

論文94-31B-8-5

미지입력이 존재하는 선형 이산 확률 시스템의 최소 분산 고장 진단 필터의 설계

(Design of Minimum Variance Fault Diagnosis Filter for Linear Discrete-Time Stochastic Systems with Unknown Inputs)

李在 燮*, 卞 增 男*

(Jae-Hyeok Lee and Zeungnam Bien)

要約

잡음과 미지입력이 존재하는 선형 이산 확률 시스템에 대한 상태 추정 필터를 제안하고 제안된 필터를 응용하여 선형 이산 확률 시스템의 상태 벡터, 구동기와 감지기의 고장 크기를 정확하게 추정하는 고장 진단 필터를 제안한다. 각필터들에 대한 안정 조건과 설계 방법을 제시하며 제안된 고장 진단 필터를 이용하여 모니터링 기능 및 고장 진단이 가능함을 수치 예제를 통하여 확인하였다.

Abstract

In this paper, a state reconstruction filter for linear discrete-time stochastic systems with unknown inputs and noises is presented. The suggested filter can estimate the system state vector and the unknown inputs simultaneously. As an extension of the filter, a fault diagnosis filter for linear discrete-time stochastic systems with unknown inputs and noises is presented. For each filter, the optimal gain determination methods which minimize the variance of the state reconstruction error are presented. Finally, the usability of the filter is shown via numerical examples.

I. 서론

산업 공정등에서 신뢰도 향상을 위하여 고장 진단에 대한 관심이 높아지고 있다. 실제로 분산 제어 공정 제어 시스템 (DCS: distributed control system)의 경우에는 중앙 제어 장치부를 이중화하여 신뢰도를 높이고자 하고 있다. 즉 시스템 내부에 고

장이 발생하여도 정확한 진단을 하고 적절한 조치를 취하여 원래의 시스템 기능을 계속하는 제어 시스템을 구성하고 있다. 이러한 시스템을 내고장성 제어 시스템(fault tolerant control system)이라고 한다.

제어기(controller) 부분은 많은 경우 공정 제어 시스템의 제작사에서 이중화하여 제어 컴퓨터의 자체 고장에 대하여 대응 방안을 갖추고 있으나 구동기(actuator)와 감지기(sensor)의 경우에는 이중화 작업이 어려운 형편이다. 그 이유는 경제적인 부담이 너무 크기 때문이다. 플랜트의 모든 공정 기기를 이

*正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科

(Dept. of Elec. Eng., KAIST.)

接受日字: 1993年 12月 6日

중화한다는 것은 거의 불가능하기 때문이다. 따라서 본 논문에서는 시스템의 구동기와 감지기의 고장 진단에 초점을 맞추었다. 이를 위하여 시스템의 모델을 이용하였으며 이러한 방법을 해석적 중복 구조(analytic redundancy)라고 한다. 해석적 중복 구조를 이용한 연구는 많은 문헌에서 찾을 수 있다.^[1,2]

일반적으로 고장 진단은 편차 생성(residual generation) 과정과 고장 판단(decision making) 과정을 거치는데 편차 생성은 실제 측정 값과 해석적 중복 구조의 값을 비교하여 고장 발생시영이 아닌 값이 되게 하는 것이다. 이 방법으로는 패리티 공간(parity space)을 사용하는 방법^[3,4], 고장 검출 필터(fault detection filter)의 사용 방안^[5,6], 필터 뱅크를 사용하는 방법^[7,8], 파라미터 추정에 기초한 방법^[9], 고장 진단 관측기를 이용한 방법^[10] 등이 있으며 두 번째 단계는 생성된 편차로부터 고장에 대한 정보를 얻어내는 단계이다.

기존의 이러한 해석적 방법에 의한 고장 진단은 모두 시스템에 대한 외란이나 불확실성의 영향은 고려하지 않고 정확한 모델을 기반으로 고장 진단을 하고 있으며 불확실성을 고려한 경우도 단지 고장 검출(detection)수준에 머물러 고장의 위치나 크기를 추정하는 진단(diagnosis) 역할을 못하고 있는 상황이다.

한편 저자들은^[11]에서 외란과 구조적 불확실성이 미지입력으로 기술되는 것을 보였으며 이런 미지입력이 있는 시스템에 대하여 시스템의 상태를 추정하는 미지입력 관측기와 고장진단 관측기를 제안하였다. 또한 제안된 각 관측기에 대하여 안정 조건(stabilitycondition), 극점 배치 방식에 의한 설계 방법, 존재 조건등을 유도하여 제시한 바 있다. 이 경우는 대상 시스템이 확정(deteministic) 시스템인 경우에 대하여 관측기를 설계하였으며 잡음이 없다고 가정을 하였다. 하지만 실제 산업 시스템처럼 잡음이 심한 곳이나 레이다의 표적 추적과 같이 잡음의 영향이 전체 시스템 성능에 크게 영향을 미치는 시스템 등에서는 칼만 필터와 같이 잡음의 특성을 고려한 최적 필터의 설계가 요구된다고 할 수 있다.

본 논문에서는 이와 같은 잡음이 심한 시스템의 경우, 참고문헌 [11]에서 제시한 관측기와 동일한 구조를 갖는 상태 추정 필터를 제시하며 이를 응용하여 미지입력이 존재하는 시스템의 구동기와 감지기의 고장 및 시스템의 상태등을 추정하는 고장 진단 필터를 제시한다. 또한 각 필터에 대하여 잡음에 의해 발생하는 상태 추정 오차의 분산을 최소화하는 최적 필터 이득 결정 방법을 제시하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 미지입력과 잡음이 존재하는 선형 이산 확률 시스템에 대하여 미지입력과 시스템상태를 동시에 추정하는 최소 분산 상태 추정 필터를 제안하고 3절에서는 이를 이용한 최소 분산 고장 진단 필터를 제안한다. 4절에서는 수치 예제를 통하여 효용성을 입증하고 5절에서 결론을 맺는다.

II. 최소 분산 상태 추정 필터

본 절에서는, 선형 이산 확률 시스템에 대한최소 분산 상태 추정 필터를 제시한다. 즉 칼만 필터와 같이 시스템이 잡음이 심한 경우잡음의 영향을 최소로 하는 최적 필터를 구하는 방법을 제시한다.

다음과 같이 잡음이 있는 존재하는 시스템을 생각 하자.

$$x(t) = Ax(t-1) + Bu(t-1) + Dd(t-1) + v(t-1) \quad (1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + w(t) \quad (1b)$$

여기서는 $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^k$, $d(t) \in \mathbf{R}^q$, $y(t) \in \mathbf{R}^p$, 각각 상태 벡터, 입력 벡터, 미지입력 벡터, 출력 벡터를 나타낸다. A, B, C, D 는 정당한 크기를 갖는 알려진 행렬이다. $Rank(D) = q$ 와 $Rank(C) = q$ 또 $Rank(CD) = q$ 를 가정하였다. 가정 $Rank(CD) = q$ 은 일반적으로 미지입력을 추정하기 위해 필요한 조건이다.

여기서 $v(t), w(t)$ 는 이산시간 정상 독립 잡음(discrete-time stationary independent white noise)로 평균이 0 인 가우스 백색 잡음(gaussian white noise)으로 가정하였다. 또한, 분산은 다음과 같다.

$$E\{v(t-1)v(t-1)^T\} = R_1, \quad E\{w(t-1)w(t-1)^T\} = R_2.$$

여기서 $E\{\cdot\}$ 는 기대값(expectation) 연산을 의미한다.

제안된 최소 분산 상태 추정 필터는 다음과 같다.

$$\bar{x}(t) = \hat{x}(t) + D\hat{d}(t-1) \quad (2a)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (2b)$$

$$\hat{d}(t-1) = [CD]^* + [y(t) - \hat{y}(t)] \quad (2c)$$

여기서

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (2d)$$

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t-1) + Bu(t-1) + K(t-1)[y(t-1) - \hat{y}(t-1)] \quad (2e)$$

$$K(t-1) = AQ(t-1)C^T(R_2 + CQ(t-1)C^T)^{-1} \quad (2f)$$

$$Q(t) = PAQ(t-1)(PA)^T + PR_1P^T + D[CD]^* + R_2(D[CD])^T - PAQ(t-1)C^T[R_2 + CQ(t-1)C^T]^{-1}CQ(t-1)(PA)^T \quad (2g)$$

이다. 여기서 $\hat{d}(t-1)$ 는 미지입력에 대한 추정값이며 $x(t)$ 는 시스템 상태 벡터의 추정 벡터이다. $P = [I - \overline{D}(CD)^*C]$ 이며, 또한 *는 왼쪽 유사 역행렬(left pseudo-inverse)를 의미한다. 즉 $[CD]^* = [(CD)^T(CD)^{-1}(CD)^T]$ 이다. 전체적으로 [11]에서 제시한 구조의 필터이다. 단지 확정 시스템에 적용한 상수 이득 K 를 시변 이득 $K(t-1)$ 로 바꾸고 잡음의 특성을 고려한 최적 필터를 구현하여 미지입력과 상태 벡터를 추정하고 있다.

제안된 필터가 최소 분산 상태 추정 필터임을 다음에 보였다. 여기서 유도하는 과정은 [13]에서 칼만 필터의 이득을 유도하는 절차를 따랐다.

정리 1 식 (1)로 표현되는 선형 이산시간 확률 시스템에 대하여 식 (2)으로 표현된 상태 추정 필터를 구성하면, $[R_2 + CQ(t-1)C^T]$ 가 양의 한정 행렬이라면, 제안된 필터는 추정 오차를 최소화하는 최소 분산 상태 추정 필터이다.

[정리 1의 증명]

식(1)와 식(2)을 이용하여, 다음과 같이 추정예러 식을 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{e}_s(t) &= [A - K(t-1)C]\bar{e}_s(t-1) \\ &\quad + D\hat{e}_d(t-1) + v(t-1) - K(t-1)w(t-1) \\ &= PG(t-1)\bar{e}_s(t-1) + Pv(t-1) \\ &\quad - PK(t-1)w(t-1) - \Psi w(t) \\ &= [\hat{A} - \hat{K}(t-1)C]\bar{e}_s(t-1) + Pv(t-1) \\ &\quad - \hat{K}(t-1)w(t-1) - \Psi w(t) \end{aligned}$$

여기서 $\bar{e}_s(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ 로 상태 추정 오차 벡터이며, $\bar{e}_d(t) = d(t) - \hat{d}(t)$ 로 미지입력 추정 오차 벡터이다. 또한 $G(t-1) = A - K(t-1)C, \hat{A} = PA, \hat{K}(t-1) = PK(t-1), \Psi = D[CD]^*$ 이다. $v(t)$ 와 $w(t)$ 의 정상성(stationarity)과 독립성(independence)을 이용하여 분산 전파식(variance propagation equation)을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$Q(t) = E\{\bar{e}_s(t)\bar{e}_s(t)^T\} = [\hat{A} - \hat{K}(t-1)C]Q(t-1)[\hat{A} - \hat{K}(t-1)C]^T + PR_1P^T + \hat{K}(t-1)R_2\hat{K}(t-1)^T + \Psi R_2\Psi^T \quad (3)$$

윗 식을 다시 정리하며

$$\begin{aligned} &\hat{A}Q(t-1)\hat{A}^T + PR_1P^T + \Psi R_2\Psi^T - \hat{A}Q(t-1)C^T\Phi^{-1}CQ(t-1)\hat{A}^T \\ &+ [\hat{K}(t-1) - \hat{A}Q(t-1)C^T\Phi^{-1}]\Phi[\hat{K}(t-1) - \hat{A}Q(t-1)C^T\Phi^{-1}]^T \quad (4) \end{aligned}$$

여기서 Φ 는 $\Phi = R_2 + CQ(t-1)C^T$ 이다.

식(4)를 보면 크게 두 부분으로 나눌 수 있다. 처음 것은 $K(t-1)$ 와는 무관한 항들이며 두 번째 것은 $K(t-1)$ 의 함수로 이루어진 항이다. 또한 자세히 보면 Φ 가 양의 한정 행렬이므로, 두 번째 항이 양의 반한정(semi-definite) 행렬임을 알 수 있다. 따라서 식(4)의 두 번째 항이 영이 되도록 $K(t-1)$ 를 선택하면, 선택된 $K(t-1)$ 가 분산을 최소화하는 최적 이득임을 알 수 있다. 따라서 최적 필터 이득과 분산 전파 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} K(t-1) &= AQ(t-1)C^T(R_2 + CQ(t-1)C^T)^{-1} \\ Q(t) &= PAQ(t-1)(PA)^T + PR_1P^T + D[CD]^*R_2(D[CD])^T \\ &\quad - PAQ(t-1)C^T[R_2 + CQ(t-1)C^T]^{-1}CQ(t-1)(PA)^T \end{aligned}$$

증명 끝

III. 최소 분산 고장 진단 필터

본 절에서는 잡음이 심한 시스템에 적용할 경우, 잡음의 영향을 최소화하여 최적 고장 진단 필터를 구성하는 방법은 제시한다. 이를 위하여 먼저 본 절에서 이용될 연산을 몇 가지 정의한다.

행렬 $K \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 의 행 벡터를 K_1, K_2, \dots, K_q 와 같이 표기한다. $\text{vec}(K)$ 는 행렬 K 로부터 다음과 같은 벡터를 생성하는 연산이다.

$$\text{vec}(k) = \begin{bmatrix} K_{\cdot 1} \\ K_{\cdot 2} \\ \vdots \\ K_{\cdot q} \end{bmatrix}$$

또한 $\text{mat}(k, n)$ 는 벡터 $k \in \mathbb{R}^{nq}$ 로부터 다음과 같은 행렬 $K \in \mathbb{R}^{n \times q}$ 를 생성하는 연산이다.

$$\text{mat}(k, n) = [k(1:n)k(n+1:2n)\dots k((q-1)n+1:qn)]$$

여기서 $k(i:j)$ 는 벡터 k 의 i 번째 요소부터 j 번째 요소까지 뽑아서 만든 새로운 벡터이다. 예로 $\text{mat}(\text{vec}(K), n)$ 는 K 자신이 된다.

두 행렬 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{r \times s}$ 에 대한 크로네커 곱(Kronecker product)은 $A \otimes B$ 로 표시되고 다음과 같이 정의된다. (Graham^[14])

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

행렬 Φ 를 $\Phi = R_2 + CQ(t-1)C^T$ 로 하자. 여기서 $Q(t-1)$ 는 추정에러의 분산 행렬이다. 즉 $Q(t-1) = E\{\bar{e}_x(t-1)\bar{e}_x(t-1)^T\}$ 이다 만일 Φ 가 양 한정 행렬이면 콜레스키 분리법 (Cholesky decomposition)을 이용하여 $\Phi = A^T A$ 로 분리할 수 있다. 여기서 A 는 비특이(nonsingular) 행렬이다. (Goldberg^[15])

다음과 같이 미지입력, 고장과 잡음이 존재하는 시스템을 생각하자.

$$x(t) = Ax(t-1) + Bu(t-1) + Dd(t-1) + F\lambda(t-1) + v(t-1) \quad (5a)$$

$$y(t) = Cx(t) + e\gamma(t) + w(t). \quad (5b)$$

여기에서 $F\lambda(t)$ 는 구동기 고장을 나타내며 $E\gamma(t)$ 는 감지기 고장들을 나타낸다. 여기에서 구동기의 고장벡터와 방향행렬을

$$\lambda(t) = [\lambda_1(t) \lambda_2(t) \dots \lambda_l(t)]^T \\ F = [f_1 f_2 \dots f_l]$$

로 정의한다. 감지기 고장의 경우에는

$$\gamma(t) = [\gamma_1(t) \gamma_2(t) \dots \gamma_m(t)]^T \\ E = [e_1 e_2 \dots e_m]$$

로 정의한다. F, E 는 알려진 행렬이며 B, C 행렬의 행벡터와 관련있다. 여기서 구동기의 고장 가능 부위를 l 개, 감지기의 고장 가능 부위를 m 개로 가정하였다.^[11] 또 $\text{Rank}([CD CF E]) = (q+l+m)$ 를 가정하였다 이는 각각의 신호가 출력을 통하여 구별됨 (output separability)을 의미한다.

제안된 최소 분산 고장 진단 필터는 다음과 같다.

$$\bar{x}(t) = \hat{x}(t) + D\hat{d}(t-1) + F\hat{\lambda}(t-1) \quad (6a)$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + E\hat{\gamma}(t) \quad (6b)$$

여기서

$$\hat{d}(t-1) = W_d[y(t) - \hat{y}(t)] \quad (6c)$$

$$\hat{\lambda}(t-1) = W_l[y(t) - \hat{y}(t)] \quad (6d)$$

$$\hat{\gamma}(t) = W_m[y(t) - \hat{y}(t)] \quad (6e)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (6f)$$

$$\hat{x}(t) = A\hat{x}(t-1) + Bu(t-1) + K(t-1)[y(t-1) - \bar{y}(t-1)] \quad (6g)$$

$$\begin{bmatrix} W_d \\ W_l \\ W_m \end{bmatrix} = [CDCF E] +$$

이다. $\hat{\lambda}(t-1), \hat{\gamma}(t)$ 는 각각 구동기, 감지기의 고장 추정 벡터이다.

또한 $K(t-1)$ 는 다음과 같은 절차에 의해 결정된다.

$$s(t-1) = \text{vec}(\bar{P}AQ(t-1)C^T\Lambda^{-1}) \quad (7a)$$

$$k(t-1) = V_1 \sum_0^{-1} U_1^T s(t-1) \quad (7b)$$

$$K(t-1) = \text{mat}(k(t-1), n) \quad (7c)$$

여기서

$$Q(t) = (\bar{P}A - \bar{P}K(t-1)MC)Q(t-1)(\bar{P}A - \bar{P}K(t-1)MC)^T \\ + \bar{P}R_1\bar{P} + \bar{P}K(t-1)MR_2(\bar{P}K(t-1)M)^T + \bar{F}WR_3(\bar{F}W)^T \quad (7d) \\ \bar{P} = I - \bar{F}WC$$

$$M = I - EW_m$$

$$\bar{F} = [DF]$$

$$W = \begin{bmatrix} W_d \\ W_l \\ W_m \end{bmatrix}$$

이다.

$$H = ((I - EW_m)\Lambda^T)^T \otimes (I - [DF]) \begin{bmatrix} W_d \\ W_l \\ W_m \end{bmatrix} C$$

여기서 증명에 쓰일 행렬 하나를 정의한다. 행렬 H 의 정의는 다음과 같다.

$$H = U \sum V^T = [U_1 U_2] \begin{bmatrix} \sum_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [V_1 V_2]^T$$

또 특이값 분리법(singular value decomposition)의 결과는 다음과 같다.

여기서 Σ_0 는 비특이 행렬이다. (Skelton^[16])

다음 결과는 제안된 필터가 최소 분산 필터임을 보여준다.

정리 2 식(5)으로 표현되는 이산시간 확률 시스템에 대하여식(6)과 같은 고장 진단 필터를 구성하면, 행렬 $[R_2 + CQ(t-1)C^T]$ 가 양 한정 행렬일 때, 식(7)로 결정되는 이득 행렬을 사용하는 경우 최소 분산 고장 진단 필

터가 구성된다.

[정리 2의 증명]

식(5), 식(6)를 이용하여 추정 에러식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{e}_s(t) = & (A - K(t-1)C)\bar{e}_s(t-1) + \bar{F}\hat{e}_u(t-1) + v(t-1) \\ & - K(t-1)E\hat{e}_m(t-1) - K(t-1)w(t-1). \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\hat{e}_u(t-1)$ 은 다음과 같다.

$$\hat{e}_u(t-1) = \begin{bmatrix} \hat{e}_d(t-1) \\ \hat{e}_r(t-1) \end{bmatrix}.$$

즉 식 표현을 간단하게 하기 위해 미지입력과 구동기 고장을 함께 표현한다.

식(6c)-식(6e)에서, 고장에 대한 추정 에러 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{e}_u(t-1) = & -WC(A - K(t-1)C)\bar{e}_r(t-1) - WC_r(t-1) \\ & + WCK(t-1)E\hat{e}_m(t-1) + WCK(t-1)w(t-1) - Ww(t) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\hat{e}_m(t-1) = -W_m C \hat{e}_s(t-1) - W_m w(t-1). \quad (10)$$

식(8)-식(10)를 이용하여 최종 추정 에러식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{e}_s(t) = & (I - \bar{F}WC)(A - K(t-1)[I - EW_m]C)\bar{e}_s(t-1) \\ & + (I - \bar{F}WC)v(t-1) - (I - \bar{F}WC)K(t-1) \\ & (I - EW_m)w(t-1) - \bar{F}Ww(t). \end{aligned} \quad (11)$$

행렬 \hat{A} 와 $\hat{K}(t-1)$ 를 다음과 같이 정의하자

$$\hat{A} = \bar{P}A, \hat{K}(t-1) = \bar{P}K(t-1)M.$$

앞에서 정의한 \bar{P} 와 M 을 이용하여, 식(11)를 좀 더 간단히 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{e}_s(t) = & (\hat{A} - \hat{K}(t-1)C)\bar{e}_s(t-1) + \bar{P}v(t-1) \\ & - \hat{K}(t-1)w(t-1) - \bar{F}W_m(t). \end{aligned} \quad (12)$$

추정 에러의 분산 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Q(t) = & E\{\bar{e}_s(t)\bar{e}_s(t)^T\} \\ & [\hat{A} - \hat{K}(t-1)C]Q(t-1)[\hat{A} - \hat{K}(t-1)C]^T \\ & + \bar{P}R_1\bar{P}^T + \hat{K}(t-1)R_2\hat{K}(t-1)^T + \bar{F}W_m(t)^T. \end{aligned} \quad (13)$$

식(13)은 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \hat{A}Q(t-1)\hat{A}^T + \bar{P}R_1\bar{P}^T + \bar{F}W_m(t-1)\bar{F}^T \\ & - \hat{A}Q(t-1)C^T\Phi^{-1}CQ(t-1)\hat{A}^T \\ & + [\hat{K}(t-1) - \hat{A}Q(t-1)C^T\Phi^{-1}]\Phi \\ & [\hat{K}(t-1) - \hat{A}Q(t-1)C^T\Phi^{-1}]^T. \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)를 보면 크게 두 부분으로 나눌 수 있다. 처음 것은 $K(t-1)$ 와는 무관한 항들이며 두 번째 것은 $K(t-1)$ 의 함수로 이루어진 항이다. 또한 자세히 보면 Φ 가 양의 한정 행렬이므로, 두 번째 항이 양의 반한정(semi-positive) 행렬임을 알 수 있다. 따라서 식(14)의 두 번째 항이 최소가 되도록 $K(t-1)$ 를 선택하면, 선택된 $K(t-1)$ 가 분산을 최소화하는 최적 이득임을 알 수 있다. 즉, 최소 분산 이득 결정 문제를 다음과 같이 변경할 수 있다.

$$\begin{aligned} \min_{K(t-1)} & \|[\hat{K}(t-1) - \hat{A}Q(t-1)C^T\Phi^{-1}]\Phi \\ & [\hat{K}(t-1) - \hat{A}Q(t-1)C^T\Phi^{-1}]^T\|. \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)으로 표현된 가중치가 곱해진 최소화 문제를 풀기 위해, 행렬 Φ 를 콜레스키 분리법을 이용하여 다음과 같이 분리한다.

$$\Phi = A^T A$$

따라서 식(15)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \min_{K(t-1)} & \|[\bar{P}K(t-1)M\Lambda^T - \bar{P}AQ(t-1)C^T\Lambda^{-1}] \\ & [\bar{P}K(t-1)M\Lambda^T - \bar{P}AQ(t-1)C^T\Lambda^{-1}]^T\|. \end{aligned} \quad (16)$$

크로네커 곱을 이용하여 아래식을

$$\bar{P}K(t-1)M\Lambda^T - \bar{P}AQ(t-1)C^T\Lambda^{-1}$$

다음과 같이 바꿀 수 있다. (Graham^[14])

$$Hk(t-1) - s(t-1)$$

여기서

$$\begin{aligned} H &= (M\Lambda^T)^T \otimes \bar{P} = vec \\ k(t-1) &= vec(K(t-1)) \\ s(t-1) &= vec(\bar{P}AQ(t-1)C^T\Lambda^{-1}) \end{aligned}$$

이다.

따라서 식(16)은 다음과 같이 잘 알려진 최소화 문

제로 바뀔 수 있다.

$$\min_{k(t-1)} \|Hk(t-1) - s(t-1)\|^2. \quad (17)$$

앞에서 미리 정의한 행렬 H 의 특이값 분리법을 이용하여 식(17)의 최적 이득 $k(t-1)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다. (Skelton^[16])

$$k(t-1) = V_1 \Sigma_0^{-1} U_1^T s(t-1). \quad (18)$$

따라서, 식(16)의 최적 이득 행렬은 다음과 같다.

$$k(t-1) = \text{mat}(k(t-1), r). \quad (19)$$

따라서, 행렬 $[R_2 + CQ(t-1)C^T]$ 가 양의 한정 행렬이고 이득 행렬이 식(7)와 같이 정해진 경우, 식(6), (7)에서 제시한 필터는 최소 분산 고장 진단 필터임을 알 수 있다. 증명 끝

IV. 수치 적용 예

예제 1 (최소 분산 상태 추정 필터) :

식(1)로 표현되는 시스템의 행렬이 다음과 같은 경우,

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.8 & -0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.95 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

R_1, R_2, Q 의 초기값이 다음과 같은 경우에 대하여 모의 실험을 수행하였다.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.05^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05^2 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 0.05^2 & 0 \\ 0 & 0.05^2 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5^2 \end{bmatrix}.$$

시스템의 초기치를 $x(t_0) = [1 \ 1 \ 1]^T$ 로 미지입력은 $d(t) = 0.5 + 0.2 \sin(0.02\pi t)$ 로 선정하였다.

그림 1은 제안된 필터에 의한 시스템 상태 벡터에 대한 추정 오차를 나타낸다. 잡음의 영향을 받기는 하였으나 시스템의 초기치를 모두 극복하고 미지입력에 무관하게 잘 추정하고 있다.

그림 2는 시스템에 가해진 미지입력의 추정값이다.

이 경우 역시 잡음의 영향을 받기는 하였으나 한 시스템 지연을 가지고 잘 추정하고 있음을 볼 수 있다.

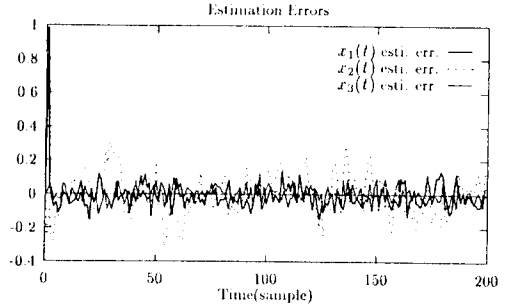


그림 1. 최소 분산 상태 추정 필터의 상태 추정 에러
Fig. 1. State estimation error of the minimum variance filter.

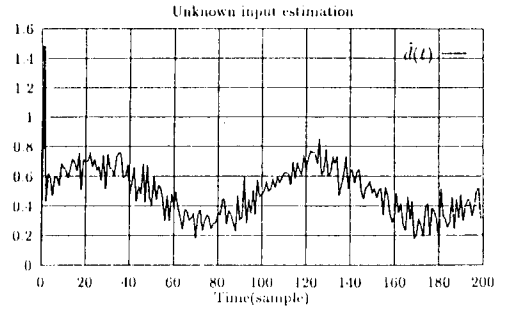


그림 2. 최소 분산 상태 추정 필터의 미지입력의 추정
Fig. 2. Unknown input estimation of the minimum variance filter.

예제 2 (최소 분산 고장 진단 필터) :

식(5)로 표현되는 확률적 시스템의 각 행렬값이 다음과 같은 시스템을 대상으로 모의 실험을 수행하였다.

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.9 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$R_1 = R_2 = \text{diag}(0.05^2, 0.05^2, 0.05^2, 0.05^2, 0.05^2),$$

Q 의 초기 값은 다음과 같이 가정하였다.

$$Q = \text{diag} (0.05^2, 0.05^2, 0.05^2, 0.05^2, 0.05^2,)$$

V. 결론

시물레이션을 쉽게 하기 위하여 C를 단위 행렬로 정하였다. 시스템의 초기치는 $x(t_0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ 이고 미지입력 $d(t) = 0.5 + 0.2 * \sin(2\pi t/100)$ 로 하였다. t=100 스텝에서 구동기 고장 $\lambda(t) = -0.5$. 감지기 고장 $\gamma(t) = 0.005t$ 가 각각 발생하였다.

그림 3 에서 $\hat{d}(t), \hat{\lambda}(t), \hat{\gamma}(t)$ 를 보였다. 잡음의 영향을 많이 받고 있기는 하지만 $\hat{d}(t)$ 와 $\hat{\lambda}(t)$ 는 실제보다 한 스텝뒤에 그 값을 추정하고 있으며 $\hat{\gamma}(t)$ 는 바로 고장을 진단하고 있다. 즉 $d(t)$ 에 무관하게 구동기 고장 $\lambda(t)$ 와 감지기 고장 $\gamma(t)$ 를 추정하고 있다.

그림 4 에서는 새로운 고장 진단 필터가 시스템 상태 벡터를 정확하게 따라감을 보여주고 있다역시 잡음의 영향을 많이 받고 있기는 하지만 그림에서 모두 초기치에 영향을 극복하고 영으로 가고 있으며 t=100 에서 고장이 발생하였으나 영향을 받지 않고 시스템 상태 벡터를 따라가는 것을 볼 수 있다.

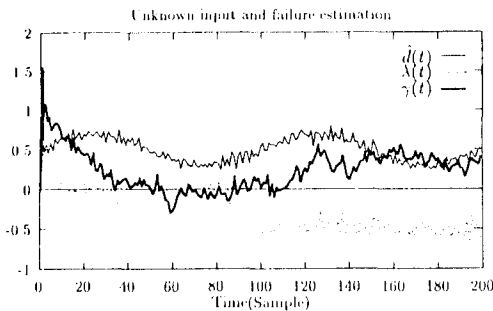


그림 3. 최소 분산 고장 진단 필터의 미지입력, 고장의 추정 값

Fig. 3. Unknown input, fault estimation of the fault diagnosis filter.

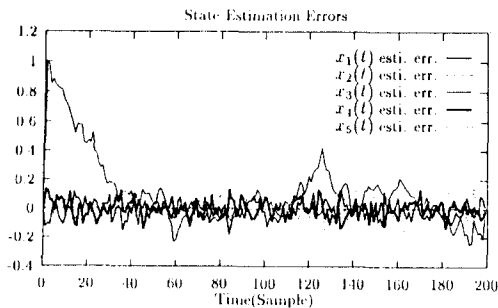


그림 4. 최소 분산 고장 진단 필터의 상태 추정 에러
Fig. 4. State estimation error of the fault diagnosis filter.

본 논문에서는 잡음의 영향이 심한 선형 이산 확률 시스템에 미지입력이 존재하는 경우에, 기존의 칼만 필터와 같이, 잡음의 특성을 고려하여 잡음의 영향으로 생기는 시스템의 상태 벡터 추정 오차의 분산을 최소화하는 최소 분산 상태추정 필터를 제안하였다. 제안된 필터는 기존에 제시한 확정 시스템에 대한 미지입력 관측기의 구조를 그대로 따르고 있으며 단지 시변 필터로 잡음의 영향을 최소화하는 시변 이득을 선정하였다. 제안된 필터는 시스템 상태뿐만 아니라 미지입력도 함께 추정할 수 있으며 미지입력에 대해서는 deadbeat 응답을 보이고 있다.

또한 제안된 상태 추정 필터를 응용하여 미지입력이 존재하는 선형 이산 확률 시스템의 구동기와 감지기의 고장을 추정하는 고장 진단 필터를 제안하였다. 제안된 고장 진단 필터에 대하여서도 역시 상태 벡터 추정 오차의 분산을 최소화시키는 최소 분산 필터 이득 결정 방법을 제시하였다. 제안된 상태 추정 필터와 고장 진단 필터의 각각에 대한 적용 가능성을 수치 예제를 통하여 확인하였다.

제안된 각 필터를 사용하면 잡음이 심한 시스템에 대하여 시스템 상태의 모니터링과 구동기 및 감지기에 대한 고장 진단등에 이용될 수 있다고 생각한다.

參考文獻

[1] P. M. Frank, "Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy - A survey and some new results," *Automatica*, vol.26, no.3, pp.459-474, Mar., 1990.

[2] A. S. Willsky, "A survey of design methods for failure detection in dynamic systems," *Automatica*, vol.12, no.6, pp.601-611, Nov., 1976.

[3] E. Y. Chow and A. S. Willsky, "Bayesian design of decision rules for failure detection," *IEEE Trans. Aero. and Elec. Sys.*, vol.20, no.6, pp.76-774, Nov., 1984.

[4] X. Lou, A. S. Willsky and G. C. Verghese, "Optimally robust redundancy relations for failure detection in uncertain systems," *Automatica*, vol.

- 22, no.3, pp.333-344, 1986.
- [5] M. A. Massoumnia, "A geometric approach to the synthesis of failure detection filters," *IEEE Automat. Contr.*, vol. 31, no. 9, pp.839-846, 1986.
- [6] J. E. White and L. Speyer, "Detection filter design: spectral theory and algorithms," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.32, no.7, pp.593-603, Jul., 1987.
- [7] R. Patton, P. Frank and R. Clark, *Fault diagnostics in dynamic systems : theory and application*, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1989.
- [8] N. Viswanadham and R. Srichander, "Fault detection using unknown-input observers," *Cont. Theo. and Adv. Tech.*, vol.3, no.2, pp.91-101, Jun., 1987.
- [9] R. Isermann, "Process fault detection based on modelling and estimation methods - A survey," *Automatica*, vol. 20, pp.387-404, Jul., 1984.
- [10] B. C. Moon and Z. Bien, "Failure detection, identification and accommodation based on a new accommodation filter." *Int. J. Sys. Sci.*, vol. 22, no. 6, pp. 1025-1034, 1991.
- [11] J. H. Lee and Z. Bien, "Fault diagnosis of linear discrete-time systems based on an unknown input observer," *Journal of KITE*, vol.28, no. 2, pp.35-44, 1994.
- [12] M. Hou and P. C. M "Design of observers for linear systems with unknown inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no.6, pp. 871-875, 1992.
- [13] K. J. Åstom and Wittenmark, B., *Computer controlled systems : theory and design*, (Englewood Cliffs : Prentice-Hall), Sec.11.3., 1984.
- [14] A. Graham, *Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications*, (Chichester: Ellis Horwood), Sec.3.7. 1981.
- [15] J. L. Goldberg, *Matrix Theory with Applications*, (New York : McGraw-Hill), 1992.
- [16] R. E. Skelton, *Dynamic Systems Control*, (New York : Wiley), Sec.2.8., 1988.

 著者紹介



李在燦(正會員)

1963年 2月 12日生. 1986年 서울대 공대 제어계측공학과 졸업. 1988年 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1994年 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학). 현재 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 연수연구원(Post-Doc.)

卞增男(正會員)

1943年 10月 11日生. 1969年 서울대 공대 전자공학과 졸업. 1972年 미국 Iowa대학 전기과 및 수학과 졸업. 1972年 Iowa대학 전기과 졸업(공학). 현재 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 교수