

論文94-31B-12-2

선형 위상 IIR나이퀴스트 필터의 설계 방법

(A Method for Designing Linear Phase IIR Nyquist Filters)

孟勝柱*, 李秉基*

(Seung-Joo Maeng and Byeong Gi Lee)

要約

본 논문에서는 선형 위상 IIR 나이퀴스트 필터를 설계하는 새로운 방법을 제안한다.

제안된 방법으로 설계된 필터는 기존의 IIR 나이퀴스트 필터가 비선형 위상을 가지는데 비해 선형 위상을 가지며, 기존의 FIR 나이퀴스트 필터에 비해 필터의 차수가 크게 낮으며 계수 양자화의 경우 더 적은 비트수로도 주어진 특성을 만족시킨다는 장점을 가진다. 본 논문에서는 먼저 영위상 IIR 나이퀴스트 필터의 표현식을 유도한 후 필터의 설계 방법을 제안한다. 제안된 설계 방법은 순환적 방법에 의해 수행되며, 매 순환 단계에서는 수정된 Remez 교환 방법이 사용된다. 마지막으로 몇가지 설계 예를 통하여 제안된 설계 방법의 성능을 분석한다.

Abstract

In this paper, we propose a new method to design IIR Nyquist filters. By this method, we can design IIR Nyquist filters which possess linear phase characteristics and are lower in order than FIR Nyquist filters. We derive expressions for zero-phased IIR Nyquist filters and propose new design methods for them. An iteration process is used to design the proposed IIR Nyquist filters, and in each iteration step a modified version of the Remez exchange algorithm is used. Finally, the proposed design method is demonstrated through design examples.

1. 서론

나이퀴스트 필터는 제한된 대역폭의 채널을 통한 효율적인 신호의 전송을 위해 주로 사용되며, 대역폭

이 제한되어 있고 필터의 충격응답에 규칙적으로 0이 존재한다는 특성을 가진다.^[1] 이러한 특성 때문에 나이퀴스트 필터는 데이터 전송시에 중요하게 사용된다. 나이퀴스트 필터는 크게 FIR 필터와 IIR 필터의 두 종류로 분류할 수 있으며, 그 설계 방법은 여러가지 제안되어 있다.^[2] 이 중 FIR 나이퀴스트 필터의 경우는 선형위상을 가지도록 설계하기는 쉽지만 필터의 차수가 높다는 단점이 있다. FIR 나이퀴스트

* 正會員 서울大學校 電子工學科
(Dept. of Elec. Eng., Seoul Nat'l Univ.)
接受日字 : 1993年 9月 15日

필터는 선형 계획법^[1,2], 고유필터 설계방법^[3] 또는 Remez 형태의 설계 방법^[4,6] 등으로 설계할 수 있다. 이 중, Saramaki와 Neuvo가 제안한 방법^[5]에서는 보간율이 합성수인 경우 필터의 차수를 크게 줄일 수 있는 다단 필터 설계 방법이 제안되어 있지만, 보간율이 소수인 경우에는 필터의 차수가 여전히 높게 된다.

한편, IIR 필터는 일반적으로 충격 응답에 규칙적으로 0을 가지기 어렵기 때문에 나이퀴스트 필터로는 별로 적합하지 못하다. 하지만, 특정한 조건이 만족되면 IIR 필터도 이러한 특성을 가질 수 있다.

Nakayama와 Mizukami는 표본간 간섭이 0인 IIR 나이퀴스트 필터가 되기 위해 IIR 필터의 분자와 분모의 계수가 만족해야 할 조건을 유도한 바 있다.^[7]

이 방법에 의해 설계된 나이퀴스트 필터는 낮은 차수를 갖지만 위상 특성이 비선형이 되는 단점이 있다. 한편, 전역 통과 IIR 필터를 기반으로 한 IIR 나이퀴스트 필터의 효율적인 설계 방법이 최근 제안되었지만, 이 방법은 반대역 필터에만 적용할 수 있고, 근사적인 선형 위상만을 가진다는 단점이 있다.^[8]

본 논문에서는 선형 위상을 가지는 IIR 나이퀴스트 필터의 설계 방법을 제안하고자 한다. 제안된 필터 설계 방법은 [7]에서 유도된 조건식을 기반으로 하며, 설계된 필터는 보간율이 크고 대역폭이 좁은 경우에도 낮은 차수를 가진다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 II절에서 기존의 나이퀴스트 필터의 설계 유도하고 이를 위한 새로운 설계 방법을 제안하도록 하겠다. 끝으로 IV절에서는 몇가지 예를 통하여 기존의 설계 방법과 제안된 설계 방법을 비교해 보겠다.

II. 기존의 나이퀴스트 필터의 설계 방법

나이퀴스트 필터 $H(z)$ 는 그 충격 응답 $h(n)$ 에 의해 다음과 같이 정의된다.

$$h(K) \neq 0, \tag{1a}$$

$$h(K+kN)=0, \quad k \text{는 정수}, \quad k \neq 0. \tag{1b}$$

이 식에서 K 와 N 은 정수이며 N 은 보간율을 나타낸다. 그림 1(a)는 위의 특성을 가지는 충격응답을 보여준다.

$$\sum_{k=0}^{N-1} H(zW^{-k}) = Nh(K). \tag{2}$$

$K=0$ 인 경우 z 평면상에서 식 (1)은 다음과 같이 표현된다.⁴

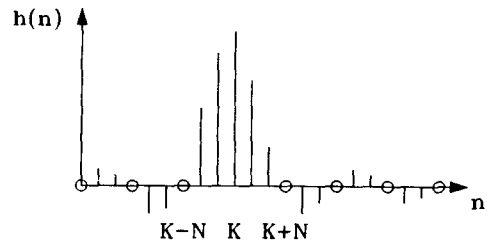
$h(0)$ 를 $1/N$ 로 하면 위 식의 값은 1이 된다. 즉,

나이퀴스트 필터를 N 번 이동하여 그 주파수 특성을 더하면 평탄한 주파수 특성을 얻게 되는 것이다. 그림 1(b)는 나이퀴스트 필터 $H(e^{j\omega})$ 의 주파수 특성을 보여준다. 이 그림에서 통과대역 차단주파수 ω_p 와 저지대역 차단주파수 ω_s 는 각각 다음과 같이 주어진다.^[7]

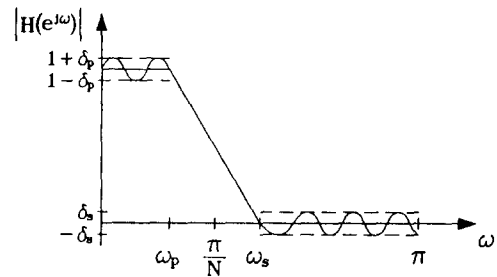
$$\omega_p = \frac{1-\rho}{N} \pi, \tag{3}$$

$$\omega_s = \frac{1+\rho}{N} \pi.$$

이 식에서 ρ 는 롤오프 율(rolloff rate)을 나타낸다. 이제, 기존의 나이퀴스트 필터 설계 방법 중 두 가지를 간단히 고찰해보도록 하겠다.



(a)



(b)

그림 1. 나이퀴스트 필터의 개요

(a) 충격응답 특성 (b) 크기 특성

Fig. 1. The concept of the Nyquist filter.

(a) time domain specification.

(b) frequency domain specification.

1. FIR 나이퀴스트 필터

FIR 나이퀴스트 필터는 선형계획법, Remez 교환 방법 등을 이용하여 설계할 수 있는데, 그 중 최적의 필터를 설계할 수 있는 Saramaki와 Neuvo가 제안한 방법^[5]을 살펴해보도록 하겠다.

Saramaki와 Neuvo는 전체 필터를 시간 평면상

에서의 조건을 만족시키는 부분과 주파수 평면상에서의 조건을 만족시키는 부분으로 나누어 두 부분을 고대로 설계하는 방법을 제안하였다. 즉, 필터 $H(z)$ 를

$$H(z) = H_p(z)H_s(z) \quad (4)$$

로 나누어 $H_p(z)$ 는 식 (1)의 조건을 만족시키기 위해, $H_s(z)$ 는 주파수 특성을 만족시키기 위해 사용한다. 먼저 $H_p(z)$ 의 값을 1로 고정시킨 후 저지 대역에서의 특성을 만족시키도록 $H_s(z)$ 를 설계한 후, 전체 필터 $H(z)$ 의 충격응답이 식 (1)을 만족하도록 $H_p(z)$ 를 설계한다. 이 경우 전체 필터 $H(z)$ 의 주파수 특성이 $H_s(z)$ 에 의해 주어진 특성과 달라지게 되므로, 설계된 $H_p(z)$ 에 맞추어 $H_s(z)$ 를 다시 설계한 후, $H(z)$ 의 충격응답이 식 (1)을 만족하도록 $H_s(z)$ 에 맞추어 $H_p(z)$ 도 다시 설계한다. 이런 과정을 몇회 반복하면 $H(z)$ 는 수렴하게 되며, 이때의 결과가 설계하고자 하는 필터가 된다.¹⁾

2. IIR 나이퀴스트 필터

IIR 필터의 경우는 일반적으로 식 (1)에 주어진 조건을 만족시키기 어렵기 때문에 나이퀴스트 필터로는 별로 적합하지 않다. 하지만, 최근 Nakayama와 Mizukami는 IIR 필터가 식 (1)의 조건을 만족하는 나이퀴스트 필터가 되기 위한 조건을 구하였다.¹⁷⁾ Nakayama와 Mizukami에 따르면 IIR 나이퀴스트 필터의 전달 함수는 일반적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H(z) = \alpha_k z^{-k} + \frac{\sum_{i=0}^{N_s} \alpha_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N \beta_{iN} z^{-iN}}, \quad \alpha_k \neq 0 \text{ 이고 } \beta_0 = 1. \quad (5)$$

이 식에서 α_i 와 β_{iN} 은 필터 계수, N_s 과 N_d 는 각각 분자와 분모의 차수이며, 이 중 N_d 는 N 의 정수 배이다.

필터의 설계시에는 먼저 주어진 필터 특성을 만족시키도록 분자의 계수를 최적화시켜 구한 후, 식 (5)의 형태를 만족하도록 분모의 계수를 구한다. 그 후

- 1) [6]에는 이밖에도 보간율이 합성수인 경우, 필터를 다단으로 설계하는 방법도 제안되어 있지만, 본 논문의 내용과는 관련이 없으므로 설명을 생략하도록 하였다.
- 2) [7]에는 IIR 나이퀴스트 필터를 표현하는 전달함수가 위의 식을 포함하여 두가지 형태로 유도되어 있다. 이 두가지 형태 중 위의 식이 다른 식보다 우수함 [7]에 보여져 있다.

전체 전달함수 $H(z)$ 를 다시 최적화하여 주어진 규격을 만족하도록 설계한다.

위의 FIR 나이퀴스트 필터와 IIR 나이퀴스트 필터는 모두 계수 양자화에 관계없이 식 (1)의 관계를 만족하지만, FIR 필터의 경우에는 필터의 차수가 높다는 단점이 있고, IIR 필터의 경우에는 위상 특성이 비선형이라는 단점이 있다. 이러한 문제점을 고려하여 다음 절에서는 선형위상을 가지는 새로운 IIR 나이퀴스트 필터에 대해 고찰하도록 하겠다.

Ⅲ. 선형 위상 IIR 나이퀴스트 필터의 설계 및 구현

임의의 위상 특성을 가지는 IIR 전달함수 $G(z)$ 가 주어져 있는 경우, 선형 위상 특성을 가지는 $H(z)$ 는 $G(z)$ 와 $G(z^{-1})$ 를 직렬로 연결하거나 병렬로 연결함으로써 얻을 수 있다. 즉,

$$H(z) = G(z) \cdot G(z^{-1}), \quad (6)$$

$$H(z) = G(z) + G(z^{-1}). \quad (7)$$

이 식에서 $G(z)$ 는 인과성 필터이고 $G(z^{-1})$ 는 비인과성 필터이다. $H(z)$ 가 영위상 IIR 나이퀴스트 필터가 되기 위해서는 충격응답이 $h(0)$ 를 중심으로 대칭이어야 하고, $K=0$ 에 대해 식 (1)을 만족해야 한다. 이제 위의 두가지 방법 중 어느 방법이 더 선형 위상 IIR 나이퀴스트 필터에 적합한지 살펴보도록 하겠다.

1. $G(z)$ 와 $G(z^{-1})$ 를 직렬로 연결한 경우

$G(z)$ 를 다음과 같은 일반적인 형태의 IIR 필터라 하자.

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N_s} \alpha_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^N \beta_i z^{-i}}. \quad (8)$$

위의 $G(z)$ 를 식 (6)에 대입한 후, $H(z)$ 가 IIR 나이퀴스트 필터가 되도록 하기 위해 식 (5)의 형태를 가지도록 하면

$$H(z) = \alpha'_0 + \frac{\sum_{i=1}^{N_s} \alpha'_i (z^{-i} + z^i)}{1 + \sum_{i=1}^N \beta'_{iN} (z^{-iN} + z^{iN})} \quad (9)$$

과 같은 식을 얻을 수 있다. 이 식에서,

$$\alpha'_i = \sum_{k=1}^{N_d} \alpha_k \alpha_{k-i} / \sum_{k=0}^{N_d} \beta_k^2, \quad i=0, 1, \dots, N_d, \quad (10)$$

$$\beta'_{iN} = \sum_{k=iN}^{N_d} \beta_k \beta_{k-iN} / \sum_{k=0}^{N_d} \beta_k^2, \quad i=1, 2, \dots, [N_d/N]$$

이고, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다. 또한, α_i 와 β_i 사이에는

$$\sum_{k=i}^{N_d} \beta_k \beta_{k-i} = 0, \quad i \text{는 정수, } i \neq N \text{의 정수배,} \quad (11a)$$

$$\sum_{k=0}^{N_d} \beta_k^2 \sum_{k=iN}^{N_d} \alpha_k \alpha_{k-iN} = \sum_{k=0}^{N_d} \alpha_k^2 \sum_{k=iN}^{N_d} \beta_k \beta_{k-iN}, \quad i \text{는 정수.} \quad (11b)$$

와 같은 관계가 성립해야 한다.

2. $G(z)$ 와 $G(z^{-1})$ 를 병렬로 연결한 경우 $g(n)$ 을 $G(z)$ 의 충격응답이라 할 때, 식 (7)은

$$h(n) = g(n) + g(-n) \quad (12)$$

과 같이 된다. $H(z)$ 가 나이퀴스트 필터이기 위해서는 $h(n)$ 이 $K=0$ 에 대해 (1)식을 만족해야 하는데, $G(z)$ 가 인과성 필터이므로 $g(n)$ 은 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$g(0) \neq 0, \quad (13)$$

$$g(n) = 0, \quad n = kN, \quad k = 1, 2, \dots$$

식 (1)과 비교해보면 식 (13)은 $G(z)$ 가 IIR 나이퀴스트 필터이어야 함을 의미한다. 즉, $G(z)$ 는

$$G(z) = \alpha_0 + \frac{\sum_{i=1}^{N_d} \alpha_i z^i}{\sum_{i=0}^{N_d} \beta_{iN} z^{-iN}}, \quad \alpha_0 \neq 0 \text{ 이고 } \beta_0 = 1 \quad (14)$$

과 같이 되고, 이 경우의 최종적인 $H(z)$ 는

$$H(z) = \tilde{\alpha}_0 + \frac{\sum_{i=1}^{N_d} \tilde{\alpha}_i (z^{-i} + z^i)}{1 + 2 \sum_{i=1}^{N_d} \tilde{\beta}_{iN} (z^{-iN} + z^{iN})}, \quad (15)$$

와 같이 된다. 이 식에서

$$\tilde{\alpha}_0 = 2\alpha_0, \quad (16)$$

$$\tilde{\alpha}_i = \sum_{k=0}^{N_d} (\alpha_{kN} \beta_{kN} + \alpha_{iN-kN} \beta_{kN}) / \sum_{k=0}^{N_d} \beta_{kN}^2,$$

이고 $i=0$ 또는 $i=N_d$ 에 대해 $\alpha_i = 0$

$$i = 1, 2, \dots, N_d, i \neq kN$$

$$\tilde{\beta}_{iN} = \sum_{k=i}^{N_d} \beta_{kN} \beta_{k-iN} / \sum_{k=0}^{N_d} \beta_{kN}^2, \quad i = 1, 2, \dots, N_d/N$$

이다.

식 (9)와 (15)로부터 직렬 연결과 병렬 연결의 $H(z)$ 가 같은 형태임을 알 수 있다. 따라서 이러한 형태의 $H(z)$ 를 설계하기만 하면 직렬 또는 병렬의 어느 연결로도 구현할 수 있게 된다. 하지만 식 (8)과 (14)를 비교해보면 직렬 연결의 경우에는 분자의 계수가 모든 z 의 지수승에 대해 존재하기 때문에 병렬 연결의 경우보다 더 많은 수의 곱셈기를 필요로 함을 알 수 있다. 또한 직렬 연결의 경우 계수 양자화시에는 계수들간에 더이상 식 (11)의 관계가 만족되지 않기 때문에 충격응답에 규칙적으로 0이 존재하는 특성을 잃게 된다. 이와는 달리 병렬 연결의 경우에는 식 (14)로부터 계수 양자화에 관계없이 이러한 특성이 유지됨을 알 수 있다. 이러한 점들을 고려해 볼때 영위상 IIR 나이퀴스트 필터의 설계에는 직렬 연결보다 병렬 연결이 더 적합함을 알 수 있다. 따라서 앞으로의 내용에서는 병렬 연결의 경우만을 다루도록 하겠다.

먼저 식 (15)에 주어진 영위상 IIR 나이퀴스트 필터의 설계 문제를 고려해보자. 주파수 평면상에서의 전달함수의 표현식은

$$H(e^{j\omega}) = \tilde{\alpha}_0 + \frac{2 \sum_{i=1}^{N_d} \tilde{\alpha}_i \cos i\omega}{1 + 2 \sum_{i=1}^{N_d} \tilde{\beta}_{iN} \cos iN\omega} \quad (17)$$

과 같이 된다. 좀 더 간략한 표현을 위해 $\tilde{H}(e^{j\omega})$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) - \tilde{\alpha}_0, \quad (18)$$

이 경우 식 (17)은

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \frac{2 \sum_{i=1}^{N_d} \tilde{\alpha}_i \cos i\omega}{1 + 2 \sum_{i=1}^{N_d} \tilde{\beta}_{iN} \cos iN\omega} \quad (19)$$

와 같이 된다. 식 (19)의 우변의 분모를 좌변에 곱하여 식을 다시 정리하면,

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = 2 \sum_{i=0}^{N_d} \tilde{\alpha}_i \cos i\omega - 2 \sum_{i=1}^{N_d} \tilde{\beta}_{iN} \tilde{H}(e^{j\omega}) \cos iN\omega, \quad (20)$$

과 같이 되고, 이는 다시 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(e^{j\omega}). \quad (21)$$

이 식에서

$$c_i = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i, & i \neq kN, \\ \tilde{\beta}_i, & i = kN, \quad i \neq 0 \end{cases} \quad (22a)$$

$$f_i(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2\cos i\omega, & i \neq kN, \\ -2\tilde{H}(e^{j\omega})\cos i\omega, & i = kN, \quad i \neq 0, \end{cases} \quad (22b)$$

$$\tilde{N} = \begin{cases} N_n, & N_n > N_d, \\ N_d, & N_n < N_d, \end{cases} \quad (22c)$$

이다.

설계의 최종 단계는 식 (21)에서의 계수 c_i 들을 결정하는 것이다. 그러나 식 (21)에서 보면 $\tilde{H}(e^{j\omega})$ 가 $f_i(e^{j\omega})$ 내에 포함되어 있기 때문에 직접적인 방법으로는 $\tilde{H}(e^{j\omega})$ 를 설계할 수 없다. 하지만 순환적 형태로 식을 표현할 수 있다면 필터의 설계가 가능하게 된다. 먼저, (20)을 다음과 같은 형태로 나타낸다.

$$\tilde{H}(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) - \tilde{H}(e^{j\omega})B(e^{j\omega}). \quad (23)$$

이 식에서

$$A(e^{j\omega}) = 2 \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq kN}}^{N_n} \tilde{\alpha}_i \cos i\omega, \quad (24a)$$

$$B(e^{j\omega}) = 2 \sum_{i=1}^{N_d} \tilde{\beta}_i \cos iN\omega \quad (24b)$$

이다. 다음으로 순환적 계산이 가능하도록 식 (23)을

$$\tilde{H}_{k+1}(e^{j\omega}) = A_k(e^{j\omega}) - \tilde{H}_k(e^{j\omega})B_k(e^{j\omega}) \quad (25)$$

와 같이 나타내고, 초기 조건을 $\tilde{H}_0(e^{j\omega}) = D(e^{j\omega})$ 로 준다. $D(e^{j\omega})$ 는 원하는 크기 특성을 나타내며, 통과대역에서의 값은 $1 - \tilde{\alpha}_0$, 저지대역에서의 값은 $-\tilde{\alpha}_0$ 이다. 매 순환단계에서는 다음과 같은 비선형 방정식을 최대치 최소화 기준에 대해 풀어서 $\tilde{H}_k(e^{j\omega}), k = 1, 2, \dots$ 를 구한다.

$$W(e^{j\omega})|D(e^{j\omega}) - \tilde{H}_k(e^{j\omega})| \leq \delta_p, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_p, \quad (26a)$$

$$W(e^{j\omega})|D(e^{j\omega}) - \tilde{H}_k(e^{j\omega})| \leq \delta_s, \quad \omega_s \leq \omega \leq \pi. \quad (26b)$$

이 식에서 $W(e^{j\omega})$ 는 가중치 함수를 나타내고, δ_p 는 통과대역오차율, δ_s 는 저지대역오차율을 나타낸다.

식 (21)은 FIR 필터의 형태이므로 기존의 FIR 필터의 설계 방법을 이용하여 $\tilde{H}_k(e^{j\omega})$ 를 설계할 수 있다. 본 논문에서는 Remez 교환 방법을 식 (22)와 같이 수정하여 사용하였다.^[10] 이 방법을 이용하면 매 k 번째 순환단계마다 최대치최소화 해인 $c_{i,k}$ 를 구할 수 있다. 이 방법은 그 자체로서 순환적 형태이기 때문에 제안된 방법은 반복적인 순환적 형태를 띠게 된다. 매 순환 단계에서의 수렴 기준은 오차의 증가분이 정해진 기준보다 작게 되는 것이며, 이전 단계와 현 단계의 최대 오차의 차이가 정해진 기준보다 작게 되면 전체 순환 방법이 수렴한 것으로 간주한다. 일단 $\tilde{H}_k(e^{j\omega})$ 가 수렴하게 되면 식 (22a)로부터 $\tilde{\alpha}_i$ 와 $\tilde{\beta}_i$ 를 구할 수 있다. $\tilde{\alpha}_i$ 와 $\tilde{\beta}_i$ 는 $G(z)+G(z^{-1})$ 의 계수이므로 식 (16)으로부터 필터 계수 $\tilde{\alpha}_i$ 와 $\tilde{\beta}_i$ 를 구할 수 있으며, 최종적으로 $G(z)$ 를 식 (14)와 같이 얻을 수 있다.

필터의 구현시 비인과성 필터 $G(z^{-1})$ 는 Powell과 Chau가 제안한 방법^[10]에 의해서 구현할 수 있다. 따라서, 전체 필터 $H(z)$ 는 식 (7)과 같은 두 필터의 병렬 연결의 형태로 구현가능하다. 전체 필터 $H(z)$ 의 구현 방법은 그림 2에 보인 것과 같다. 그림 2에서 위쪽 점선 내부는 비인과성 필터 $G(z^{-1})$ 의 구현을 나타내고, 아래쪽 점선 내부는 인과성 필터 $G(z)$ 의 구현을 나타낸다.

그림에서 L은 IIR 필터 $G(z)$ 의 유효충격응답의 길이를 나타내며 스위치는 매 L 표본마다 동작한다. 또한 두개의 $G(z)$ 는 매 2L 표본마다 다시 초기화된다. 이 시스템에서는 먼저 입력 신호가 길이 L의 유한한 구간으로 나누어져서 LIFO에 의해 순서가 뒤바뀐 후 $G(e^{j\omega})$ 에 의해 필터링된다.

그 후 필터링 된 신호가 적당한 지연을 거친 후 재 조합되고 다시 LIFO에 의해 순서가 뒤바뀜으로써 최종 출력 신호를 얻게 된다.

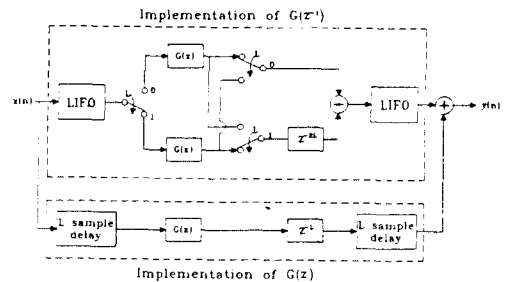


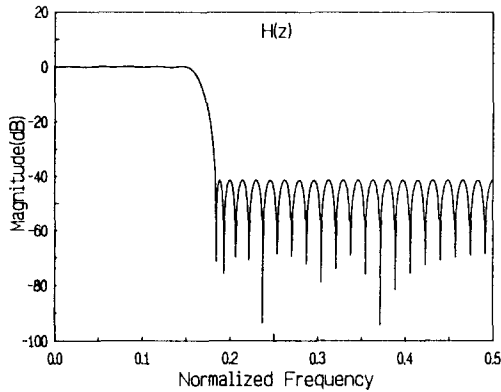
그림 2. 제안된 방법으로 설계된 필터의 구현
Fig. 2. Implementation of a filter designed by the proposed method.

IV. 필터의 성능 비교

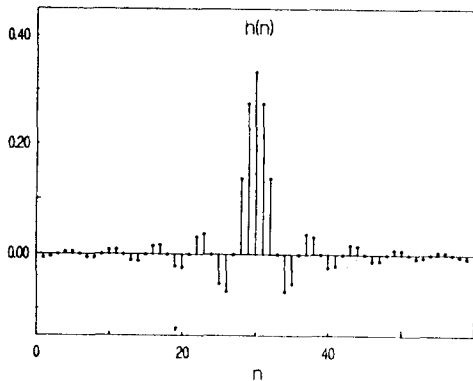
본 절에서는 몇가지 설계 예를 통하여 제안된 나이퀴스트 필터의 성능을 기존의 FIR 나이퀴스트 필터와 비교해보도록 하겠다. 설계 예에서는 저지대역오차 $A_s = 40\text{dB}$ 에 대해 $N = 3, 5$ 의 두가지 경우를 다루며, 각 경우에 대해 $\rho = 0.1$ 과 $\rho = 0.05$ 의 두가지 롤오프율의 경우를 다룬다. 실험을 통해 제안된 필터와 FIR 필터를 크기 특성, 충격응답 특성, 필터의 차수 및 곱셈기의 수, 계수 양자화에 의한 크기 특성의 변화 등의 관점에서 비교한다. 실험에 사용된 선형위상 FIR 나이퀴스트 필터는 Saramaki와 Neuvo의 방법에 의해 설계된 것이다.¹⁶⁾

예 1. $N = 3, \rho = 0.1/0.05, A_s = 40\text{dB}$ 인 선형 위상 나이퀴스트 필터

먼저 $\rho = 0.05$ 인 경우에 대해 살펴보자. 이 경우 통과대역과 저지대역의 차단주파수는 식 (3)에 의해 각각 0.158과 0.175가 된다. 설계된 FIR 나이퀴스트



(a)



(b)

그림 3. FIR 나이퀴스트 필터 ($N = 3, \rho = 0.05, A_s = 40\text{dB}$)

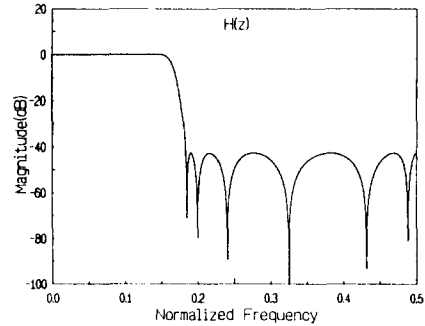
(a) 크기 특성 (b) 충격응답 특성

Fig. 3. FIR Nyquist filter with $N = 3, \rho = 0.05$, and $A_s = 40\text{dB}$.

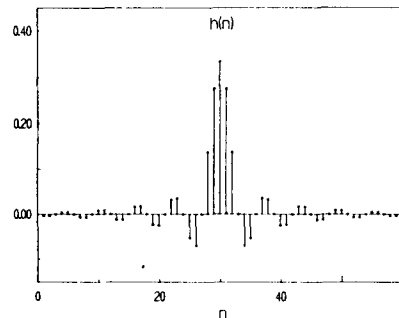
(a) Magnitude response.

(b) impulse response.

트 필터의 크기 특성은 그림 3(a)와 같으며 충격응답은 그림 3(b)와 같다. 이에 대응하는 제안된 IIR 나이퀴스트 필터의 특성은 그림 4(a), (b)에 주어져 있다. 이 그림으로부터 두 경우의 크기 특성과 충격응답 특성이 매우 유사함을 알 수 있다. $\rho = 0.1$ 의 경우에 대해서도 비슷한 결과를 얻을 수 있었다.



(a)



(b)

그림 4. IIR 나이퀴스트 ($N=3, \rho=0.05, A_s = 40\text{dB}$)

(a) 크기 특성 (b) 충격응답 특성

Fig. 4. IIR Nyquist filter with $N=3, \rho=0.05$, and $A_s = 40\text{dB}$.

(a) Magnitude response.

(b) impulse response.

표 1. $N = 3$, $A_s = 40\text{dB}$ 인 경우의 FIR과 IIR 선형위상 나이퀴스트 필터의 비교

Table 1. Comparison of FIR and IIR Nyquist filters with $N = 3$ and $A_s = 40\text{dB}$.

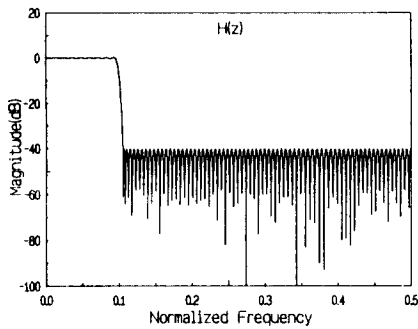
ρ	필터 형태	필터 차수 $H(z)$	곱셈기의 수
0.1	FIR(6)	58	41
	IIR(제한된 방법)	12	21
0.05	FIR(6)	112	77
	IIR(제한된 방법)	14	24

표 1은 실험에 사용된 나이퀴스트 필터의 차수를 보여준다. $\rho = 0.05$ 의 경우 필터의 차수는 FIR과

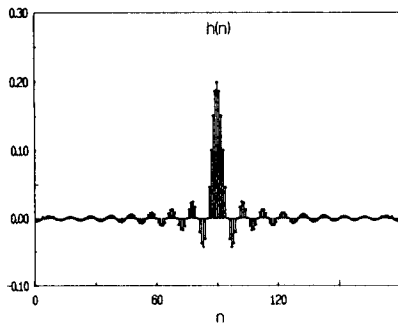
IIR에 대해 각각 112차와 14차였다. 이에 해당하는 곱셈기의 수는 FIR의 경우 충격응답에 규칙적으로 존재하는 0에 의해 77개가 되지만 IIR의 경우에는 필터 차수가 7인 $G(z)$ 세개가 필터 구현시에 사용되기 때문에 곱셈기의 수가 21개가 된다. $\rho = 0.1$ 의 경우에도 비슷한 결과를 얻을 수 있었으며, 필터 차수는 FIR과 IIR에 대해 각각 58차와 12차였고 곱셈기의 수는 각각 41개와 21개였다.

예 2. $N = 5$, $\rho = 0.1/0.05$, $A_s = 40\text{dB}$ 인 선형 위상 나이퀴스트 필터

이 예에서도 먼저 $\rho = 0.05$ 인 경우에 대해 살펴본다. 이 경우 통과대역과 저지대역의 차단주파수는 각각 0.095와 0.105이다. 설계된 FIR 나이퀴스트 필터의 크기 특성과 충격응답 특성이 각각 그림 5(a).



(a)

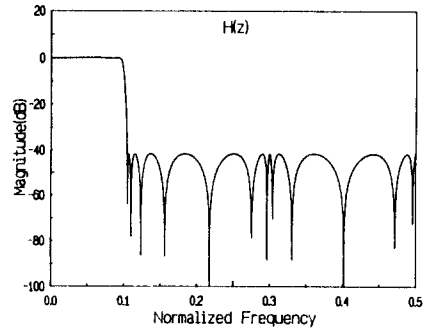


(b)

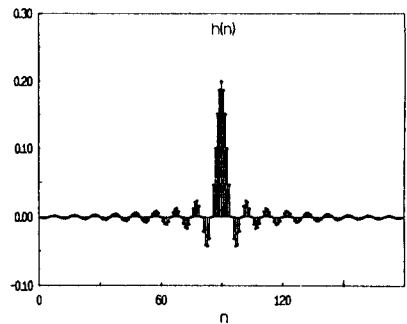
그림 5. FIR 나이퀴스트 필터 ($N=5$, $\rho = 0.05$, $A_s = 40\text{dB}$) (a) 크기 특성 (b) 충격응답 특성

Fig. 5. FIR Nyquist filter with $N=5$, $\rho = 0.05$, and $A_s = 40\text{dB}$.

(a) Magnitude response
(b) impulse response



(a)



(b)

그림 6. IIR 나이퀴스트 필터 ($N = 5$, $\rho = 0.1/0.05$, $A_s = 40\text{dB}$)

(a) 크기 특성 (b) 충격응답 특성

Fig. 6. IIR Nyquist filter $N = 5$, $\rho = 0.1/0.05$, and $A_s = 40\text{dB}$.

(a) Magnitude response
(b) impulse response.

(b)에 있으며, 이에 대응하는 제안된 IIR 나이퀴스트 필터의 특성이 각각 그림 6(a), (b)에 있다. 예 1에서와 마찬가지로 FIR과 IIR의 크기 특성 및 충격 응답 특성이 매우 유사함을 알 수 있다. $\rho = 0.1$ 인 경우에 대해서도 비슷한 결과를 얻을 수 있었다.

표 2는 실험에 사용된 나이퀴스트 필터의 차수를 보여준다. $\rho = 0.05$ 의 경우 필터의 차수는 FIR과 IIR에 대해 각각 178차와 24차였고 곱셈기의 수는 각각 145개와 39개였다. $\rho = 0.1$ 의 경우에도 비슷한 결과를 얻을 수 있었으며, 필터 차수는 FIR과 IIR에 대해 각각 92차와 20차였고 곱셈기의 수는 각각 75개와 33개였다.

표 2. $N = 5, A_s = 40\text{dB}$ 인 경우의 FIR과 IIR 선형 위상 나이퀴스트 필터의 비교

Table 2. Comparison of FIR and IIR Nyquist fillters with $N = 5$ and $A_s = 40\text{dB}$.

ρ	필터 형태	필터 차수 $H(z)$	곱셈기의 수
0.1	FIR(6)	92	75
	IIR(제안된 방법)	20	33
0.05	FIR(6)	178	145
	IIR(제안된 방법)	24	39

예 3. $N = 4, \rho = 0.15, A_s = 33\text{dB}$ 인 나이퀴스트 필터

이 예에서는 [7]에 주어진 것과 같은 규격에 대해 살펴본다. 이 경우 통과대역과 저지대역의 차단주파수는 각각 0.10625와 0.14375이다. 표 3은 실험에 사용된 나이퀴스트 필터의 차수를 보여준다. 두 IIR 나이퀴스트

표 3. $N = 4, \rho = 0.15, A_s = 33\text{dB}$ 인 경우의 FIR과 IIR 나이퀴스트 필터의 비교

Table 3. Comparison of FIR and IIR Nyquist fillters with $N = 4, \rho = 0.15$, and $A_s = 33\text{dB}$.

ρ	필터 형태	필터 차수 $H(z)$	곱셈기의 수
0.15	FIR(6)	38	30
	IIR(7)	17	16
	IIR(제안된 방법)	12	18

트 필터는 모두 FIR 나이퀴스트 필터에 비해 차수가 낮으며, 제안된 IIR 필터가 가장 차수가 낮음을 알 수 있다. 곱셈기의 수에서는 제안된 선형 위상 IIR 나이퀴스트 필터가 기존의 IIR 필터에 비해 약간 많은 곱셈기를 필요로 하지만, 이는 기존의 IIR 나이퀴스트 필터가 비선형 위상 특성을 가지기 때문이다. 이제 계수 양자화에 의한 필터 특성의 변화를 살펴보자. 그림 7은 $N=5, \rho=0.05$ 인 경우에 대해 양자화 비트수에 따른 저지대역 최소오차의 크기를 보여준다. 그림으로부터 제안된 필터의 경우가 더 작은 비트수로도 주어진 특성을 만족함을 알 수 있다. 즉, 제안된 필터의 경우에는 13 비트부터 $A_s=40\text{dB}$ 를 만족시키지만 FIR 나이퀴스트 필터의 경우에는 19비트부터 이 값을 만족시키게 된다.

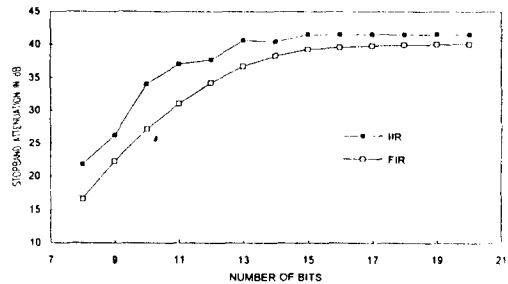


그림 7. 양자화 비트수에 대한 IIR 나이퀴스트 필터의 특성 ($N = 3, \rho = 0.05, A_s = 40\text{dB}$)

Fig. 7. Minimum stopband attenuation versus the number of bits. (with $N = 3, \rho = 0.05$, and $A_s = 40\text{dB}$)

V. 결론

본 논문에서는 먼저 기존의 나이퀴스트 필터의 설계 방법을 고찰한 후 선형 위상 IIR 나이퀴스트 필터를 설계하는 새로운 방법을 제안하였다. 이를 위하여 영위상 IIR 나이퀴스트 필터를 위한 두가지 가능한 구현 방법을 살펴보고 병렬 연결이 더 적합한 구현 방법이라는 결과를 얻었다. IIR 나이퀴스트 필터의 설계에는 순환적 방법이 사용되었고 매 순환 단계에는 Remez 교환 방법을 수정한 설계 방법이 사용되었다. 제안된 방법은 Nakayama와 Mizukami의 나이퀴스트 필터식에 기반을 두고 있기 때문에 계수 양자화시에도 충격 응답에 규칙적으로 0이 존재하는 특성이 보존되며, 전체 구조는 인과성 필터 $G(z)$ 와 비인과성 필터 $G(z^{-1})$ 가 병렬로 연결된 형태이기 때문에 선형 위상을 가지게 된다. 또한 IIR 필터의 특성상

설계된 필터는 매우 작은 롤오프율에 대해서도 낮은 차수를 가지게 된다. 몇가지 예를 통하여 제안된 IIR 나이퀴스트 필터가 위에서 언급한 여러 특성들을 실제로 지니고 있음을 보였다. 즉, 필터 충격응답에 규칙적으로 0이 존재하며 필터의 차수가 FIR 필터에 비해 낮음을 확인할 수 있었다. 또한 양자 계수화가 필터의 크기 특성에 미치는 영향을 살펴보았다.

Powell-Chau가 제안한 LIFO 기반 구현의 근본적인 한계는 그룹 지연이 유효 충격 응답 길이의 세 배, 즉 $3L$ 이 된다는 것이다. 이것은 구현된 IIR 나이퀴스트 필터가 선형 위상 특성을 가지도록 하기 위한 댓가로 볼 수 있다. 결과적으로, 제안한 방법의 응용은 실시간 교신성 신호처리 분야에 대해서는 제한되지만, 지연이 처리(processing)에 의한 것이 아니고 잠복기(latency)에 의한 것이기 때문에 실시간 분배성 신호처리 분야나 방송 신호처리 분야 등에서는 제한없이 사용할 수 있다.

參 考 文 獻

- [1] H. Samuelli, "On the design of optimal equiripple FIR digital filters for data transmission applications," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-35, pp. 1542-1546, Dec. 1988.
- [2] J. K. Liang, R. J. P. de Figueirido, and F. C. Lu, "Design of optimal Nyquist, partial response, Nth band, and nonuniform tap spacing FIR digital filters using linear programming techniques," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-32, pp. 386-392, Apr. 1985.
- [3] P. P. Vaidyanathan and T. Q. Nguyen, "Eigenfilters: A new approach to least-squares FIR filter design and applications including Nyquist filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-34, pp. 11-23, Jan. 1987.
- [4] F. Minzer, "On half-band, third-band, and Nth-band FIR filters and their design," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-30, pp. 734-738, Oct. 1982.
- [5] P. P. Vaidyanathan and T. Q. Nguyen, "A "trick" for the design of FIR half-band filters," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-34, pp. 297-300, Mar. 1987.
- [6] T. Saramaki and Y. Neuvo, "A class of FIR Nyquist (Nth-band) filters with zero intersymbol interference," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-34, pp. 1182-1190, Oct. 1987.
- [7] K. Nakayama and T. Mizukami, "A new IIR Nyquist filter with zero intersymbol interference and its frequency response approximation," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. CAS-29, pp. 23-34, Jan. 1982.
- [8] D. Y. Kim and B. G. Lee, "On the design of 1-D and 2-D Nyquist filters," in Proc. ISPACS(Taipei), Mar. 1992, pp. 108-122.
- [9] E. W. Cheney, *Introduction to approximation theory*, McGraw-Hill, 1966.
- [10] S. R. Powell and P. M. Chau, "A technique for realizing linear phase IIR filters," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 39, no. 11, pp. 2425-2435, Nov. 1991.

著 者 紹 介



孟 勝 柱(正會員)

1969年生. 1991年 2月 서울대학교 전자공학과 졸업. 1993年 2月 서울대학교 대학원 전자공학 공학석사학위 취득. 현재 서울대학교 대학원 전자공학과 박사과정 재학중. 주관심 분야는 디지털 신호처리 및 적응 신호처리 등임.

李 秉 基(正會員) 第31卷 B編 第1號 參照

현재 서울대학교 전자공학과 부교수