

論文94-31A-7-3

차동 복조 2-h 연속 위상 변조의 오류 확률

(The Error Rate Evaluation for Differential Demodulation of 2-h Continuous Phase Modulation)

尹東源*, 韓榮烈*

(Dong Weon Yoon and Young Yearl Han)

要約

연속 위상 변조 신호의 동기 복조 성능은 잘 알려져 있다. 그러나 동기 복조는 협대역 페이딩 채널 환경에서는 수신기에서 반송파 복원시 긴 초기 동기 시간이 요구되며 성능 저하를 가져오는 단점이 있다.

본 논문에서는 두개의 변조 지수 값을 갖는 연속 위상 변조 신호의 차동 복조 방법을 제안한다. 차동 부호화한 2-h CPM 신호의 차동 복조에 적절한 변조 지수 집합을 구하여 차동 복조 모델을 제시하고 가산성 백색 가우시안 잡음 환경에서 평균 비트 오류 확률을 유도하고 분석한다.

Abstract

The performance of continuous phase modulation signals is well known for the coherent demodulation. But the carrier recovery circuits of the coherent receiver have long acquisition time and the receiver experiences high error floors for fading channels.

In this paper, we propose the differential demodulation of 2-h continuous phase modulation signals. The sets of modulation indices of 2-h phase codes adequate to the differential demodulation for differentially encoded input are obtained and the average bit error probability in Additive White Gaussian Noise environments is derived and analyzed.

1. 서론

연속 위상 변조(Continuous Phase Modulation : CPM)는 정진폭 특성과 좋은 스펙트럼 효율 등으로 인하여 협대역 신호의 비선형 증폭이 요구되는 부분에서 적합한 방식으로 인정받고 있어^{[1], [2]} 디지털 이동 통신이나 위성 통신 분야에 이용할 수 있는 변조 방식이

다. 최근에는 CPM의 일종인 GMSK(Gaussian Minimum Shift Keying) 변조 방식이^[3] 유럽의 이동 통신 표준 변조 방식으로 채택되어졌다.

CPM의 복조 방법으로는 동기 복조 방법이 주로 연구되어 널리 알려져 있다.^[4] 그러나 동기 복조 방법은 이동 통신이나 위성 통신의 협대역 페이딩 채널 하에서는 반송파 복원 회로에서 긴 초기 동기 시간이 소요되는 등 수신기의 구조가 복잡해지고 성능 저하를 가져오는 단점이 있어^[5] 이러한 환경하에서는 수신기의 복잡성 등이 간략화 될 수 있는 차동 복조 방식의 도입이 유용하다.

여러 변조 지수를 갖는 multi-h CPM 신호는 신

*正會員, 漢陽 大學校 電子通信 工學科
(Dept. of Elec. Communication Eng.,
Han Yang Univ.)

接受日字 : 1993年 11月 18日

호 구간마다 변조 지수 h 값이 주기적으로 변화 하도록 되어 있는데 이로 인하여 multi-h CPM 신호는 비트 단위의 차동 복조를 행하게 되면 신호의 크기가 일정하게 검출되지 않는다.

본 논문에서는 두개의 변조 지수를 갖는 2-h CPM 신호의 경우에 차동 복조시 신호의 크기가 일정하게 유지 되도록 변조 지수 값을 정하고 이에 맞는 차동 복조 모델을 제시하여 비트 단위의 차동 복조가 가능하도록 하며 가산성 백색 가우시안 잡음(Additive White Gaussian Noise : AWGN) 상에서의 평균 비트 오류 확률을 계산하여 급수전개 형태로 유도하고 변조 지수 값이 1/2 일 때 DMSK(Differential Minimum Shift Keying)의 오류 확률 식과 같음을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 차동 복조에 알맞은 2-h CPM 시스템 모델을 제시하고 3장에서는 AWGN 상에서 평균 비트 오류 확률을 유도하며 4장에서 결론을 맺는다.

II. 시스템 모델

2-h CPM 신호는 변조 지수 h_1 과 h_2 가 비트 지속 시간 T 마다 교대로 변화하는데 이 경우 k 번째 신호 구간에서 변조 신호는 다음 식으로 표시된다.

$$S_k(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)] \quad (2.1)$$

여기서 E는 비트 에너지, T는 비트 지속 시간이며 $\phi(t)$ 는 정보 비트를 포함하는 위상 함수로서

$$\phi(t) = \frac{a_k h_k \pi}{T} t + \phi_k, \quad (k-1)T \leq t \leq kT \quad (2.2)$$

로 표현되며 여기서 a_k 는 정보 비트이고 h_k 는 변조 지수 ϕ_k 는 과도 위상 (excess phase)으로

$$\phi_k = \pi \sum_{i=0}^{k-1} a_i h_i, \quad \phi_0 = 0 \quad (2.3)$$

이다.

그림 2.1에는 2-h CPM의 차동 복조를 위한 송신기 모델을 나타내었다.

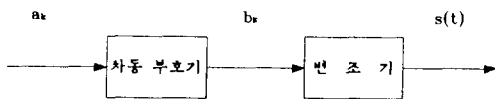


그림 2.1 차동 복조를 위한 2-h CPM 송신기 블록도
Fig. 2.1 Block diagram of 2-h CPM transmitter for differential demodulation

수신단에서 2T 지연 차동 복조를 하려면 송신단에서 변조전에 정보열 a_k 를 차동 부호화를 행하여야 하는데 그 과정은 다음 식으로 표시된다.

$$b_k = -b_{k-1} \cdot a_k \quad (2.4)$$

여기서 a_k 는 메시지 신호이며 b_k 는 차동 부호화한 신호이다. 표 2.1에는 2T 시간 동안의 데이터에 따른 위상차를 나타내었다.

표 2.1 2h-CPM 신호의 2T 시간 동안의 위상차
Table 2.1 2T duration phase difference of $2 \times h$ CPM signal

b_k	b_{k-1}	a_k	$\Delta\phi = (b_{k-1}h_1 + b_k h_2) \pi$
-1	-1	-1	$-(h_1+h_2) \pi$
1	1	-1	$(h_1+h_2) \pi$
-1	1	1	$(h_1-h_2) \pi$
1	-1	1	$-(h_1-h_2) \pi$

표 2.1로 부터 차동 부호화한 2-h CPM 신호의 차동 복조에 적합한 변조 지수 $\{h_1, h_2\}$ 는 2T 구간 동안의 위상차로부터 얻을 수 있다.

먼저 h_1 다음에 $+h_2$ 와 $-h_2$ 가 올 수 있으므로 (h_1+h_2) 와 (h_1-h_2) 가 각각 -1, +1에 사상(mapping) 되어야 하며 따라서 다음 식을 만족하여야 한다.

$$\cos|h_1 + h_2|\pi = -1 \quad (2.5)$$

$$\cos|h_1 - h_2|\pi = 1 \quad (2.6)$$

그러므로 식 (2.5)와 (2.6)은 다음 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\cos|h_1 + h_2|\pi = -\cos|h_1 - h_2|\pi \quad (2.7)$$

단, $h_i = L_i/g(L_i, g : 정수)$

식 (2.7)은 부정 방정식이므로 먼저 $h_2 > h_1$ 라 가정하고 경우별로

- (1) $0 < h_1 < h_2 \leq 1/2$ 인 경우와
- (2) $0 < h_1 \leq 1/2 < h_2$ 인 경우로 나누어 풀어야 한다.

위식을 풀면 식 (2.7)을 만족하는 변조지수는 다음과 같이 2 종류로 표현된다. ^[6]

$$(1) \quad h_1 = \frac{2^{n-1} - k}{2^n}, \quad h_2 = \frac{2^{n-1}}{2^n} \quad (2.8)$$

$$(2) \quad h_1 = \frac{2^{n-1}}{2^n}, \quad h_2 = \frac{2^{n-1} + k}{2^n} \quad (2.9)$$

여기서 $h_1 > h_2$, $K=1, 2, \dots, 2^{n-1}$, $n \geq 2$ 이다.

$h_1 > h_2$ 인 경우는 위의 두 경우에서 h_1 과 h_2 의 값이 바뀐 형태에 불과하다.

식 (2.8), (2.9) 모두 n 이 무한대로 갈수록 $k=1$ 일 때 2-h CPM의 변조 지수가 1/2이 되어 MSK에 접근하고 있음을 알 수 있다.

식 (2.8), (2.9)의 변조 지수로 부터 2-h CPM의 2T 지연 차동 복조기는 그림 2.2와 같다.

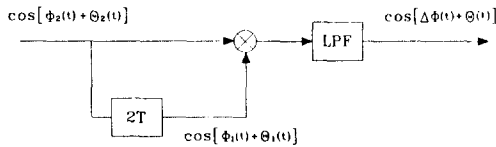


그림 2.2 2-h CPM 차동 복조기

Fig. 2.2 Differential demodulator of 2-h CPM

여기서 ϕ_1 는 정보를 포함한 위상 함수이고 θ_1 는 AWGN에 의한 위상 오류이며 $\Delta\phi = (\phi_1 - \phi_2)$ 이고, $\theta = (\theta_1 - \theta_2)$ 으로 위상차 오류이다.

III. 평균 비트 오류 확률

가산성 백색 가우시안 잡음하에서 위상차 오류에 대한 확률 밀도 함수는 다음과 같이 표현된다. [7]

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-R} \left[1 + \frac{R}{2} \int_0^\pi (\sin \alpha + \cos \theta) \exp(R \sin \alpha \cos \theta) d\alpha \right], \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (3.1)$$

θ : 위상차 ($\theta_1 - \theta_2$) 오류

R : 신호대 잡음비

표 3.1 변조 지수 (1)의 경우 데이터 검출

Table 3.1 Data detection [Modulation index (1)]

	h_1	h_2	위 상 $\Delta\phi$	검출 데이터 $\cos\Delta\phi$
	$\frac{2^{n-1}-k}{2^n}$	$\frac{2^{n-1}}{2^n}$		
데 이 타	1	1	$\frac{2^n-k}{2^n} \pi$	-1
	-1	-1	$-\frac{2^n-k}{2^n} \pi$	-1
	-1	1	$-\frac{k}{2^n} \pi$	1
	1	-1	$-\frac{k}{2^n} \pi$	1

식 (2.8), (2.9) 로 부터 변조 지수 (1)과 (2)의 경우에 데이터에 따른 위상 변화와 검출되는 데이터 를 표 3.1과 3.2에 나타내었다.

표 3.2 변조 지수 (2)의 경우 데이터 검출
Table 3.2 Data detection [Modulation index (2)]

	h_1	h_2	위 상 $\Delta\phi$	검출 데이터 $\cos\Delta\phi$
	$\frac{2^{n-1}}{2^n}$	$\frac{2^{n-1}+k}{2^n}$		
데 이 타	1	1	$\frac{2^n+k}{2^n} \pi$	-1
	-1	-1	$-\frac{2^n+k}{2^n} \pi$	-1
	-1	1	$\frac{k}{2^n} \pi$	1
	1	-1	$-\frac{k}{2^n} \pi$	1

변조 지수 (1), (2)의 경우 모두 위상 값에 \cos 을 취하여 검출 하는데

$$\cos\left(\frac{2^n-k}{2^n}\pi\right) = \cos\left(\frac{2^n+k}{2^n}\pi\right) \quad (3.2)$$

이므로 변조 지수 (1) 이나 (2)의 평균 비트 오류 확률은 같음을 알 수 있다. 그러므로 여기서는 변조지수 (1)의 경우만 고려한다. 그림 2.2와 표 3.1에서 $\Delta\phi = (\phi_1 - \phi_2) = \pm \frac{k}{2^n} \pi$ 일 때는 +1로 복호되고 $\Delta\phi = \pm \frac{2^n-k}{2^n} \pi$ 일 때는 -1로 복호되는데 $\Delta\phi = \pm \frac{k}{2^n} \pi$ 일 때 위상차 오류 θ 에 의해 -1로 검출되면 에러가 되므로 $\cos(\pm \frac{k}{2^n} \pi + \theta) < 0$ 이면 에러가 발생한다.

변조 지수 (1)의 경우에 있어서 표 3.1로 부터 $\Delta\phi = \pm \frac{k}{2^n} \pi$ 가 나오려면 $h_1 = \frac{2^{n-1}-k}{2^n}$, $h_2 = \frac{2^{n-1}}{2^n}$ 일때 데이터가 +1 이 발생하고 -1이 발생하면 $\Delta\phi = -\frac{k}{2^n} \pi$ 가 되며, -1이 발생하고 +1이 발생하면 $\Delta\phi = +\frac{k}{2^n} \pi$ 가 되는데 +1과 -1이 발생할 확률이 같으므로 우리는 결국 $\Delta\phi = \frac{k}{2^n} \pi$ 에 대해서만 고려하면 된다. 이 경우 평균 비트 오류 확률은 다음과 같다.

$$\psi = \frac{k}{2^n} \pi + \theta \quad (3.3)$$

라 하면 식 (3.1) 로 부터

$$f(\psi) = \frac{1}{2\pi} e^{-R} \left[1 + \frac{R}{2} \int_0^\pi [\sin \alpha + \cos(\psi - \frac{k}{2^n} \pi)] \exp[R \sin \alpha \cos(\psi - \frac{k}{2^n} \pi)] d\alpha \right] - \pi + \frac{k}{2^n} \pi \leq \psi \leq \pi + \frac{k}{2^n} \pi, \quad n \geq 2 \quad (3.4)$$

이 되며 $\cos\psi < 0$ 이면 에러가 발생하므로 평균 비

트 오류 확률은 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$P_c = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(\psi) d\psi = P_a + P_b + P_c \quad (3.5)$$

여기서 P_a, P_b, P_c 는 각각

$$P_a = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{-R}}{2\pi} d\psi \quad (3.6)$$

$$P_b = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{-R}}{2\pi} \frac{R}{2} \int_0^\pi \sin \alpha \exp[R \sin \alpha \cos(\psi - \frac{k\pi}{2^n})] d\alpha d\psi \quad (3.7)$$

$$P_c = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{-R}}{2\pi} \frac{R}{2} \int_0^\pi \cos(\psi - \frac{k\pi}{2^n}) \exp[R \sin \alpha \cos(\psi - \frac{k\pi}{2^n})] d\alpha d\psi \quad (3.8)$$

이다.

먼저 식 (3.6)을 계산하면

$$P_a = \frac{1}{2} e^{-R} \quad (3.9)$$

이 되며 식 (3.7)을 계산하기 위하여 식 (3.7)중

$$g(\psi) = \int_0^\pi \sin \alpha \exp[R \sin \alpha \cos(\psi - \frac{k\pi}{2^n})] d\alpha \quad (3.10)$$

라 놓고

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad (3.11)$$

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B \quad (3.12)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (3.13)$$

을 이용하여 식(3.10)을 다시 쓰면

$$g(\psi) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R^{i+j}}{i!j!} \cos^i \frac{k\pi}{2^n} \sin^j \frac{k\pi}{2^n} \cos^i \psi \sin^j \psi \int_0^\pi \sin^{i+j} \alpha d\alpha \quad (3.14)$$

이 되고 적분 테이블에서⁸⁾

$$\int_0^\pi \sin^n \alpha d\alpha = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{i}{2} + \frac{n}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})} \quad (3.15)$$

를 이용하여 식(3.14)를 적분하여 다시 쓰면

$$g(\psi) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R^{i+j}}{i!j!} \cos^i \frac{k\pi}{2^n} \sin^j \frac{k\pi}{2^n} \cos^i \psi \sin^j \psi \pi \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{i}{2} + \frac{j}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{i}{2} + \frac{j}{2} + \frac{3}{2})} \quad (3.16)$$

여기서 $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, t > 0$

감마 함수 이고 식 (3.7)은

$$P_b = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{-R}}{4\pi} R g(\psi) d\psi = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R^{i+j+1}}{i!j!} \frac{e^{-R}}{4\sqrt{\pi}} \cos^i \frac{k\pi}{2^n} \sin^j \frac{k\pi}{2^n} \frac{\Gamma(\frac{i}{2} + \frac{j}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{i}{2} + \frac{j}{2} + \frac{3}{2})} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^i \psi \sin^j \psi d\psi \quad (3.17)$$

가 된다.

여기서 \cos 은 우함수이고 \sin 은 기함수 이므로

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^i \psi \sin^{2i+1} \psi d\psi = 0 \quad (3.18)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^i \psi \sin^{2j} \psi d\psi = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^i \psi \sin^{2j} \psi d\psi \quad (3.19)$$

을 이용하면 식 (3.17)은

$$P_b = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R^{i+2j+1}}{i!(2j)!} \frac{e^{-R}}{2\sqrt{\pi}} \cos^i \frac{k\pi}{2^n} \sin^{2j} \frac{k\pi}{2^n} \frac{\Gamma(\frac{i}{2} + j + 1)}{\Gamma(\frac{i}{2} + j + \frac{3}{2})} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^i \psi \sin^{2j} \psi d\psi \quad (3.20)$$

가 된다.

식 (3.20)에서 마지막 적분항을 풀기 위하여

$$P_{b1} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^i \psi \sin^{2j} \psi d\psi \quad (3.21)$$

이라 하면, 여기서 처음에 우리는 $\cos \psi < 0$ 를 찾는 것이었으므로 확률 변수 변환을 사용하여 $x = \cos \psi$ 라하면⁹⁾ 식 (3.21)은

$$P_{b1} = \int_{-1}^0 x^i (1-x^2)^{j-\frac{1}{2}} dx \quad (3.22)$$

가 된다.

식 (3.22)에서 피적분 함수의 두번째항은 항상 우함수이므로 피적분 함수의 첫번째 항을 우함수와 기함수 항으로 분리하여 계산하여야 한다. 즉,

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} + \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i+1} \quad (3.23)$$

$$\int_{-1}^0 x^{2i} (1-x^2)^{j-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 x^{2i} (1-x^2)^{j-\frac{1}{2}} dx \quad (3.24)$$

$$\int_{-1}^0 x^{2i+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -\int_0^1 x^{2i+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \quad (3.25)$$

위의 관계식과 적분 테이블에서⁸⁾ 다음 관계식을 이용한다.

$$\int_0^1 x^\alpha(1-x^2)^\beta dx = \frac{1}{\lambda} B\left(\frac{\alpha+1}{\lambda}, \beta+1\right), \quad \alpha, \beta > -1, \lambda > 0 \quad (3.26)$$

여기서 $B(\cdot)$ 는 베타함수로

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (3.27)$$

식 (3.22), (3.23), (3.24), (3.25), (3.26), (3.27)을 이용하여 (3.20)을 적분하여 정리하면

$$P_b = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R^{2i+2j+1}}{(2i)(2j)!} \frac{e^{-R}}{4\sqrt{\pi}} \cos^{2i} \frac{k\pi}{2^n} \sin^{2j} \frac{k\pi}{2^n} \Gamma(j + \frac{1}{2}) \left[\frac{\Gamma(i + \frac{1}{2})}{\Gamma(i + j + \frac{3}{2})} - \frac{R}{2i+1} \cos \frac{k\pi}{2^n} \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+j+2)} \right] \quad (3.28)$$

가 된다.

식 (3.8)를 계산하기 위하여 식 (3.8)중

$$h(\psi) = \int_0^\pi \cos(\psi - \frac{k\pi}{2^n}) \exp[R \sin \alpha \cos(\psi - \frac{k\pi}{2^n})] d\alpha \quad (3.29)$$

라 놓고 이 적분을 계산하기 위하여 앞에서와 유사하게 식 (3.11), (3.12), (3.13) 그리고 (3.15)를 이용하여 (3.29)를 적분하여 다시 쓰면

$$h(\psi) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R^{i+j}}{i!j!} \cos^i \frac{k\pi}{2^n} \sin^j \frac{k\pi}{2^n} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{i}{2} + \frac{j}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{i}{2} + \frac{j}{2} + 1)} \left[\cos \frac{k\pi}{2^n} \cos^{i+1} \psi \sin^j \psi + \sin \frac{k\pi}{2^n} \cos^i \psi \sin^{j+1} \psi \right] \quad (3.30)$$

이 된다.

그러므로 식 (3.8)은

$$P_c = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{-R}}{4\pi} h(\psi) d\psi \quad (3.31)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-R}}{4\sqrt{\pi}} \frac{R^{i+j+1}}{i!j!} \cos^i \frac{k\pi}{2^n} \sin^j \frac{k\pi}{2^n} \frac{\Gamma(\frac{i}{2} + \frac{j}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{i}{2} + \frac{j}{2} + 1)} \left[\cos \frac{k\pi}{2^n} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^{i+1} \psi \sin^j \psi d\psi + \sin \frac{k\pi}{2^n} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^i \psi \sin^{j+1} \psi d\psi \right]$$

이 된다. 또한,

$$\sum_{j=0}^{\infty} j = \sum_{j=0}^{\infty} 2j + \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \quad (3.32)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) + \sum_{j=0}^{\infty} (2j+2) \quad (3.33)$$

이므로 식 (3.18), (3.19), (3.32) 그리고 (3.33)을 이용하여 식 (3.31)을 정리하면

$$P_c = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-R}}{4\sqrt{\pi}} \left[\frac{R^{i+2j+1}}{i!(2j)!} \cos^{i+1} \frac{k\pi}{2^n} \sin^{2j} \frac{k\pi}{2^n} \frac{\Gamma(\frac{i}{2} + j + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{i}{2} + j + 1)} \right] 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^{i+1} \psi \sin^{2j} \psi d\psi + \frac{R^{i+2j+2}}{i!(2j+1)!} \cos^i \frac{k\pi}{2^n} \sin^{2j+2} \frac{k\pi}{2^n} \frac{\Gamma(\frac{i}{2} + j + 1)}{\Gamma(\frac{i}{2} + j + \frac{3}{2})} 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^i \psi \sin^{2j+2} \psi d\psi \quad (3.34)$$

식 (3.34)중 ψ 에 대한 적분을 행하기 위해 P_b 를 구할 때와 유사하게 $x = \cos \psi$ 로 확률 변수 변환을 한 후 식 (3.23), (3.24) 그리고 (3.25)로부터 다음 식을 얻는다.

$$\int_{-1}^0 x^{i+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -\int_0^1 x^{2i+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \quad (3.35)$$

$$+ \int_0^1 x^{2i+2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$\int_{-1}^0 x^i(1-x^2)^{j+\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 x^{2i}(1-x^2)^{j+\frac{1}{2}} dx \quad (3.36)$$

$$- \int_0^1 x^{2i+1}(1-x^2)^{j+\frac{1}{2}} dx$$

식 (3.26)과 (3.27)을 이용하여 식 (3.35)와 (3.36)을 계산하여 (3.34)를 구하여 정리하며 다음과 같다.

$$P_c = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-R}}{4\sqrt{\pi}} \frac{R^{2i+2j+1}}{(2i)!(2j)!} \cos^{2i} \frac{k\pi}{2^n} \sin^{2j} \frac{k\pi}{2^n} \left[-\cos \frac{k\pi}{2^n} \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(j+\frac{1}{2})}{(i+j+\frac{1}{2})\Gamma(i+j+1)} + \frac{R}{2i+1} \cos^2 \frac{k\pi}{2^n} \frac{\Gamma(i+\frac{3}{2})\Gamma(j+\frac{1}{2})}{(i+j+1)\Gamma(i+j+\frac{3}{2})} + \frac{R}{2j+1} \sin^2 \frac{k\pi}{2^n} \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})\Gamma(j+\frac{3}{2})}{(i+j+1)\Gamma(i+j+\frac{3}{2})} - \frac{R^2}{(2i+1)(2j+1)} \cos \frac{k\pi}{2^n} \sin^2 \frac{k\pi}{2^n} \frac{\Gamma(i+1)\Gamma(j+\frac{3}{2})}{(i+j+\frac{3}{2})\Gamma(i+j+2)} \right] \quad (3.37)$$

그러므로 평균 비트 오류 P_e 는 식 (3.9), (3.28) 그리고 (3.37)로부터 식 (3.5)를 계산하여 정리하면 다음과 같다.

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-R} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-R}}{4\sqrt{\pi}} \frac{R^{2i+2j+1}}{(2i)!(2j)!} \cos^{2i} \frac{k\pi}{2^n} \sin^{2j} \frac{k\pi}{2^n} \Gamma(j + \frac{i}{2}) \left\{ \frac{\Gamma(i + \frac{i}{2})}{\Gamma(i + j + \frac{3}{2})} \left[1 + \frac{R}{2(i+j+1)} \right] - \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+j+1)} \cos \frac{k\pi}{2^n} \left[\frac{R}{(2i+1)(i+j+1)} \left[1 + \frac{R \sin^2 \frac{k\pi}{2^n}}{2(i+j+\frac{3}{2})} \right] + \frac{1}{i+j+\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (3.38)$$

$k = 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1, n \geq 2$

식 (3.38)에서 n이 무한대로 접근함에 따라서 (3.38)은 j가 0 일 때와 j가 0 이 아닐 때 모두

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-R} \quad (3.39)$$

이 되며 이는 잘 알려진 DMSK의 평균 비트 오류 확률 식임을 알 수있다.

표 3.3에는 n=2, k=1 일 때와 n=3, k=1 그리고 n=3, k=2 일 때 즉, 변조 지수가 {1/4, 2/4}, {3/8, 4/8}, {2/8, 4/8} 일 때 식 (3.38)로 부터 구한 차동 복조 2h-CPM의 오류 확률을 나타내었다.

표 3.3 n과 k값에 따른 평균 비트 오류 확률
Table 3.3 Average bit error probability for various n and k

SNR (dB)	P_e , (n=2, k=1)	P_e , (n=3, k=1)	P_e , (n=3, k=2)
0	$2.69 \cdot 10^{-1}$	$2.05 \cdot 10^{-1}$	$2.69 \cdot 10^{-1}$
1	$2.35 \cdot 10^{-1}$	$1.65 \cdot 10^{-1}$	$2.35 \cdot 10^{-1}$
2	$1.99 \cdot 10^{-1}$	$1.25 \cdot 10^{-1}$	$1.99 \cdot 10^{-1}$
3	$1.64 \cdot 10^{-1}$	$9.00 \cdot 10^{-2}$	$1.64 \cdot 10^{-1}$
4	$1.31 \cdot 10^{-1}$	$6.00 \cdot 10^{-2}$	$1.31 \cdot 10^{-1}$
5	$1.00 \cdot 10^{-1}$	$3.60 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-1}$
6	$7.20 \cdot 10^{-2}$	$2.00 \cdot 10^{-2}$	$7.20 \cdot 10^{-2}$
7	$4.90 \cdot 10^{-2}$	$9.00 \cdot 10^{-3}$	$4.90 \cdot 10^{-2}$
8	$3.29 \cdot 10^{-2}$	$4.00 \cdot 10^{-3}$	$3.29 \cdot 10^{-2}$
9	$1.70 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-3}$	$1.70 \cdot 10^{-2}$
10	$9.00 \cdot 10^{-3}$	$3.08 \cdot 10^{-4}$	$9.00 \cdot 10^{-3}$
11	$4.00 \cdot 10^{-3}$	$5.60 \cdot 10^{-5}$	$4.00 \cdot 10^{-3}$
12	$1.00 \cdot 10^{-3}$	$6.77 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^{-3}$
13	$3.48 \cdot 10^{-4}$	$4.74 \cdot 10^{-7}$	$3.48 \cdot 10^{-4}$
14	$6.90 \cdot 10^{-5}$	$1.75 \cdot 10^{-8}$	$6.90 \cdot 10^{-5}$

IV. 결론

본 논문에서는 차동 부호화한 2-h CPM 신호의 2T 지연 차동 복조 모델을 제시하고 평균 비트 오류 확률을 유도 하였다.

먼저 수신 신호의 크기가 일정하게 유지되면서 비트 단위의 차동 복조가 가능하도록 변조 지수를 구하였으며 이로부터 AWGN 하에서 오류 확률식을 유도 하였다.

유도된 오류 확률식이 n이 무한대로 감에 따라서 DMSK 의 평균 비트 오류 확률식과 같음을 알 수 있어, 2장에서 변조 지수를 구할 때 n이 무한대로 감에 따라 변조 지수가 1/2이 되어 MSK 로 접근함에 일치 하였다.

변조 지수에 따른 평균 오류 확률은 n의 값이 일정 할 때 k 값이 커짐에 따라서, k값이 일정 할 때는 n의 값의 작을 수록 복조시 수신 신호의 크기가 작아져 오류 확률이 증가함을 알 수 있었다.

본 논문에서는 2-h의 경우에 비트 단위의 차동 복조가 가능함을 제시하였으나 앞으로 multi-h에 대해서도 차동 복조시 수신 신호의 크기를 일정하게 유지할 수 있는 변조 지수를 찾고, 회로의 복잡성의 증가 없이 비트 단위의 차동 복조가 가능한 모델의 연구가 계속되어야 할 것이다.

또한 차동 복조 방식은 동기 복조 방식에 비해 수신 장치는 간략화될 수 있으나 오율 성능이 떨어지므로 앞으로 디지털 이동 통신의 페이딩 채널에서 차동 복조 방식이 적용되려면 성능 향상을 위한 연구가 병행되어야 할 것이다.

參 考 文 獻

- [1] T. Aulin and C. E. Sundberg, "Continuous Phase Modulation-Part 1 : Full Response Signaling," *IEEE Trans. Commun., COM-29*, pp. 196-209, March, 1981.
- [2] C. E. Sundberg, "Continuous Phase Modulation," *IEEE Commun. Mag.*, Vol. 24, pp. 25-35, April, 1986.
- [3] K. Murota and K. Hirade, "GMSK Modulation for Digital Mobile Radio Telephony," *IEEE Trans. Commun., COM-29*, pp. 1044-1050, July, 1981.
- [4] K. S. Chung, "Generalized Tamed Frequency Modulation and its Appli-

- ication for Mobile Radio Communications." *IEEE J. Select. Areas Communi.*, SAC-2, pp. 407-497, July, 1984.
- [5] K. Hirade et al., "Error Rate Performance of Digital FM with Differential Detection in Land Mobile Radio Channels." *IEEE Trans. Veh. Technol.*, VT-28, pp. 204-212, Aug. 1979.
- [6] Heesik Hong, Dongweon Yoon and Youngearl Han. "Differential Demodulation of multi-h Continuous Phase Modulation." *IEE and IES ICIE '91*, Vol. 2, pp. 526-536, Singapore, Dec., 1991.
- [7] R. F. Pawula, "On the Theory of Error Rates for Narrow Band Digital FM." *IEEE Trans. Commun.*, COM-29, Nov., 1981.
- [8] L. S. Gradshteyn and L. M. Ryzhik. "Table of Integrals, Series and Products." Academic Press Inc., 1965.
- [9] Y. Y. Han, W. C. Lee and D. W. Yoon, "On the Error Rate Evaluation and Modulation Classification for Coherent and Noncoherent PSK Signals Using the Transformation of Random Variable." *IEEE ICC'93*, Vol. 3, pp. 1508-1514, Geneva, Switzerland, May, 1993.
- [10] R. W. Lucky, J. Salz and E. J. Weldon Jr., "Principle of Data Communication." McGraw-Hill Inc., 1968.
- [11] R. E. Ziemer and R. L. Peterson. "Digital Communications and Spread Spectrum System." Macmillan Publishing Company Inc., 1985.

 著者紹介



尹東源(正會員)

1966年 1月 22日生. 1989年 2月
 한양대학교 전자통신공학과 (공학사). 1992年 2月 한양대학교 전자
 통신공학과 (공학석사). 1992年 3
 月 ~ 현재 한양대학교 전자통신
 공학과 박사과정중

韓榮烈(正會員)

1938年 6月 10日生. 1960年 2月 서울대학교 전자공
 학과 (공학사). 1976年 5月 미주리 주립 대학교 (공학
 석사). 1979年 5月 미주리 주립 대학교 (공학박사).
 1980年 ~ 현재 한양대학교 전자통신공학과 교수