 때, 어떤 메타인지적 행동을 하는가?

둘째, 이러한 메타인지적 행동이 학생들의 인지적 행동과 어떻게 상호 작용을 하는가?

세째, 중학교 2학년 학생 중 수학적으로 우수한 학생들이 보여주는 메타인지에는 어떤 공통점이 있는가?

네째, 우수아 중 남학생과 여학생이 보여주는 메타인지에는 어떤 차이점이 있는가?

다섯째, 학생들의 수학적 문제해결에서 메타인지의 역할은 무엇인가?

본 연구의 제한점으로는 먼저, 본 연구에서 연구 대상이 된 우수아 선정에 있어서, 학교 수학 성적과 IQ를 토대로 담당 수학 교사의 추천을 받은 학생 중에서 여러 테스트와 설문지 조사 결과를 근거로 선정하였는데, 이들이 반드시 메타인지를 갖고 있다거나 그것을 의식하고 있다고 볼 수는 없다. 따라서 수학적으로 우수한 학생이 그것에 비례하여 메타인지도 잘 보여준다고 할 수는 없다. 또한 학생 개개인의 문제해결에 대한 태도나 습관, 자신의 성격, 혹은 실험자와 래포(rapport)가 제대로 형성되지 않음으로 인하여 자신의 사고 과정을 잘 표현하지 않고 넘어가는 부분이 있는 점을 감안해 볼 때, 학생들이 자신의 메타인지를 제대로 다 발성 표현했다고 볼 수 없다.

다음으로, 우수아의 메타인지를 알아보기 위한 검사 문제 선정에 있어서, 가능한 한 다양한 문제해결 전략을 가지고 있고 중학교 2학년 학생의 지식 수준을 넘지 않으면서도 쉽게 접해보지 못한 문제를 고르려고 하였다. 그러나, 모든 문제가 의도한 대로 학생들에게 받아들여진 것은 아니었으며, 특별히 새로운 수학적 지식을 필요로 하지 않는 문제이기 때문에 비교적 쉽게 해결한 경우도 있었다.

또한, 연구 대상을 우수아 10명으로 선정하였는데, 그 수는 많은 수라 할 수 없으므로 연구 분석 결과를 일반화하는 데는 무리가 있다. 더구나 남녀 학생수가 남학생 7명과 여학생 3명으로 그 차이가 크고 수가 적기 때문에 남녀 차이에 대한 본 연구의 결과를 일반화하는 데에는 신중을 기해야 할 것으로 생각된다.

II. 연구방법 및 절차

A. 연구 대상

1. 1차 연구 대상의 선정

본 연구는 서울특별시에 소재한 남녀공학인 한 중학교 2학년 학생 480명(남학생 327명, 여학생 153명) 중 다음 기준에 맞는 학생 35명을 1차로 선정하였다.

가. IQ 125이상

나. 1, 2학년간 학교에서 자체 실시한 수학 시험과 외부 모의고사 성적이 '우'이상인 학생

다. 수학 능력이 우수하다고 인정되어 추천

을 받은 학생

2. 2차 연구 대상의 선정

1차 연구 대상으로 선정된 35명(남학생 24명, 여학생 11명)을 대상으로 가능한 한 수학 전반에 능력이 우수한 학생, 그리고 학교에서 배우는 수학만을 잘 하는 것이 아니라 통찰력과 같은 번득이는 아이디어가 있는 학생을 선발하고자 다음과 같은 테스트를 실시하였다.

가. 캘리포니아 평가 프로그램 (California Assessment Program)

이 테스트는 학생들이 수학 전반에 골고루 능력을 갖고 있는가를 알아보기 위한 실험이다. 이는 미국의 수학 평가 자문 위원회(Mathematics Assessment Advisory Committee)의 지도 하에 캘리포니아 수학 교육자들에 의해 1985년 씌여진 것으로, 3, 6, 8, 12 학년의 학생을 대상으로 문제 형식화 및 분석, 문제해결과 해석, 공간 추론 능력, 자료의 조직, 논리적 추론, 인지 패턴, 수감각과 평가능력을 측정한다.

이 테스트는 1973년 처음 개발되어 시도된 이래 여러 해 동안 보완, 수정을 하면서 수학의 다양한 영역을 측정하도록 고안되었기 때문에, 본 연구에서 선정하고자 하는 수학적 우수아를 선별하는 한 방법으로 이를 실시하였다. 그러나 이 테스트가 국민학교 3학년부터 고등학생까지를 대상으로 실시되었기 때문에 문제의 구성이 각 학년을 고려하여 다양하게 되어 있어, 본 연구의 피실험자들에게 지나치게 쉬워서 부적절하다고 생각되는 국민학교 3학년 수준의 문제는 제외하였다.

나. 통찰력 테스트

학생들이 문제해결자로서 문제를 풀다 보면 수학적인 지식을 많이 알고 있는 것보다 통찰력 즉 직관에 의해 쉽게 해결하는 것을 볼 수 있다. 따라서 문제해결에 우수한 학생은 통찰력도 갖추고 있어야 함을 알 수 있다. 그래서 본 연구는 피실험자를 선별하기 위해 통찰력 테스트를 실시하였다. 이 문제는 강충렬(1990)에서 발췌한 것으로 중학교 2학년 학생에게 적당하다고 생각되는 문제만을 선택하였다.

다. Renzulli-Hartman의 영재 학생들의 행동 특성 평가를 위한 척도

지능 검사 이외에 각종 심리 측정상의 검사를 포함한 추가적인 기준이 우수한 학생들을 심사하고 선별하는데 필요하다. 그러한 필요에 의해 판별 과정상의 편의를 위하여 렌쥬리와 하트만은 이와 같은 척도를 고안해냈다. 그 척도는 4개의 분야(학습, 동기, 창의력, 지도력)로 나누어져 측정되고 각 분야에 있어서 많은 서술문이 있는데 그것을 1에서 4까지의 척도로 측정해야 한다.

본 연구에서 피실험자를 좀 더 신중하고 객관적인 척도로써 우수아를 선발하고자 이와 같은 척도를 담임 교사와 학부모에게 설문지를 통하여 조사하였고, 그 결과를 각 항목마다 교사와 학부모의 두 점수의 평균을 구하여 4개 분야별로 합산을 하였다.

총 35명의 테스트 가와 나의 점수(Y_1, Y_2)와 테스트 다의 4개 분야의 점수(X_1, X_2, X_3, X_4)를 가지고 SPSS 통계 프로그램을 이용하여 요인분석(factor analysis)을 하였다. Rotated Factor Matrix의 결과는 <표 1>과 같다.

<표 1> Rotated Factor Matrix

변 수	요 인 1 (FSI)	요 인 2 (FSI)
X_3	0.90464	0.13199
X_1	0.83911	-0.13362
X_2	0.82083	0.03096
X_4	0.45054	-0.34987
Y_2	0.047785	0.85620
Y_1	-0.04702	0.79461

<표 2> 2차 연구 대상으로 선정된 학생의 테스트 결과

학생	성별	학습 특성 (32) *X_1	동기적 특성 (36)* X_2	창의적 특성 (40)* X_3	지도자적 특성 (40)* X_4	CAP 테스트 (18)* Y_1	통찰력 테스트 (18)* Y_2	요 인 1 FS1	요 인 2 FS2
A	남	26	24	25.5	23.5	16	12	0.52946	1.06273
B	남	25	25	26.5	26	17	11	0.72638	0.88350
C	남	24	24.5	26.5	25.5	17	14	0.65363	1.87893
D	남	23.5	21.5	27.5	32	17	12	0.68647	0.87091
E	남	24.5	30	30	34.5	16	12	1.90861	0.67368
F	남	24.5	27	30.5	27	15	11	1.30704	0.53424
G	남	23.5	26.5	25.5	25	15	10	0.55318	0.18346
H	여	28	30.5	32.5	31.5	13	11	2.33073	-0.11656
I	여	19.5	20	23	26	17	13	-0.49797	1.43417
J	여	18	23	24.5	23	17	11	-0.39872	1.07226

<표 1>의 결과에 의해 요인 1은 변수 X_1, X_2, X_3에 의하여 주로 결정되는 요인이고, 요인 2는 주로 변수 Y_1, Y_2에 의하여 결정되는 요인으로 볼 수 있다. 여기서 변수 X_4는 요인 1, 2에 공통적으로 작용하면서도 어느것에도 결정적으로 영향을 미치지 못하는 변수이므로 지도자적 특성은 우수아를 판별하는데 있어서는 그 성격이 모호한 변인으로 생각된다.

1차 연구 대상 35명의 테스트 결과를 요인분석한 결과 위의 두가지 요인(factor)들만으로도 6개의 변수들이 나타내는 총 변인의 65.4%를 포함하고 있는 것으로 나타났다. 따라서 두가지 요인은 자료 전체가 갖는 변인 중 가장 중요한 두 개의 요인으로 생각되며 또한 두가지 요인의 성격에 대한 해석에 있어서도 문제가 없는 것으로 생각된다.

여기서 요인1의 값이 높다는 것은 변수 X_1, X_2, X_3의 값이 높다는 것으로써 이 값이 높은 학생은 우수아로 간주할 수 있으며, 요인 2의 값이 높다는 것은 변수 Y_1, Y_2의 값이 높다는 것으로써 이 값이 높은 학생 또한 우수아로 볼 수 있다.

따라서 요인 1, 2의 값이 모두 높은 학생은 본 연구에서 선발하고자 하는 우수아적 특성을 더 많이 나타낸다고 볼 수 있으며, 특히 요인 1, 2의 값 중 어느 한쪽만 높은 학생보다 우수아로서의 판단에 신뢰성을 더해 줄 수 있을 것으로 생각된다. 이러한 이유로 두가지 요인 점수가 모두 양의 값을 갖는 학생을 골랐더니 남학생만 7명이 선별되었다.

그러나 본 연구에 여학생도 참여시키기 위하여 1차 대상으로 선정된 여학생 중 요인 분석 결과가 좋은 학생 다시 말해 어느 한 요인의 값만이라도 매우 우수한 결과가 나온 학생으로 3명을 선발하여 모두 10명(남 7명, 여 3명)을 2차 연구 대상으로 삼았다. 이들 10명의 테스트 결과와 요인 분석 결과는 <표 2>와 같다.

B. 검사 문제의 선정 및 구성

본 연구에 사용된 문제들은 모두 5 문제였으며, 이 문제들은 연구 대상 학생들이 중학교 2학년 학생임을 감안하여 2학년 학생들이 해결할 수 있는 수준의 지식을 필요로 하는 문제들만을 선정하였다

또한 이 연구의 목적이 우수아 학생들의 메타인지를 알아보기 위한 것이므로, 학생들의 메타인지를 알아 볼 수 있도록 문제해결 과정시 당혹감을 느끼면서 문제해결 방법을 찾는 탐구 단계가 비교적 긴 것으로 하였고, 5 문제 모두 문제해결 전략이 다양하고 주변에서 쉽게 접해보지 못한 문제로 선정하였다. 연구에 사용된 문제는 부록에 수록하였다.

C. 검사 실시

문제해결 과정에서 특히 메타인지를 알아보기 위한 연구는 문제해결자의 내적인 심리 과정에서 일어나고 있는 사고과정을 방해하지 않으면서도 어떻게 하면 빠짐없이 정확하게 밖으로 끌어내느냐 하는 것이 가장 중요한 일이다.

본 연구에 필요한 데이터를 얻기 위해서 연구 대상으로 선정된 10명의 학생들에 검사 문항 5개를 통해 한 명씩 문제해결 테스트를 실시하였다. 학생 개개인에게는 문제를 푸는 동안 소리 내어 문제를 푸는 발성사고법(thinking aloud)을 사용하도록 하였으며, 이들의 문제해결 과정을 그들이 직접 써놓은 답안지와 실험자가 옆에서 관찰하고 인터뷰한 기록 용지, 그리고 연구 대상의 발성 사고를 녹음한 것을 본 연구의 데이터로 사용하였다.

검사는 1994년 2월에 실시하였으며, 문제지 작성은 16절지 각 장에 1 문제씩 기재하여 문제 하단에 여백을 두어 풀이 과정을 적도록 하였고, 기재하는 형식은 자유롭게 생각나는 것을 쓰도록 하였다. 검사 시간은 최대한 두 시간으로 정했으나 개인차를 인정하여 그 전이라도 끝낼 수 있게 하였다.

본 연구는 학생들의 인지 과정보다는 메타인지의 형성 여부 또는 메타인지를 알아내는 것을 주목적으로 하기 때문에, 학생들이 문제를 너무 쉽게 포기하거나 생각하는 것을 멈추지 않도록 하기 위해 유도 질문이나 힌트를 주었다. 그러나 가급적 힌트를 줄이려고 했으며 될 수 있는 대로 포괄적이고 일반적인 질문 형식의 힌트를 사용함으로써, 실험자의 영향을 최대한 배제시켜 피실험자의 사고 과정 추출을 위한 최소한의 상호 작용만을 유지하도록 노력하였다.

D. 실험 결과 분석 방법

본 연구에서 사용된 실험 결과 분석 방법은 다음과 같다.

1. 프로토콜(protocol)의 작성 및 코딩화

연구자는 피실험자가 소리 내어 문제 풀이한 녹음 내용과 검사지에 기재된 풀이 과정, 그리고 연구자가 피실험자를 인터뷰하고 관찰한 기록 용지를 토대로 프로토콜을 작성하였다. 작성된 프로토콜과 본 연구자가 앞의 이론적 배경에서 고찰해본 Flavell, Schoenfeld, Kroll의 메타인지의 개념을 근거로 만든 코딩 조직(coding system)을 이용하여, 피실험자가 문제해결 과정 중 탐구 단계에서 나타나는 메타인지를 코딩화하였다. 이 때의 탐구 단계는 앞에서 정의한대로 문제 이해에서부터 올바른 문제해결 방법을 찾아 실행하기 이전까지의 과정으로 보았다.

2. 코딩 조직과 그 예

가. 개인 변인(personal variables)

P_1 : 자신의 수학적능력에 대한 믿음이 있는가?

예) 자신이 계산에는 능숙하다고 믿음.

P_2 : 자신의 약점과 장점을 알고 있는가?

예) 자신이 계산에서 실수하는 경향, 부주의함을 알고 있음. 자신이 공간적이고 시각적인정보를 이해하는 과정에서 약하다는 것을 인식하고 있는 것.

P_3 : 문제를 푸는 동안 동기 또는 불안과 같은 정의적인 특징을 나타내는가?

예) 문제가 뜻대로 잘 풀리지 않자 안절부절하면서 불안해함.

P_4 : 수학 학습에 대한 학생 자신의 평가 능력이 있는가?

예) 그동안 자신은 '확률' 부분은 아주 열심히 공부했다.

P_5 : 자신의 사고를 반성하고 그 반성이 얼마나 정확한지 아는가? 즉, 자신의 사고를 모니터하는가?

P_6 : 자신을 다른 사람과 비교하는가?

예) 자신이 남보다 더 사려깊다. 자신이 남보다 더 예측하기를 좋아한다.

P_7 : 수학의 본질에 대하여 갖고 있는 확신이나 신념이 있는가?

예) 어떠한 수학 문제든 올바른 풀이 방법은 유일하다.

P_8 : 직관적인 발견 능력이 있는가?

나. 과제 변인 (task variable)

T_1 : 어떤 문제는 다른 것보다 더 길다거나 더 복잡하다거나 또는 더 어렵다는등의 과제의 범위, 요구, 필요 조건에 대한 지식이나 믿음을 가지고 있는가?

예) 어떤 과제는 좀 더 엄밀성과 정확성을 요구한다는 것을 안다. 문장제는 계산 문제보다 풀기 어렵다. 어떤 문제는 큰 수를 다루는 계산을 포함하기 때문에 어렵다고 느낀다.

다. 전략 변인 (strategy variable)

S_1 : 문제 내용이 이해하기 쉬운지 어려운지 알아보기 위해서 문제를 재빨리 훑어보는가?

S_2 : 문제를 풀기 전에 그에 따른 시간을 결정하는가?

S_3 : 해답을 구하기 위해 성급히 시도하기 전에 문제가 무엇에 관한 것인지 자기 자신이 바르게 이해하고 있는지 확인하는가?

S_4 : 어떤 전략이 효과적일지 비효과적일지 조건에 대해 어떤 것을 알고 있는가? 즉, 다시 말하면 계획의 결과를 평가하는가?

예) 이 문제는 '앞으로 풀기'보다는 '거꾸로 풀기'가 생산적인 전략이 될 수도 있다는 것을 알고 있는 것

S_5 : 알고리즘, 발견술(heuristics), 조절전략을 알고 있는가? 즉, 인지에 대한 지식을 갖고 있는가?

예) 특정 수준에서 정보를 적용하기. 문제를 다시 풀기. 새로운 정보를 이전의 정보와 관련시키기. 문제해결을 위해 노력하기. 특정 연산을 사용하여 문제를 풀려고 노력하기. 필요시 전략을 재고안하거나 비건설적인 전략과 계획을 포기하기. 문제해결시 곤란한 상황에 빠졌을 때, 전체적으로 다른 방법으로 그 문제를 바라보는 것이 도움이 된다는 것을 알고 있는 것.

라. 메타인지적 경험 (metacognitive experience)

E_1 : 정의적 경험 중 의식적인 것이 있는가?

예) · 갑자기 어떤 것을 이해하지 못하고 있다는 걱정이 된다. 그리고 그 이해에 대한 필요와 욕구를 느낀다.

· 한 문제가 불가능하다고 잘못 생각해서 포기했던 경험이 있기 때문에 이제 이 문제가 불가능하다고 말하는데 보다 더 주의를 기울인다.

· 지금 문제가 불가능하다고 느껴질 때 포기하지 않고 꾸준히 계속 노력한다면 대부분의 문제가 풀릴 것이라고 믿고 있다.

Ⅲ. 자료의 분석 및 결과

A. 우수아 개인별 메타인지 특징 비교

우수아 10명의 문제해결 과정 중 탐구 단계에서 나타나는 메타인지를 실험 결과를 통해 얻은 프로토콜을 바탕으로 코딩화하여 작성한 것이 <표-3>과 <표-4>이다.

이것들을 토대로 개인별 메타인지의 특징을 비교해 보면 다음과같다.

1. 학생 A

이 대상은 다양한 사고가 가능하며 문제를 푸는 도중 자신의 사고를 모니터하기 때문에 문제를 객관적이고 전체적인 입장에서 바라보기도 하는 등 문제해결력이 뛰어나다. 특히 A 학생의 특징은 자신의 약점을 알고 있으며 타인과 자신을 비교하는 등 경쟁 의식을 갖고 있고 직관력이 우수하다.

2. 학생 B

논리적이고 치밀하며 포기할 줄 모르고 문제해결을 위해 꾸준히 노력한다. 이 학생의 경우 1번 문제를 나중에서야 풀 수 있었는데 그 이유는 직면한 처음 문제인데다가 옆에 관찰자가 있는 탓으로 심리적으로 긴장, 불안 상태였기 때문이다. 이 학생에게는 직관은 나타나지 않으며 메타인지도 P_5, S_2, S_3, S_5 이외에는 보이지 않는다.

3. 학생 C

논리적이고 치밀하며 꾸준한 면은 학생 B와 유사하다. 이 학생은 1번 문제의 경우 유사한 문제를 푼 경험이 있다고 말하였는데, 이 문제가 그리 흔한 문제가 아니라서 오히려 그 경험이 이 학생에게는 방해가 되었다. 이 학생은 문제를 전체적으로 볼 줄도 알며 자신의 사고에 대한 반성 또한 문제를 푸는 동안 계속하고 있다. 이 학생의 경우 1번 문제만을 제외하고 전부 풀었는데 집에 돌아가는 길에 1번 문제의 답을 전화를 통해 알려 주는 집요함을 보여 주었다.

4. 학생 D

직관력과 상상력이 매우 뛰어나며 독특한 문제해결자이다. 10명의 학생 중 가장 짧은 시간인 57분만에 문제 5개를 모두 해결하였다. 자신의 수학적 능력에 대한 믿음을 갖고 있으며, 특히 확률에 관한 문제(문제 3)에는 자신감을 보였다. 문제해결 과정도 거의 쓰거나 그리지 않고 머리 속으로 하는 특징을 나타내었다.

5. 학생 E

문제를 끝까지 풀어보려는 의지는 강한 반면 논리적이고 전략적인 면이 약하다. 특히 주목할 만한 것은 문제를 논리적인 근거에 의해 해를 구하지 않고 추측하여 맞추려고 하는 점이다. 문제를 읽고 풀이 과정을 탐색하는 과정이 모니터되지 않았고 조종 전략 또한 거의 없는 것으로 나타났다. 이 학생에게는 메타인지가 많이 보이지 않고 있고 문제해결 또한 많이 하지 못하였다.

6. 학생 F

10명 중 가장 적게 메타인지를 보이고 있다. 문제해결력 또한 저조하다. 처음 문제를 풀지 못한 불안감이 다른 문제해결에도 영향을 주어, 문제는 풀려고 하지만 별로 진전을 보지 못하였다. 자신의 사고를 반성하거나 모니터하지도 않고 전략적인 측면에서도 별다른 두각을 나타내지 못하고 있다.

7. 학생 G

자신의 수학적 능력에 대한 자신감이 없고 문제를 끝까지 풀기보다는 쉽게 포기한다. 따라

<표 3> 우수아 개인별 메타인지 (A~G : 남학생, H~J : 여학생)

메타인지 분류	코딩 조직	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
개인 변인	P_1			○	○						
	P_2	○						○	○		○
	P_3		○			○	○		○	○	
	P_4								○		
	P_5	○	○	○	○				○		○
	P_6	○							○		
	P_7			○		○			○		
	P_8	○			○						○
과제 변인	T_1	○		○	○	○			○	○	
전략 변인	S_1	○		○	○				○	○	
	S_2		○	○			○	○	○		
	S_3	○	○	○	○	○		○	○	○	○
	S_4								○	○	
	S_5	○	○	○	○		○	○	○	○	○
메타인지 적 경험	E_1			○		○	○		○	○	○

<표 4> 우수아 개인별 문제해결력

연구대상 / 검사문제	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	○	○	×	○	×	×	×	×	×	○
2	○	○	○	○	×	×	×	×	○	○
3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
4	○	○	○	○	×	×	×	○	○	○
5	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

서 이 학생은 자신의 사고를 모니터하지도 않을 뿐더러 문제를 다각적으로 살펴보는 직관 능력도 약한 것으로 나타났다. 그리고 문제해결력 또한 낮았다.

8. 학생 H

본 연구 대상 10명 중 가장 많은 메타인지적 특성을 보인 학생으로, 문제 푸는 과정 내내 자신의 사고와 풀이를 모니터하고 반성하고 있다. 그런 반면 문제해결력은 그리 뛰어나지 못하다. 그 이유로는 본인이 이 문제를 반드시 풀 수 있다는 확신과 문제해결에 대한 집착력이 약하기 때문인 것으로 생각된다.

9. 학생 I

전략적인 측면에서는 강하나 개인적 측면에서는 메타인지가 별로 나타나지 않았다. 이 학생의 특징으로는 문제 3을 푸는데 있어 앞의 학생들과는 달리 구체물, 예를 들어 지우개를 이용해 문제를 이해하고 탐색한다는 것이다.

10. 학생 J

직관력이 우수하며 꾸준히 계속 노력하면 문제가 풀릴 것이라는 자신감을 갖고 있으며, 자신이 공간 추론 능력이 약하다는 것 또한 알고 있다. 이 학생 또한 학생 I처럼 문제 3을 해결하는데 손을 이용한 구체물을 통해 문제를 해결하고 있다. 이 학생의 문제점으로는 문제에 대한 전체적인 조망 능력이 부족해 문제해결시 쉬운 길보다는 어려운 길을 택한다는 것이다. 문제해결력은 여학생 중 가장 우수하였다.

B. 우수아에게 나타나는 메타인지의 공통점

<표 3>을 전체적으로 볼 때, 우수아들의 메타인지가 메타인지의 분류상 과제 변인, 전략 변인, 메타인지적 경험에 대해서는 거의 대부분에서 공통적으로 나타나고 있는데 비해, 개인 변인에 해당하는 메타인지에 대해서는 P_5를 제외하고는 잘 나타나고 있지 않다.

이것은 우수아들에게 있어 문제와 직접적으로 관련되는 변인에 대해서는 그 동안의 학습에 의해 많이 훈련되었으나, 정작 문제해결의 주체인 자기 자신에 대한 능력이나 사고 과정, 확신, 믿음, 직관 등에 대해서는 별다른 관심을 보이지 않고 그저 문제 그 자체만 해결하는데 초점을 두어왔음을 보여준다.

그 원인으로는 현재 일선 학교에서 이루어지는 수학교육이 심리적이고 정의적인 측면보다는 인지적인 측면을 강조하고 있고, 문제해결 과정에서도 한 문제라도 더 맞추기 위하여 그 문제 자체에 대한 관심만을 더해왔을 뿐 문제해결의 주체인 학생에 대한 폭넓은 이해가 적었기 때문인 것으로 생각된다.

메타인지의 코딩 조직을 세분하여 살펴보면, 우수아에게 빈번히 나타나는 메타인지의 코드로는 P_5, T_1, S_3, S_5, E_1을 들 수 있고, 본 연구 결과 잘 나타나지 않는 것으로는 P_1, P_4, P_6, P_7, P_8, S_4를 들 수 있다.

이것을 구체적으로 설명하면, 우수아의 경우 문제해결 과정 중 자신의 사고를 모니터하고 있으며(P_5), 과제에 대한 평가(T_1), 자신의 경험을 통한 깨달음(E_1), 문제의 올바른 이해를 위한 확인(S_3) 및 알고리즘, 발견술, 조절 전략(S_5)을 잘 구사하고 있음을 알 수 있다. 이 중 특히 P_5의 경우 문제해결력이 뛰어난 학생들을 중심으로 잘 나타나고 있다. 이를 통해 문제해결력과 자신의 사고를 반성하고 모니터하는 능력이 밀접한 관련이 있음을 보여주고 있다.

그리고 앞에서 말했듯이, 우수아 전체에게서 잘 나타나지 않는 메타인지로 개인 변인에 해당하는 P_1, P_4, P_6, P_7, P_8을 들 수 있으며, 전략 변인 중에서도 문제해결을 위해 어떤 전략이 더 효과적일지 자신의 계획을 평가하는 능력(S_4)이 부족함을 알 수 있다.

여기서 개인 변인 중 자신의 수학적 능력에 대한 믿음(P_1), 자신의 수학 학습에 대한 자신의 평가(P_4), 수학 본질에 대한 확신이나 신념(P_7), 직관 능력(P_8) 등은 단기간에 이루어지는 것이라기 보다는 장기적인 기간에 걸쳐 형성되는 것으로 수학에 대한 자신감과 밀접한 관련이 있는 변인들이다. 그리고 전략의 효율성을 위해 자신의 문제해결 계획을 평가하는 능력(S_4)은 문제해결을 위해 앞만 보고 내달리는 것이 아니라 잠시 쉬어가며 자신의 사고 및 행동을 돌이키며 반성하고 수정하는 능력을 뜻한다.

본 연구에서 개인 변인에 해당하는 코드 P_1, P_4, P_6, P_7, P_8이 우수아 전체적으로 잘 나타나지 않은 것은 학생이 문제를 푸는 동안 어떤 특별한 설문과 같은 조사 방법없이 스스로 이러한 장기적으로 형성되는 개인적인 메타인지를 표현할 필요성을 느끼지 못한 이유에 의한 것으로, 이들이 이러한 메타인지를 나타내지 않았다고 해서 이들의 의식속에 이러한 메타인지가 없다고 볼 수는 없을 것이다.

따라서 위의 다섯가지 코드는 일반적인 수학에 대한 메타인지를 알아보는 코딩체계에는 적합하나 문제해결 과정에서 나타나는 메타인지를 알아보기 위한 코딩체계에는 부적합한 것으로 볼 수 있으며, 이것은 차기 연구에 참고가 될 것이다.

지금까지의 논의를 요약하자면, 우수아들에게 부족한 메타인지로는 개인 변인에 해당하는 것으로 문제해결의 주체자로서 자기 자신을 좀 더 의식하도록 해야 하고 장기적인 자신감과 안목을 기를 필요가 있음을 알 수 있다.

C. 남녀 우수아의 차이점

본 연구 결과 남녀 우수아 사이에 보이는 메타인지의 차이는 전체적으로 두드러지게 나타나지 않는다. 다만 메타인지 코드별로는 남학생에게 더 많이 나타나는 메타인지와 여학생에게 더 많이 나타나는 메타인지로 구분지어 볼 수 있다.

먼저, 여학생보다 남학생에게 더 많이 나타나는 메타인지로는 첫째, 자기 자신의 수학적 능력에 대한 자신감(P_1)을 가지고 있으며, 둘째, 전략 변인으로, 문제를 풀기 전에 문제에 따른 시간을 결정하는 관리 능력(S_2)면에서 여학생과 차이가 있는지 더 연구가 필요하다. 이것은 전반적으로 수학을 여학생보다 남학생이 더 잘한다는 기존의 통념들이 학생들에게도 알게 모르게 주입되어 수학적 능력에 대한 자신감에 대해 남학생이 더 많이 보인 것으로 생각된다.

반면, 남학생보다 여학생에게 더 많이 나타나는 메타인지는 첫째, 전략 변인 중 어떤 전략이 조건에 더 효과적인지 알아 보는 능력 즉 계획의 결과를 평가하는 능력(S_4)을 들 수 있으며, 둘째, 메타인지적 경험(E_1)이 더 풍부하다는 것이다. 이것은 여학생이 남학생보다 정의적인 경험을 더욱 의식한다는 것을 보여준다.

본 연구의 대상이 10명으로 그 수가 적고 더우기 남학생 7명에 비해 여학생이 3명 뿐이므로, 본 연구의 결과를 일반화하여 말할 수는 없지만 메타인지 연구에 참고로 할 수는 있을 것이다.

D. 문제해결 과정에서 메타인지의 역할

10명의 연구 대상이 본 연구의 검사 문제를 해결하는 과정에서 메타인지가 어떠한 역할을 하였는가를 알아 보기 위해, 상대적으로 문제해결력이 높은 대상 7명(A, B, C, D, H, I, J)과 낮은 대상 3명(E, F, G)의 메타인지를 비교, 분석하여 그 차이를 가져오는 원인을 살펴 보기로 한다.

예컨데, 학생들이 문제해결에 실패하는 원인을 Shaugnessy(1985)는 다음과 같이 정리하고 있다: (1) 주어진 문제해결에 적합한 지식 체계와 지식의 조직 능력 부족, (2) 알고리즘적 오류 - 계산 과정의 구조적 오류, (3) 문제해결 전략의 빈약, (4) 실행적 조절 능력의 부족, (5)

확신 체계 - 문제해결자가 수학의 본질에 대해 갖고 있는 확신이나 신념, (6) 傳承的인 Paradigm - 기존의 "관습적인 機智", (7) 부적합한 문제 해석력과 잘못 선택된 Schema, (8) 직관적 발견술에 의지함으로써 야기되는 개념상의 오류. 여기서 (4)와 (5)는 메타인지적 요인이라 볼 수 있다.

Lester(1982)는 성공적인 수학 문제해결 활동을 위하여 다섯 가지의 조건을 제시하고 있다: (1) 수학적 지식과 경험, (2) 다양하고 생산적인 "도구적" 기능을 사용할 수 있는 기능(즉, 주어진 문제해결과 관련되지 않은 정보와 구분하여 관련된 정보를 찾아내거나 도식화 할 줄 아는 능력), (3) 수학 문제해결에 필요하다고 생각되는 다양한 발견술을 사용할 수 있는 능력, (4) 문제해결 과정의 각 Episode 도중에, 그리고 Episode의 전후에 전개되고 있는 자기 자신의 인지에 대하여 알고 있는 정도, (5) 문제해결 과정에 대한 실행적 조절(즉, 모니터하거나 정리하는 인지 활동)을 지속할 수 있는 능력. 여기서 (4), (5)는 메타인지 능력이다 (백석윤 1992, 재인용 p. 39).

이를 참고로 앞의 <표-3>을 살펴 보면, 두드러지게 차이가 나타나는 메타인지 코드로 P_5와 S_1, 그 다음으로는 P_8과 T_1을 들 수 있다. 이를 구체적으로 서술하자면 학생들의 문제해결력의 차이의 원인은 첫째, 자신의 사고를 모니터하는 능력의 차이를 들 수 있고, 둘째, 문제를 처음 접할 때, 문제해결을 위해 성급히 서두르지 않고 먼저 문제를 관조하는 입장에서 문제 내용이 이해하기 쉬운지 어려운지를 알아보기 위해서 문제를 재빨리 훑어보는 여유가 있는가 하는 점을 들 수 있고, 세째, 직관력의 여부를 들 수 있는데, 문제해결력이 높은 학생 중 직관력이 나타나지 않은 학생은 그 대신 치밀한 논리력과 인내심을 보이는 반면, 문제해결력이 낮은 학생은 직관력 뿐만 아니라 치밀한 논리력과 인내심 또한 부족한 것으로 드러났으며, 네째, 어떤 문제가 다른 문제보다 더 길다거나 복잡하다거나 어렵다는 등의 과제에 대한 고찰 여부를 들 수 있다.

이 결과는 앞에서 살펴본 Lester의 수학 문제해결의 성공적인 수행을 위해 문제해결 과정에 대한 자기 자신의 인지에 대해 아는 정도와 실행적 조절 능력이 필요하다는 주장과 일치하며, Shaugnessy와는 실행적 조절 능력의 중요성에 대한 주장과는 일치하지만 확신체계에 대해서는 전적으로 동의할 만큼 충분한 데이터가 확보되어 있지 않은 상태이다. 또, Shaugnessy는 직관적인 발견술이 문제 해결에 실패하는 원인으로 들고 있는데 이것은 본 연구에서 보는 직관의 개념과는 다른 것으로 생각된다. 이것은 직관에 대한 모호한 개념 상태로 인하여 얼핏 보기에는 본 연구의 결과와 반대의 견해를 나타낸 것으로 볼 수도 있을 것이다. 그러나 Shaugnessy가 말하는 직관적 발견술에 의지함으로써 야기되는 개념상의 오류에 해당하는 예로 본 연구의 연구 대상인 학생 E를 들 수 있고, 본 연구에서 말하는 직관력을 가장 잘 나타내는 연구 대상으로는 학생 D를 들 수 있다. 이러한 혼동을 막기 위해 직관의 개념에 대한 분석적인 연구가 필요하다고 생각된다.

이상의 논의를 한마디로 요약하자면, 메타인지의 정의라 할 수 있는 자신의 사고의 반성, 즉 모니터링과 문제로부터 한 발 떨어져 볼 수 있는 사고의 유연성 그리고 한 순간 번득이는 직관력이 본 연구에서 문제해결에 중요한 역할을 하는 메타인지라고 할 수 있다.

Ⅳ. 결　론

본 연구는 학생들의 문제해결 과정에서 나타나는 메타인지를 분석하기 위해 코딩 조직을 개발하는 것과, 이러한 코딩 조직을 이용하여 수학적으로 문제해결력이 우수한 학생들의 메타인지의 특징을 비교, 분석하여 문제해결력 신장을 위한 학습 지도 자료를 얻는 데 목적이 있다.

연구 방법으로 학생들이 수학적 문제해결 과정 중 탐구 단계에서 보여주는 메타인지에 따라 코드화하고 그 결과를 분석하였다. 이때 사용한 코딩 조직은 여러 학자들의 메타인지에 대한 정의를 기초로 본 연구 목적에 맞게 연구자가 분류하여 제작한 것으로, 연구자마다 보는 관점에 따라 코딩 조직이 다소 변할 수 있다.

본 연구의 결과는 다음과 같다.

첫째, 문제해결 과정 중 탐구 단계에서 우수아 대부분에게 공통적으로 나타나는 메타인지는, 자신의 인지 과정을 적극적으로 모니터하고 모니터한 인지 과정을 조정하며, 문제에 대해 복잡하다거나 어렵다는 식의 과제에 대한 범위, 요구, 성질 등에 대한 인지를 갖고 있으며, 오로지 문제에 대한 해답만을 구하려고 성급히 접근하기 전에 자신이 이해한 것이 옳은지 확인하기도 하며, 문제해결 전략을 조절할 줄 알며, 문제를 풀면서 가질 수 있는 정의적인 경험을 의식화하여 문제해결에 영향을 주고 있다.

둘째, 우수아 대부분에게 잘 나타나지 않는 메타인지로는 개인 변인에 해당하는 메타인지이다. 예를 들어, 자신의 수학적 능력에 대한 믿음, 수학 학습에 대한 자신의 평가, 자신과 다른 사람과의 비교, 확신이나 신념, 직관 등을 들 수 있다.

세째, 우수아를 남녀로 나누어 놓고 비교해 보았을 때 문제해결 과정 중 탐구 단계에서 메타인지의 차이는 두드러지게 나타나지 않았다. 단지 한쪽 성(姓)에서만 나타나든가 더 많이 나타나는 것을 꼽아보자면, 남학생의 경우 자신의 수학적 능력에 대한 믿음과 문제에 대한 시간 배당을 하는 조직 전략을 보였으며, 여학생의 경우 메타인지적 경험이 많았으며 자신의 계획을 평가하는 능력을 보였다.

네째, 연구 대상으로 선정된 10명의 우수아 중 보다 문제해결력이 높은 우수아만을 살펴보면, 이들은 상대적으로 문제해결력이 낮은 우수아보다 문제해결 과정 중 탐구 단계에서 실행적 조절 즉 모니터하거나 정리하는 인지 활동을 활발히 하고 있음을 알 수 있다. 이것은 문제해결 과정에서 자신의 사고를 모니터하고 반성하는 의식적인 인지 활동이 가장 중요한 요소임을 보여주고 있다.

이상의 연구 방법 및 결과를 통해, 앞으로의 수학 교육 연구와 문제해결력 신장을 위한 학습지도에서 다음 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 수학적으로 우수한 학생들을 판정하는 구체적인 기준과 방법이 마련되어야 하겠다. 본 연구를 통해 연구 대상을 우수아로 제한하여 이들을 일반 학생과 구분하는데 있어 지금까지의 수학 교육 연구에서 어떤 확실한 기준이나 방법이 마련되어 있지 않아 본인이 나름대로 연구 방법을 정하여 실시하였다.

둘째, 지금까지 메타인지를 주제로 한 기존 연구에는 연구 방법의 하나로써 코딩 조직을 체계화한 예를 찾기 어려웠다. 그래서 본고에서는 연구자의 주관적인 관점에 따라 메타인지에 대한 코딩 조직을 제작하였다. 앞으로의 연구를 통해, 보다 체계적이고 합리적으로 코딩 조직을 다듬어야 할 것이다.

세째, 본 연구 결과를 분석하는 과정에서 학생들의 문제해결력을 높이는데 직관이 중요한 역할을 하는 것을 알 수 있었으나 지금까지의 수학 교육 연구에서 직관에 대한 개념이 제대로 정립되어 있지 않아 혼동을 일으키는 원인이 되었다. 이러한 측면에서 볼 때, 직관에 대한 용어를 학문적으로 정립하고 학생들로 하여금 교수학습적 전략의 하나로써 직관을 개발시킬 수 있도록 지도해야 할 것이다.

네째, 학생들의 문제해결력 향상을 위해서 교사는 학생 자신으로 하여금 자신이 가지고 있는 인지적 재원을 효과적으로 관리, 수행할 수 있게 해주는 정신적 작용, 다시 말해 자신이 문제해결의 주체자로서 자신에 대해 알고 있는 것, 자신에 대해 믿고 있는 것, 그리고 자신의 사고 과정을 어떻게 모니터하고 조절, 통제하는가 등의 메타인지를 일깨워 주어야 할 것이다.

참 고 문 헌

김수미 (1992). 수학교육에서의 메타인지 개념에 대한 고찰. 대한수학교육학회 논문집, 제 2권, 제 2호, 95-104.

김정휘, 주영숙 (1987). 영재 학생을 위한 교육. 서울 : 교육과학사.

류희찬(1991) 문제해결에서의 Metacognition의 역할과 LOGO 컴퓨터 언어. 수학교육논총, 9집. 대한수학회.

백석윤 (1992). 수학적 문제해결 과정의 "순수 인지외적" 분석. 대한수학교육학회 논문집, 제 2 권, 제 2 호, 35-52.

______ (1989). Metacognitive Aspects of problem solving in mathematics ; Individual differences in the use of metacognitive skills and the effect on the mathematical problem-solving process. Unpublished Doctoral Dissertation, Temple University.

이영미 (1991). 수학적인 문제해결 과정에서 학생들이 보인 인지 과정의 분석. 이화 여자 대학교 석사학위 논문.

片桐重南 (1992a). 수학적인 생각의 구체화, 이용률외 3명(역). 서울 : 경문사.

______ (1992b). 문제해결 과정과 발문 분석, 이용률외 3명(공역). 서울 : 경문사.

Flavell, J. H. (1987) Speculations about the Nature and Development of Metacognition. In F. E. Weinert and R. H. Kluwe (Eds), Metacognition, motivation and under-standing. 21-29.

California Assessment Program (Sacramenta, Calif. : California State Dept of Education, 1986).

Jackson, B. W. and Dmitri Thoro (1990). Applied combinatorics with problem solving. Addison-Wesley Publishing Company.

Kang, C. Y. (1990). The Nature and development of a cognitive screening battery for academically gifted second and third grade students. Unpublished Doctoral Dissertation. Univ. of Wisconsin-Madison.

Kroll, D. L. (1988). Cooperative mathematical problem solving and mtacognition: A case study of three pairs of women. Unpublished Doctoral Dissertation. Indiana University.

Lester, F. K., Jr. & Garofalo, J. (1989). The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes. Indiana University.

______ (1987). The influence of affects, beliefs, and metacognition on problem solving behavior: Some tentative speculation. American Educational Research Association.

______ (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. Journal for Research in Mathematics Education, 16, 163-176.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. New York : Acasdemic Press.

______ (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed), Cognitive science and mathematics education. 189-215.

______ (1989). Explorations of student's mathematical belief and behavior. Journal for Research in Mathematics Education, 20, 338-355.

Silver, E. A. (1987). Foundations of Cognitive theory and research for mathematics problem solving instruction. In A. H. Schoenfeld (Ed), Cognitive science and mathematics education. Hillsdale, New Jersey : Lawrence Erlbawn Associates.

Wong, P.S.K. (1989). The effects of academic settings on students' metacognition in mathematical problem solving. Singapore Institute of Education.

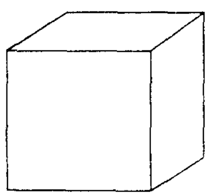
<부 록> 검사 문제

문제 1. 다음 숫자는 어떤 규칙에 따라서 변화하고 있다. □에는 무슨 숫자가 들어갈까?[1)]

77
49
□
18
8

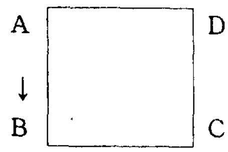
풀이) 77을 7×7로 보면 49
다음은 4×9로 보면 36
다음은 3×6으로 보면 18
그리고 1×8이면 8 ∴ 36
전략) 수학적 귀납법 중 규칙성 찾기

문제 2. 아래의 그림의 정육면체에서 점선으로 표시된 두 직선이 이루는 각도는 얼마인가[2)]



풀이) 두 점선의 끝을 연결하면 정삼각형
∴ 60°
전략) 보조 요소(보조선) 도입

문제 3. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 한개의 주사위를 던져서 나온 수만큼 화살표 방향으로 꼭지점 A에서 출발하여 정사각형의 둘레를 움직이는 점을 P라고 할 때, 주사위를 두번 던져서 점 P가 꼭지점 D에 올 확률을 구하여라. (단, 두번째 던질 때는 첫번째 던져 점 P가 도달한 꼭지점을 출발점으로 한다.)[3)]



풀이) 주사위를 두 번 던져서 점 P가 꼭지점 D에 오도록 하려면, 두 번의 주사위 눈의 합이 3, 7, 11이면 된다. 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 모든 경우의 수는 36 가지이고, 그 중 합이 3인 경우는 (1,2), (2,1)의 2 가지, 합이 7인 경우는 (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)의 6 가지, 합이 11인 경우는 (5,6), (6,5)의 2 가지. 따라서 구하는 확률은

$$\frac{2+6+2}{36}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

전략) 단순화 전략, 조건을 여러 부분으로 나누어 부분 문제 각각을 풀기

문제 4. 어느 파티에 참석한 사람은 남주인과 여주인을 포함해 모두 4쌍의 부부가 있었다. 이들 사이에 여러번의 악수가 이루어지는데, 아무도 자기자신과는 악수하지 않고, 자신의 배우자와도 악수하지 않으며, 또한 같은 사람과는 한번만 악수한다. 여주인이 그녀 자신을 제외하고 나머지 사람들에게 각각 몇번씩 악수를 했느냐고 질문하였더니, 사람들 모두 다른 수로 대답하였다. 그렇다면 여주인과 남주인은 각각 몇번씩의 악수를 하였겠는가?[4)]

---

1) 펠레리만 외 (1990). 『재미있는 수학 퍼즐 여행』, 편집부(역) (서울: 팬더북), p.143.

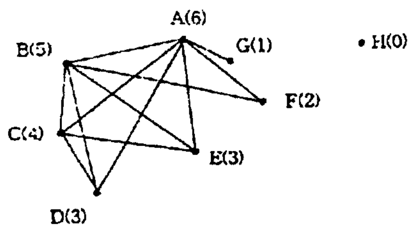
2) 마틴 가드너 (1993). 『수학의 세계』, 과학세대(역) (서울 : 현대정보문화사), p.177.

3) 박승동(편)(1991). 『한국 수학 올림피아드』 (서울 : 가서원), pp.283-284. (1991년 서울 중학생 수학 경시대회 제 3 번 문제)

4) Jackson, B.W. and Thoro, D. (1990). *Applied* Combinatorics with Problem Solving. New York:

풀이) 인원수는 모두 8명이고 여주인을 제외하면 7명이다. 이들 7명이 각각 자기자신과 배우자를 제외한 다른 사람과 악수할 수 있는 횟수는 최대로 6이다. 그리고 7명이 모두 다른 수로 대답했으므로 대답한 악수 횟수의 종류는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6이다. 이 7가지의 차수(degree)를 가지는 점(vertex)들로 구성된 그래프(graph)를 그려 보면 아래 그림과 같다. 이때 점(vertex)은 사람을 의미하고 선분(edge)은 서로 악수한 관계를 나타낸다.

여기서 A와 H, B와 G, C와 F는 서로 부부관계이다. 따라서 D와 E는 남주인과 여주인 부부이고, 이들은 각각 3번씩 악수를 한다.



전략) 그림으로 나타내기, 대칭

문제 5. 어떤 교사가 군데군데 숫자가 빠진 3자리수의 곱셈문제를 내놓고 학생들에게 빠진 자리에 바른 숫자를 채우도록 했다. 그 문제가 다음과 같을 때, 어떤 수를 넣으면 되겠는가?[5]

$$\begin{array}{r} \square\ 1\ \square \\ \times\quad 3\ \square\ 2 \\ \hline \square\ 3\ \square \\ 3\ \square\ 2\ \square \\ \square\ 2\ \square\ 5 \\ \hline 1\ \square\ 8\ \square\ 3\ 0 \end{array}$$

풀이) 감추어진 수는 다음과 같이 판단해 나가면 복원할 수 있다. 설명하기 쉽도록 각 단에 번호를 붙여 보면 우선 첫번째 문제에서 C단의 오른쪽 끝수가 0이라는 것은 곧 알 수 있다. 여기서 이번에는 A단 오른쪽 끝수를 찾아 보자.

$$\begin{array}{rl} \square\ 1\ \square & \cdots\cdots\cdots\cdots\ \mathrm{A} \\ \times\quad 3\ \square\ 2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\ \mathrm{B} \\ \hline \square\ 3\ \square & \cdots\cdots\cdots\cdots\ \mathrm{C} \\ 3\ \square\ 2\ \square & \cdots\cdots\cdots\cdots\ \mathrm{D} \\ \square\ 2\ \square\ 5 & \cdots\cdots\cdots\cdots\ \mathrm{E} \\ \hline 1\ \square\ 8\ \square\ 3\ 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\ \mathrm{F} \end{array}$$

이 수는 여기에 2를 곱했을 때에는 C단 우측 끝수가 0, B단의 3을 곱했을 때에는 E단 오른쪽 끝수가 5가 되는 수다. 그렇게 하면 이런 수는 5뿐일 것이다. D단 오른쪽 끝수는 당연히 0이다. 그러면 B단 2번째의 수는 8이 된다. 왜냐하면 15×8=120이 되고 D단의 20이라는 수가 나오기 때문이다. 8을 알게 되면 A단 왼쪽 끝수는 4가 된다. D단 왼쪽 끝수가 3이 되기 위해서는 4 이외에는 없기 때문이다. 따라서 감추어진 수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{array}{r} 4\ 1\ 5 \\ \times\quad 3\ 8\ 2 \\ \hline 8\ 3\ 0 \\ 3\ 3\ 2\ 0 \\ 1\ 2\ 4\ 5 \\ \hline 1\ 5\ 8\ 5\ 3\ 0 \end{array}$$

전략) 관점의 변화, 거꾸로 풀기 전략

Addison-Wesley Publishing Company. p.141.

5) 펠레리만 (1989). 『재미있는 수학 탐험』 (서울: 팬더북), pp.135-136.