韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
1994. 6. 제 33권 제 1호 45-50

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Series A: Jun. 1994, Vol. 33, No. 1, 45-50

van Hiele 이론에 근거한 대학생의 기하발달 수준의 측정[1)]

계 영 희 (고신대학교)

Ⅰ. 서 론

일찌기 1934년에 Veblen은 기하를, 공리론적 구조(axiomatic structure)를 가진 수학의 한 분야인 동시에 직관적 실험과제(intuitive experimental tasks)를 기술하는 물리학의 한 분야라고 설명하였다. 또한 기하를 두 종류의 영역으로 나누었다. 하나는 인간이 사고과정을 거쳐 만들어낸 결과물인 기하의 내용(product)이며 다른 하나는 사고과정 자체인 기하의 과정(process)이다.

기하의 내용으로는 정리, 정의, 공리, 무정의 용어 등을 들 수 있는데 이들을 학교수학에서 잘 지도해야 하는 이유는 이러한 공리론적 조직을 잘 이해시키는 것이 수학의 유산을 물려주는 일이기 때문이다.또한 물리적 현상으로서 데이터, 문제상황등은 기하의 학습에 중요한 모델을 제공하므로 물리적 모델과 수학적 모델(공리론적 체계)의 대조는 수학적 모델을 이해하는 데 매우 중요한 요소가 되기도 한다. 이러한 관점에서 기하는 학교교육에서 중요한 역할을 하는 것이다.

1986년에 네덜란드의 수학자 van Hiele은 수학교육과정 중 기하영역에 있어서 학습자의 사고의 발달을 다섯 단계로 분류하였다. 이 Veblen이 나눈 기하의 내용과 기하의 과정중 후자에 강조점을 두어 기하를 배우는 학생의 사고의 발달에 주목한 것이라고 말할 수 있다. 그는 학생 때의 학습경험과 중학교 수학교사로서의 경험을 통해 기하가 수학의 다른 영역에 비해 특별히 어렵게 받아들여졌고 학습효과가 매우 낮았음을 인식한 것이 기하 영역을 연구하게 된 동기라고 말하였다. 그의 이론은 기하에 입문하는 비형식적 기하의 수준에서부터 수학적 엄밀성을 요구하는 수준까지 다 포괄하고 있다.

국민학교 기하에 대한 van Hiele 관련 연구로는 국민학교 1학년부터 고3(12학년)까지 인터뷰를 통해 심층 분석한 Oregon Project(1979-1982)와 국민학교 6학년부터 중3(9학년)까지 학생의 수준과 교과서 분석을 시도한 Brooklyn Project(1979), 그리고 구 소련 체제하에서의 광범한 연구가 있으며(Hoffer, 1983), Onnuam (1986)은 미국 국민학교 수학교과서중 기하영역의 계열을 Van Hiele 수준별로 분석하였고, 필자는 우리나라 국민학교 수학교육과정중 기하영역의 범위와 계열을 Van Hiele이론에 근거하여 그 타당성을 고찰(1993)한 바 있다. 한편 Usiskin(1982), Burger, Shaughnessy(1986), Gutierrez(1991)등이 중학교 기하영역에 대하여 Mayberry, Fuys, 장경윤(1992)등이 대학생의 기하영역에 관하여 Van Hiele이론을 연구하였다. 필자의 선행연구에서는 우리나라 국민학교 교사의 기하수준이 매우 낮았음을 알 수 있었다. 한편 우리나라 대학생의 기하수준에 대한 측정이 없었으므로 본 논문에서는 필자가 재직하고 있는 수학과 재학생 115명을 대상으로 기하 발달 수준을 측정하였다. 조사도구로는 Van Hiele질문지를 이용하였으며, 유클리드기하학만을 배운 1·2학년과 非유클리드기하학과 위상기하학을 배운 3·4학년의 기하발달 수준을 비교하였다.

---

1) 이 논문은 1993년도 고신대학교 연구비에 의하여 조성되었음.

연구 문제로는 다음과 같은 가설을 세우고 검증을 하였다.

[가설 1] 非유클리드 기하학을 안 배운 1·2학년은 非유클리드 기하학을 배운 3·4학년과 평균점에서 차이가 있을 것이다.

[가설 2] 非유클리드 기하학을 안 배운 1학년과 2학년 간에는 차이가 없을 것이다.

[가설 3] 1·2학년은 3/5 기준으로 3수준 이상의 학생이 50% 이상일 것이다.

[가설 4] 3·4학년은 3/5 기준으로 3수준 이상의 학생이 70% 이상일 것이다.

II. 이론적 배경

일찍이 Piaget는 기하학 발달의 단계를 첫째, 감각운동 혹은 지각의 단계 곧 위상공간(topological space)의 단계와 둘째, 사고 혹은 상상의 단계 곧 사영공간(projective space)및 유클리드 공간 (Euclidean space)의 2단계로 구분하였다. 즉, 아동은 점, 선, 각등의 추상적 개념을 기본으로 하는 유클리드 기하보다는 위상적 기하의 공간개념을 발달단계에서 더 먼저 갖게된다는 것이다. Van Hiele은 이러한 Piaget의 기하학 발달단계의 입장을 수용하면서도 "발달보다는 학습에" 초점을 두었다. 다시 말하면, Piaget의 발달단계는 논리적 사고의 발달단계에 이르기 전에는 학습이 무용하다는 것이지만, Van Hiele은 학습에 의해 발달 단계를 다음 수준으로 이동시킬 수 있다는 주장이다. Van Hiele은 초등에서부터 완성수준까지 다음과 같은 순차적인 과정을 밟는다고 주장하였다(Hoffer, 1981; Burger et al., 1986).

1수준: 시각적 수준(visualization) 또는 인식의 수준(recognition)

기하학적인 개념이 가지고 있는 성질과 특징을 구분할 수는 없어도 그림이나 구체적 활동을 통하여 전체로서 개념을 시각적으로 비슷한 형태로 유추해 낸다. 이 수준에 있는 학생은 기하학적인 용어(삼각형, 다각형등)나 도형을 인식할 수 있고 주어진 도형을 복사할 수도 있다.

2수준: 분석적 수준(analysis)

관찰과 실험을 통하여 기하학적인 개념의 분석이 시작된다. 따라서 도형을 분류할 수 있다. 즉 도형에는 부분들이 있게 되고 이 부분이 모여서 한 도형을 이룬다는 것을 인식할 수 있다. 그러나 아직 명확하게 수학적인 정의를 내리지는 못한다. 또한 정확한 정의를 이해하지 못하기 때문에 도형의 성질들 사이의 관계를 이해하지 못한다.

3수준: 추상적 수준(abstraction ordering)

이 수준에 있는 학생은, 한 도형에서 존재하는 성질들의 관계를 파악할 수 있다. 따라서 도형의 성질을 추론할 수 있고 도형을 어떤 관점으로 분류할 수 있다. 이 때 집합의 포함관계가 이해되고, 수학적 정의가 이해된다. 형식적인 증명은 가능할 수도 있으나 수학의 공리론적 방법을 잘 이해하지 못하고 가정에서 결론을 이끌어 가는 논리적 순서를 잘 보지 못한다.

4수준: 연역적 수준(deduction)

이 수준에서는 공리론적 조직(system) 속에서 기하의 정리들을 세우는 추론을 이해한다. 무정의 용어, 공리, 공준, 정의, 정리 및 증명의 역할과 관계성을 알게 된다. 이 수준의 학생들은 증명과정을 기억해서 기술하는 수준이 아니고 창조할 수 있으며, 필요, 충분조건의 상관성을 이해할 수 있다.

5수준: 수학적 엄밀수준(rigor)

이 수준은 고등학교의 수준을 훨씬 넘은 단계이다. 즉, 非유클리드 기하를 연구할 수 있고 기하의 여러 공리들 사이의 차이점을 비교 할 수도 있다. 구체적인 모형도 없이 매우 추상적으로 다양한 기하를 학습할 수 있다.

Van Hiele은 한 수준에서 다음 수준으로의 이행을 학습과정의 결과라고 보았으며 바로 이 점이 Piaget와 구별되는 특징이다. 1957년에 Dina Van Hiele-Geldof은 12세 아동을 실험 연구한 결과 1수준에서 2수준으로 이동하는데 약 반년간의 수업 20시간, 2수준에서 3수준으로 이

동하는데 50시간이 소요되었음을 보였다(Usiskin, 1982).

P.M.Van Hiele은 수준간의 이행시기에 순차적으로 다음의 5단계 대로 학습을 진행하면 쉽게 다음 수준으로 이행할 수 있는 효과적인 지도방법과 교재개발에 관하여 제안하였다 (Crowley, 1987).

1단계: 질의·정보(inquiry information) 단계

초기 단계로서 교사와 학생들이 어떤 수준의 지도를 위해 학습목표를 이야기하는 단계이다. 즉 교사는 본 과제에 대하여 과거에 배운 예비지식이 무엇인가를 확인하고 학생들은 주어진 과제에 대하여 관찰하고 질문하며 앞으로 어떻게 공부하는지 방향을 얻을 수 있도록 한다.

2단계: 방향 제시의 오리엔테이션(directed orientation)단계

이 단계에서는 교사가 제시하는 활동자료를 보며 학생들은 자기 나름대로 과제를 탐구한다. 이 때 교사는 제시하는 자료를 학생들의 수준에 따라 다르게 제시한다.

3단계: 표현(explication)의 단계

이 단계에서는 학생들이 2단계에서 경험하고 관찰한 자기의 관점을 토론한다.이때 교사의 역할은 학생의 토론하는 활동만을 지켜보며 어떤 설명도 하지 않는다.

4단계: 자유로운 응용(free orientation) 단계

3단계보다 복잡한 과제가 제시된다. 즉, 많은 사고단계와 관계에 관한 깊은 조사 과정등 단순한 방법이 아닌 몇 가지 방법으로 끝마칠 수 있는 과제를 제시한다.

5단계: 통합(integration) 단계

이 단계는 학생들 스스로 자기가 경험한 4단계까지를 종합하는 단계이다. 5단계가 끝나면 학생들은 다음 수준으로 넘어갈 준비가 된 셈이다.

Ⅲ. 연구방법

1) 연구대상과 도구

본 연구는 본교 수학과 재학생 115명(1학년 34명, 2학년 31명, 3학년 32명, 4학년 18명)을 대상으로 기하학 발달 단계의 수준을 측정하기 위하여 Van Hiele 질문지를 이용하여서 조사하였다.

검사도구는 Chicago 대학에서 1982년 Usiskin 등이 CDASSG (Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry) 프로젝트를 통해 제작한, Van Hiele수준을 측정하기 위한 표준화 검사도구를 사용하였다. 이 검사도구는 모두 객관식 25문항인데 Van Hiele이 수준측정을 위하여 직접 만든 문항들이 아니고 Van Hiele이 여러 문헌과 강연을 통해 각 수준의 특성으로 언급한 것을 Chicago 연구팀에서 문항화 한 것이다. 이 도구는 원래 중등학생을 대상으로 한 것이지만 CDASSG 이후의 Van Hiele 관련 논문들은 이 표준화 검사를 도구로 채택하여 다양한 연령층에게 실시 하였다. 중등 이상의 학생에게는 증명을 위한 주관식 문제들도 있으나 본 논문에서는 객관식 25문항을 채택하였다. 시험시간은 모두 25분을 주었다. 수준의 명칭은 Van Hiele 연구마다 보통 이원화 된 것을 사용하고 있는데, 본 연구에서는 Pyshkalo(1968; Hoffer, 1983)가 명명한 1, 2, 3, 4, 5 의 5단계를 명명한 것으로 사용하였다.

<표 1> Van Hiele 수준 명칭

수준 \ 명명	Van Hiele	Pyshkalo,Usiskin	본연구
기 초 이 전		0(취급안함)	0
시각적 수준	0	1	1
분석적 수준	1	2	2
추상적 수준	2	3	3
연역적 수준	3	4	4
엄 밀 수 준	4	5(측정못하는 것으로 간주)	5

2) 자료의 처리

자료의 처리는 다음과 같다.

① 한 수준당 5문제씩 배당되었으므로 채점은 5점 단위로 하였다.

② 각 수준의 점수가 그 수준을 만족시켰는가의 기준은 3/5과 4/5기준(criterion) 을 사용하여 기준을 만족했으면 X로 표시하였다.

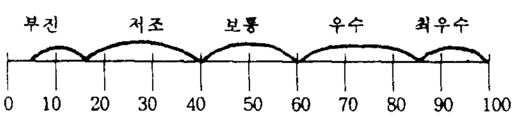
(보기) 5 3 4 2 1 → 3/5 기준: X X X O O
4/5 기준: X O X O O

3/5기준은 그 기준에 도달했으되 실수하여 틀린 학생을 놓치지 않을 수 있어서 수준을 낙관할 수 있으나, 추측으로 맞춘 학생이 포함될 수 있는 반면에(제I종 오류), 4/5기준은 추측에 의해 포함될 수 있는 답을 맞출 수 있는 가능성을 최소화하는 장점이 있으나 그 기준에 도달하고도 탈락되는 학생이 있게 된다(제II종 오류).

③ Van Hiele은 5 수준에 도달한 것은 측정할 수 없다고 언급했으므로 Usiskin의 도구에서는 5 수준을 Usiskin 의 연구결과에 포함시키지 않았으나(Usiskin, 1982, p.99), 본 연구에서는 XXXXX인 경우를 5 수준으로 분류하였다. 본 연구에서는 3/5 기준과 4/5 기준에 의한 자료를 함께 제시한다.

Van Hiele 수준 달성정도의 연속성은 Gutierrez(1991)에 의해 다음 <표 2>와 같이 도식화된 바 있다.

<표 2> Van Hiele 수준 달성 정도



④ 채점 후 다음과 같은 두 가지 중 하나인 경우 학생의 수준을 n 수준으로 판정하였다.

즉, (i) n 과 n-1 수준을 만족하나 n-2 나 n-3 중 하나는 만족하지 않는다.

(ii) n 수준과 n-1 이하의 수준은 만족하나 n+1수준은 만족하지 못하고, n+2 이상의 수준은 만족한다.

이상의 기준에 의거한 채점과 판정의 룰은 <표 3>에 제시되었다.

<표 3> Van Hiele 수준의 채점과 판정의 룰

결정 수준	문항수준 1	2	3	4	5
0 수준(기초이전수준)	O	O	O	O	O
	O	X	O	O	O
	O	O	X	O	O
	O	O	O	X	O
	O	O	O	O	X
	O	X	O	O	X
	O	O	X	O	X
	O	O	O	X	X
1 수준(시각적 수준)	X	O	O	O	O
	X	O	X	O	O
	X	O	O	X	O
	X	O	O	O	X
	X	O	X	O	X
	X	O	O	X	X
2 수준(분석적 수준)	X	X	O	O	O
	X	X	O	X	O
	X	X	O	O	X
	X	X	O	X	X
3 수준(추상적 수준)	O	X	X	O	O
	X	X	X	O	O
	O	X	X	O	X
	X	X	X	O	X
4 수준(연역적 수준)	X	O	X	X	O
	O	X	X	X	O
	X	X	X	X	O
	X	O	X	X	X
	O	X	X	X	X
5 수준(엄밀 수준)	X	X	X	X	X
무 효 처 리	O	X	O	X	O
	O	O	X	X	O
	O	X	O	X	X
	O	O	X	X	X

(X는 그 단계의 문제에서 3/5 혹은 4/5 기준을 통과했음을 의미)

⑤ 4개 학년을 실시하였으나 4학년 학생수가 타 학년에 비하여 적었으므로 세 그룹(1학년, 2학년, 3·4 학년)으로 나누었다.양적 연구의 자료는 백분율로써 각 수준별 학생의 비율을 산

<표 4> 수준별 학생의 백분율

학년 / 수준	1(3/5)	2(3/5)	3·4(3/5)	1(4/5)	2(4/5)	3·4(4/5
0	3	3	2	18	3	12
1	21	·	8	24	23	22
2	18	32	22	18	29	22
3	47	35	40	32	39	40
4	9	10	12	9	·	2
5	3	19	14	·	3	2
무효	·	·	2	·	3	·
합	101	99	100	101	100	100

<표 5> 점수 산정 기준

문 항 수 준	득 점
1 (1 - 5번)	1
2 (6 - 10번)	2
3 (11 - 15번)	4
4 (16 - 20번)	8
5 (21 - 25번)	16

출 하였으며 <표 4>, 세 그룹의 차이에 관해서는 다음과 같은 점수산정<표 5>과 이에 따른 평균에 의하여 F검증을 실시하였다.

⑥ F 검증의 실시는 SPSS 프로그램을 도구로 사용하였다.

IV. 연구 결과

[가설 1] 非유클리드 기하학을 안 배운 1·2학년은 非유클리드 기하학을 배운 3·4 학년과 평균점에서 차이가 있을 것이다.

가설 1.은 유의 수준 5%로 검정한 결과 기각되었다.

세 그룹의 평균과 표준편차는 다음과 같다.

<표 6> 세 그룹의 평균과 표준편차

	평 균	표준편차
1 학년	53.4	19.3
2 학년	79.7	23.9
3·4 학년	83.6	23.5

F 검증을 한 결과 $F(2,\ 112,\ 0.05) = 19.9 > 3.07$ 이므로 세 그룹 간에는 유의적인 차이가 있다고 말할 수 있다. 그러나 표 7에서와 같이 非유클리드 기하학을 안 배운 1학년과 2학년 사이에 유의적인 차이가 있으므로 가설 1은 기각된다.

<표 7> 학년간의 유의적인 차이

	1 학년	2 학년	3·4 학년
1 학년			
2 학년	*		
3·4 학년	*		

[가설 2] 非유클리드 기하학을 안 배운 1학년과 2학년 간에는 차이가 없을 것이다.

표 7.에서와 같이 1학년과 2학년 사이에 유의적인 차이가 있으므로 가설2. 도 기각된다.

[가설 3] 1·2학년은 3/5기준으로 3수준 이상의 학생이 50% 이상일 것이다.

표 4.에서 1학년은 3기준 이상의 학생이 59% 이상이고 2학년은 64% 이므로 가설3. 은 채택한다.

[가설 4] 3·4학년은 3/5수준으로 3수준 이상의 학생이 70% 이상일 것이다.

표 4.에서 3·4학년은 66%이므로 가설4.는 기각된다.

V. 결론 및 논의

연구결과 4개의 가설 중에서 1개만이 채택되었다.

즉, ① 非유클리드 기하학을 안 배운 1·2 학년과 非유클리드 기하학을 배운 3·4학년과는 평균점에서 차이가 없었다.

② 非유클리드 기하학을 안 배운 1학년과 2학년 사이에 유의적인 차이가 있었다.

①과 ②의 이유로는 1학년이 미분적분학만을 배운 반면에, 2학년은 미분방정식, 선형대수학, 집합론을 배운 결과라고 생각한다. 2학년이 非유클리드 기하학을 배우지 않았더라도 집합론을 통하여 수학의 공리론적인 체계, 추상적이고 논리적인 사고, 연역적인 사고과정 등이 학습되었기 때문이라고 추정할 수 있다. 따라서 1학년과 2학년 사이에는 유의적인 차이가 있으며 1학년과 3·4학년 사이에도 유의적인 차이가 있으나, 2학년과 3·4학년 사이에는 유의적인 차이가 없었다.

③ 1·2학년은 3/5기준으로 3수준 이상의 학생이 50%가 넘는 59%, 64%이었고 4/5기준으로는 40% 정도에 머물렀다.

④ 3·4학년은 3/5기준으로 3수준 이상의 학생이 70%에 못 미치는 66%이었고, 4/5수준으

로는 44%이었다.

이는 기하학의 학습으로만 기하학의 발달수준을 높일 수 있는 것이 아니라 수학 특유의 공리론적인 체계, 추상적이고 연역적인 전개방법 등이 기하의 발달수준을 촉진시켰다고 말할 수 있다.

Van Hiele이 명명한 2수준 이상의 학생이 50% 이상이 되리라는 가설3. 과 4.는 본 연구자가 임의로 설정한 것이었으며, 소규모를 대상으로 한 미국 대학생들의 연구결과(장 경윤, 1992)와 유사했다.

그러나 연구자가 명명한 3수준이상이 어느 정도냐? 보다는 대학에서 수학을 전공하면서도 1. 2수준의 학생이 상당수 있다는 사실이 교육적으로 보다 중요한 문제로 생각된다. 중고등학교에서 유클리드기하를 배우고 대학에서 발전된 기하학을 배운 후에도 이와 같은 결과가 나타나는 것은 n-1수준의 학생에게 n수준의 기하 내용을 가르쳐서 학생들이 알고리듬(algorithm)만 익힌 것인지 결코 n수준 내용을 이해하지 못했다는 Van Hiele의 설명으로써 해명된다.

참 고 문 헌

Ausubel, D. P. (1968). Educational Psychology : A Cognitive View.(New York:Holt, Rinehart and Winston, Inc).

Burger, W. F. Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry, Journal for Research in Mathematics Education, 17, pp.31-48.

Crowley, M. L. (1987), The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought, NCCM(ed.), Learning and Teaching Geometry K-12, 1987 Yearbook. pp.1-16.

Gutierrez, A. et al. (1991), An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the Van Hiele Levels,Journal for Research in Mathematics Education, 22, 3.

Hoffer, A. (1981), Geometry is more than proof, Mathematics Teacher, 14, 1. pp.13-14.

_______ . (1983), Van Hiele-Based Research, R. Lesh and M. Landau(ed.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, New York : Academic Press, pp.205-227.

Kyung Yoon Chang (1992), Spacial and Geometric Reasoning Abilities of College Students, Boston Univ. ph.D. dissertation.

Lindquist, M. M. (1981), Selected Issues in Mathematics Education, Berkeley : McCutchan Publishing Co.

NCTM (1989), Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.

NCTM (1990), Mathematics for Young Child.

Onnuam, D. & Underhill, R. G. (1986), A Well-Defined Curriculum Sequence for Informal Euclidean Classifications and Relations, School Science and Mathematics, 86, 6.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1963), The Child's Conception of Space.London:Routledge and Kegan Paul.

Usiskin, Z. (1982), Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry, Chicago:University of Chicago. (ERIC ED 220288).

Van Hiele, P. M. (1986), Structure and Insight : A Theory of Mathematics Education, London : Academic Press, Inc.

계영희·김진숙 (1993), Van Hiele 이론에 근거한 국민학교 수학교육과정 기하영역의 범위와 계열의 타당성 고찰, 한국수학교육학회지 <수학교육> 제 32권, 제 3호, 70 - 88.

김도상 외 (1990), 수학과 교재론, 서울, 경문사.

장경윤 (1993), SAT와 미국 수학교육, 한국수학교육학회지 <수학교육> 제 32권, 제 1호, 91 - 99.