論文94-31B-5-4

더해지는 기준신호를 이용한 위상복원: II. 복원

(Phase Retrieval Using an Additive Reference Signal: Ⅱ.Reconstruction)

金 禹 植*

(Woo Shik Kim)

要 約

위상 복원은 어떤 신호의 푸리에 변환의 크기로부터 원하는 신호를 구하는 문제로서, 천문학, 광학, X-선 결정학, 신호처리 등에서 일어난다. 이런 분야에서는 원하는 신호의 푸리에 변환의 크기만을 측정할 수 있고, 따라서 푸리에 변환의 위상은 잃어버리게 된다. 신호의 중요한 구조적 정보는 푸리에 위상에 포함되어 있기 때문에, 원하는 신호를 정확히 구하려면, 신호의 푸리에 위상을 구해야 한다. 이 논문에서는 이 푸리에 위상의 복원에 관하여 다룬다. 이 논문에서는, 구하고자 하는 신호에 어떤 기준이 되는 신호를 더하여 푸리에 변환의 크기를 구하면, 여기에는 원하는 신호의 푸리에 위상에 대한 정보가 들어있다는 사실을 보이고, 이를 이용한다. Ⅰ부에서는 첫째, 원하는 신호의 푸리에 변환의 크기와 둘째, 어떤 알고있는 기준신호와 세째, 이 신호에 알고있는 기준신호가 더해진 신호의 푸리에 크기의 3가지 정보가 주어졌을 때, 이들 정보로 부터, 원하는 신호가 유일하게 결정이되는 가 하는 유일성(uniqueness)에 대하여 알아보고, Ⅱ부에서는 주어진 정보로부터 원하는 신호를, iterative 알고리즘과 non-iterative 알고리즘의 두가지 방법으로, 구하는 문제를 다룬다.

Abstract

Phase retrieval is concerned with the reconstruction of a signal from its Fourier transform magnitude (or intensity), which arises in many areas such as X-ray crystallography, optics, astronomy, or digital signal processing In such areas, the Fourier transform phase of the desired signal is lost while measuring Fourier transform magnitude (F.T.M.). However, if a reference' signal is added to the desired signal, then, in the Fourier transform magnitude of the added signal, the Fourier transform phase ofthe desired signal is encoded This paper addresses uniqueness and retrieval of the encoded Fourier phase of a multidimensional signal from the Fourier transform magnitude of the added signal along with the Fourier transform magnitude of the desired signal and the information of the additive reference signal In Part Ⅰ, several conditions under which the desired signal can be uniquely specified from the two Fourier transform magnitudes and the additive reference signal are presented In Part Ⅱ, the development of non-iterative algorithms and an iterative algorithm that may be used to reconstruct the desired signal (s) is considered

*正會員, 韓國通信 시스템 開發 센터

(Korea Telecom Systems Development Center)

接受日字 : 1993年 7月 5日

Ⅰ. 서 론

일반적으로, 어떤 신호의 푸리에 변환은 복소수 함수로서, 극좌표로 나타내면 크기 (Magnitude)와 위상 (Phase)의 두 부분으로 나타낼 수 있다. 일반적으로 푸리에 크기와 위상은 서로 독립적인 함수로서 어떤 한가지로부터 다른 것을 구하기는 어렵지만, 여러 분야에서 여러가지 실험으로부터 푸리에위상은 신호의 중요한 구조적 정보를 갖고 있어서, 정확한 위상이 있으면, 푸리에 크기를 다르게 하여도, 구해진 신호는 원신호의 중요한 구조적 정보를 갖고 있다는 것이 알려졌다.[1,2] 특히, 여기에, 원하는 신호가 유한한 영역을 갖으면, 푸리에 변환의 위상으로부터,원하는 신호를 상수배의 모호성만 제외하고는 유일하게 구할 수 있다는 것이 알려졌다.[3] 하지만, 이러한 성질을 푸리에 크기는 갖고 있지 않다. 대부분의 경우에 있어서 푸리에 크기만을 갖고 복원한 신호는 신호의 아무런 성질을 갖고 있지 않다. 실제로, 푸리에 변환의 크기가 주어졌을 때, 여기에 서로 다른 위상을 결합하여 같은 푸리에 변환의 크기를 갖는 수 많은 신호를 구할수 있다. 따라서, 일반적으로 다른 부가적인 정보가 없이는 위상정보를 구하는 것은 매우 어렵다.

이 논문에서는 구하고자 하는 m-차원 함수를 $x(n)$라 하고 m은 1을 포함한 양의 정수) $y(n)$을 $x(n)$에 어떤 알고 있는신호 $h(n)$을 더하여 구한 식

$$y(n) = x(n) + h(n)$$

이라고 할 때, $x(n)$과 $y(n)$의 푸리에 크기 및 $h(n)$의 정보로부터 $x(n)$을 구하는 문제를 다룬다. Ⅰ부에서는 $x(n)$이 주어진 조건으로부터 유일하게 결정이 되기 위한 조건을 구하였고[4], Ⅱ부에서는 주어진 조건으로부터 원하는 신호를 구해내는 알고리즘을 개발한다.

Ⅱ. 복 원

넓은 의미에서 보면, 신호를 복원하는 알고리즘에는 iterative알고리즘과 non-iterative 알고리즘의 2가지 종류가 있다. Non-iterative 알고리즘은 해를 구하는데 있어서 closed-form의 식을 이용하는 방법이다. 이 방법은 이론적으로 방정식 등을 풀어서, 해를 즉시, 정확히 구할 수 있다는 장점이 있다. 하지만, 위상복원문제의 경우에 있어서 이 방법을 이용하면, 대부분의 식이 자기상관함수의 정의로부터 유도되어 나오기 때문에, 보통 식들이 비선형이고 또한 recursive하게 된다. 따라서, 어떤 순간에 얻은 값에 어떤 이유로 에러가 포함되게 되면, 이 에러는 다음의 값을 계산하는데 계속 포함이 될 뿐만 아니라, 점점 더 커지게 된다. 결과적으로, 이 방법으로 구한 해는 때때로 원하는 결과와 매우 다를 수가 있다. Iterative한 알고리즘은 한 순간에서의 출력이 그대로 다음 단에의 입력이 되는 알고리즘으로, 이론적으로는 이 알고리즘을 무한히 많이 반복 수행하여야 원하는 결과를 얻을 수 있다. 하지만, 이것은 불가능하므로 보통 적당한 선에서 수행을 중지하고, 이 때의 결과를 원하는 결과로 간주한다. 이 방법의 장점은 한 순간에 생긴 에러를 다음 단으로 퍼져나가기 전에 정정해줄 수 있다는 점이다.[5] 이것은 각 단에서 여러가지 제한 연산자 (constraint operator)를 사용하여 수행할 수 있으며, 예로는 유한영역 제한자 (finite support constraint operator), 양의 신호값을 갖게하는 연산자 (non-negativity constraint operator) 등이 있다. 이 논문에서는 원하는 신호를 구하는데 있어서 iterative한 알고리즘과 non-iterative한 알고리즘 모두를 구한다.

1. 알고리즘의 개발

다차원 실수 함수 $x(n)$의 자기상관함수는

$$r_x(k) = \sum_n x(n)x(n+k).$$

로서 정의된다. $y(n)=x(n)+h(n)$의 식으로부터 $y(n)$의 자기상관함수는$x(n)$과 $h(n)$의 자기상관함수와 다음의 식

$$r_y(k) = r_x(k) + r_h(k) + h(k)*x(-k) + h(-k)*x(k).$$

으로 관계가 있다. 여기서, 자기상관함수들의 차이함수 ($r_{yxh}(k)$으로 표시)를

$$r_{yxh}(k) = r_y(k) - r_x(k) - r_h(k), \tag{1}$$

라고 가정하면, $r_{yxh}(k)$는 다음의 식

$$r_{yxh}(k) = h_y(k)*x(-k) + h(-k)*x(k). \tag{2}$$

으로 쓸 수 있다. 어떤 신호의 자기상관함수는 그 신호의 푸리에 크기의 제곱을 역푸리에 변환을 하여 구할 수 있으므로, (2)의 좌변은 (1)으로부터 $r_{yxh}(k)$는 주어진 정보로부터 유일하게 구할 수 있으며, 알고 있는 값들이다. 임의의 이산시간신호는 점함수의 합

으로 나타낼 수 있으므로, $h(n)$은

$$h(n)=\sum_{i=1}^{M}A_i\delta(n-n_i) \tag{3}$$

으로 나타내어진다. 여기서 M은 $h(n)$의 0이 아닌 점신호의 갯수이다. 위의 식을 이용하면, 자기상관함수의 차이함수 (2)는 다음의 식

$$r_{yxh}(n)=\sum_{i=1}^{M}A_i x(n_i+n)+\sum_{i=1}^{M}A_i x(n_i-n) \tag{4}$$

으로 쓸 수 있다. 위의 오른쪽의 식중 A_i와 n_i는 알고 있는 값들이고 $x(n_i+n)$와$x(n_i+n)$은 알고자 하는 값들이다. 따라서, (4)는 각 n의 값들에 대하여 하나, 또는 여러개의 미지수를 갖는 방정식이 된다. 여기에, 변수 n을 적당히 배열하고, $x(n)$의 자기상관함수의 정의를 잘 이용하면, (4)식은 단지 하나의 미지수를 가진 방정식이 될 수 있고, 따라서 복원이 가능하게 된다.

A. 유일한 해를 갖을 때의 신호 복원

이 장에서는 I 부에서 정리2와 정리3으로부터 신호가 유일하게 결정이 되었을 때의 신호를 구하는 문제를 다룬다. 이런 경우에는 원하는 신호의 중심과 더해지는 기준신호의 중심이 서로 일치하지 않게 되며, 구하고자 하는 신호 $x(n)$의 최소의 신호 영역이 $R[N]$ 이라고가정하고, 더해지는 신호 $h(n)$을 (3)으로 나타내면, 수식적으로는

$$n_1+n_M\neq N-1$$

으로 나타내어 진다. 위의 조건은 $n_1+n_M<N-1$과 $n_1+n_M>N-1$의 두 경우로 나눌 수 있다. 먼저 $n_1+n_M<N-1$ 의 경우를 보면, $n>n_M$이면 식 (4)에서 오른편의 식은 0이 되며, 따라서, $x(N-1)$, $x(N-2)$, $\ldots, x(n_1+n_M+1)$의값들을 다음의 식

$$x(n)=\frac{1}{A_1}\left[r_{yxh}(n_1+n_M-n)-\sum_{i=2}^{M}A_i x(n+n_i-n_1)\right], n>n_1+n_M$$

으로 구할 수 있다. $x(n)$의 나머지 값들은 n을 0,1, $\ldots,(n_1+n_M)/2$까지 변화시키며, 다음의 행렬 방정식

$$\begin{bmatrix}A_1 & A_M\\ o & x(N-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(n_1+n_M-n)\\ x(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{yxh}(n)\\ P_x(n)\end{bmatrix}$$

을 풀어서 구할 수 있다. 여기서 $P_{yxh}(n)$과 $P_x(n)$은 각각

$$P_{yxh}(n)=r_{yxh}(n_M-n)-\sum_{i=2}^{M}A_i x(n_M+n_i-n)-\sum_{i=1}^{M-1}A_i x(-n_M+n_i+n)$$

와

$$P_x(n)=r_x(N-1-n)-\sum_{i=0}^{n-1}x(i)x(N-1-n+i)$$

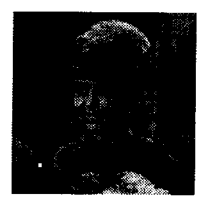
으로 주어진다.

$n_1+n_M>N-1$의 경우에는 $x(n)$과 $x(N-1-n)$이 같은 푸리에 크기를 갖으므로, $h'(n)=x(N-1-n)$이 주어진 기준신호라고 가정하면, 위에서 유도된 식들을 이용할 수 있게 된다. 여기서 구한 결과를 다시 시간축을 역으로 바꾸면 원하는 신호를 구할 수 있다.

2차원 이상의 차원을 가진 신호의 복원은 1차원 신호의 복원과 개념적으로 같으므로, 수식의 유도는 생략하고, 예제만 보인다.

예제 1. 그림1 (a)는 128×128의 원화상 $x(m,n)$이고,(b)는 $y(m,n)$으로 $x(m,n)+h(m,n)$으로 주어진다고 가정한다. 여기서 $h(m,n)=256\delta(m-16,n-18)$이며, 그림에서 흰점은 더해진 기준신호인점함수의 위치를 나타낸다. (a)와 (b)의 푸리에 크기의 제곱으로부터 각각의 자기상관함수를 구할 수 있고, 이들 상관함수의 차이함수 $r_{yxh}(k,l)$를 구하여 나타낸 것이 그림 (c)이다. 이 그림에서 볼 수 있듯이, 차이함수는 원신호와 원신호를 180도 회전과 자리이동한 신호를 겹쳐놓은 것과 같은 모양을 하고있다. 따라서, 원신호의 일부는 이 차이함수에 윈도우를 씌워서 구할 수 있다 (그림 (d)). 남은 부분 ((d)에서 빠진 부분)의 복원은 차이함수 (그림 (e)부분)와 원신호의 자기상관함수로부터 구할 수 있으며, 그림 (f)는 복원이 끝난 뒤의 신호를 나타낸다.

(a)



(b)

(c)


(d) (e)

(f)

그림 1. 개발된 Non-iterative 알고리즘을 이용한 2차원 신호의 복원 (a) 원래의 신호 (b) 원신호에 점함수가 더해진 신호 (c) (a)와 (b)의 자기상관함수의 차이신호 (d) 차이 신호에 윈도우를 이용해 구한 원신호의 일부 (e) 원신호와 원신호를 180도 회전한 신호와 겹쳐진 부분 (f) 복원된 신호

Fig. 1. Reconstruction of a two-dimensional signal using the developed non-iterative algorithm.

2. 유일한 해를 갖지 않을 때의 신호의 복원

Ⅰ부의 정리3에 따르면, $X(z)$가 $A(z)$를 인수로 갖고, 구하고자 하는 신호의 중심과 더해지는 기준신호의 중심이 같으면, 2개의 푸리에 크기로부터 결정되는 신호는 유일하게 결정이 되지 않으며, 정리1에 의해서 이런 신호는 2개만이 존재한다. 이 장에서는 이 두 신호를 복원하는 문제를 다룬다. 여기서도 원하는 신호 $x(n)$이 1차원 신호로서 최소의 신호영역으로 $R[N]$ 을갖는다고 가정한다. 그러면, 원하는 신호와 기준신호의 중심이 같다는 조건은, 수식적으로 $n_1+n_M=N-1$으로 나타내어 진다. 원하는 신호 $x(n)$을 구하기 위해서는 두개의 경계값 $x(0)$와 $x(N-1)$을 구해야하며, 이들은 2차의 방정식을 풀어서 구할 수 있다. 먼저, $r_x(N-1)$과 $r_{yxh}(n_M)$으로부터 두 경계값들의 합과 곱을 유도해낼 수 있다. 즉,

$$r_{yxh}(n_M) = A_1 x(N-1) + A_M x(0)$$

와

$$r_x(N-1) = x(0)x(N-1).$$

이 두 방정식으로부터 다음의 2차 방정식

$$t^2 - r_{yxh}(n_M)t + A_1 A_M r_x(N-1) = 0$$

을 유도해낼 수 있다. 이 방정식의 두 해는 $A_M x(0)$과 $A_1 x(N-1)$이므로, 위의 식을 풀어 얻은 두해를 t_1과 t_1라고 하면, 두 경계값 $x(0)$와 $x(N-1)$는

$$\begin{cases} x(0) = t_1 / A_M \\ x(N-1) = t_2 / A_1 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x(0) = t_2 / A_M \\ x(N-1) = t_1 / A_1 \end{cases}$$

으로 주어진다. $x(n)$의 나머지 값들은 다음의 방법으로 구할 수 있다. 먼저, $r_x(k)$와 $r_{yxh}(k)$으로부터 다음의 행렬 방정식을 만들 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_M & A_1 \\ x(N-1) & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n) \\ x(N-1-n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{yxh}(n) \\ P_x(n) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

여기서 $P_{yxh}(n)$와 $P_x(n)$는

$$P_{yxh}(n) = r_{yxh}(n_M - n) - \sum_{i=2}^{M} A_i x(n_M + n_i - n) - \sum_{i=1}^{M-1} A_i x(-n_M + n_i + n)$$

와

$$P_{yxh}(n) = r_x(N-1-n) - \sum_{i=1}^{n-1} x(i)x(N-1-n+i)$$

으로 주어진다. 식에서 $A_M x(0) - A_1 x(N-1) \neq 0$이면, 이 행렬 방정식은 해를 갖으며, 이 방정식을 풀어 $x(n)$과 $x(N-1-n)$을 구할 수 있다. 독립변수 n을 $n=1,2,\ldots,(n_0-1)$으로 바꾸어 가며 이 과정을 반복하면, $x(n)$의 나머지 값들을 구할 수 있다. 특히, $n_0=(n_1+n_M)/2$이 정수값을 갖으면, $x(n_0)$의 값은

$$x(n_0) = P_{yxh}(n_0) / (A_1 + A_M). \qquad (6)$$

으로부터 구할 수 있다. 다차원 함수의 복원도 1차원 신호의 복원과 같은 방법으로 할 수 있다.

예제 2. 구하고자 하는 신호 $x(n)$을 다음과 같이 $n \geq 0$에서

$$x = [1, 3, 1, -3, -2]$$

라고 하고, 더해지는 신호는 $h(n)=\delta(n-1)+3\delta(n-2)+2\delta(n-3)$라고 한다. 이 경우 $M=3$, $n_1=1$, $A_1=1$, $n_2=2$, $A_2=3$, $n_3=3$, $A_3=3$,이 되며 이때, $y(n)$은

$$y= [1,4,4,-1,-2]$$

이 된다. 이 신호들의 z-변환인 $X(z)$와 $H(z)$는 $X(z)=(1+2z^{-1})(1-z^{-1})(1+z^{-1})^2$와 $H(z)=z^{-1}(1+2z^{-1})(1+z^{-1})$와 같이 된다. $X(z)$가 $H(z)$의 non-linear phase 부분인 $(1+2z^{-1})$을 인수로 갖고,더해지는 기준함수의 중심이 $n=2$으로 원하는 신호의 중심과 같으므로, 주어진 조건 [$x(n)$과 $y(n)$의 푸리에 크기 및 h(n)]으로부터 결정이 되는, 신호영역이 [0,4] 인 신호는 2개가 있게된다. 이들 신호는 $\tilde{X}(z)=X(z)$인 $\tilde{x}=[1,3,1,-3,-2]$ 과 $\tilde{X}(z)\neq X(z)=(1+2z^{-1})(-1+z^{-1})(1+z^{-1})^2$인 $\tilde{x}=[-1,-3,-1,3,2]$ 이 있게 된다.

이들 신호의 자기상관함수 $r_x(k)$, $r_y(k)$, 및 $r_h(k)$는 각각 신호들의푸리에 변환의 크기를 역푸리에 변환함으로써, 각각,

$$r_x=[24,9,-10,-9,-2],$$
$$r_y=[48,18,-8,-9,-2],\quad r_h=[14,9,2]$$

로서 주어진다. 따라서, 이들 자기상관함수의 차이함수 $r_{yxh}(k)$는

$$r_{yxh}=[10,0,0,0,0],$$

로서 주어진다. 여기서, $A_1=1$ 이고 $A_3=2$이므로, 경계값들의 합과 곱은

$$2x(0)+x(4)=r_{yxh}(3)=0 \text{ 와 } x(0)x(4)=r_x(4)=-2.$$

로서 주어지며, 이로부터 $2x(0)$와 $x(4)$를 두 해로 하는 2차 방정식

$$t^2-2\cdot 2=0$$

를 구할 수 있다. 이 방정식을 풀면, 두 해는 $t=-2$ 또는 $t=2$로 주어지며, 따라서, $x(0)$와 $x(4)$는

$$\begin{bmatrix} x(0)=-1 \\ x(4)=2 \end{bmatrix} (a) \text{ 또는 } \begin{bmatrix} x(0)=1 \\ x(4)=-2 \end{bmatrix}$$

로서 주어진다. 먼저, (a)의 경우를 보면, 행렬 방정식 (5)의 determinant는 $A_3x(0)-A_1x(4)=2(-1)-1(2)=-4 2=0\neq 0$ 주어져서, x(1)과 x(3)의 값들은

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

로 주어지고, 남아있는 값 $x(2)$는 (6)로부터로

$$x(2)=P_{yxh}(2)/(A_1+A_3)=(-3)/(3)=-1$$

따라서, 복원된 신호 $x(n)$은 x = [-1, -3, -1, 3, 2]으로 주어진다. 경계값으로 (b)를 사용한 경우에도 같은 방법으로 복원을 할 수 있으며, 이때 복원된 신호는 원신호와 정확히 같게된다.

이 알고리즘은 정리2에서 유일한 해가 있는 것으로 판정이 되었으나, 기준신호의중심이 구하는 신호의 중심과 같아서 A장의 알고리즘으로 구할 수 없는 신호의 복원에도 이용될 수 있다. 하지만, 이장에서 개발된 알고리즘을 이용하면 2개의 신호가 나오므로, 이중 1개만이 원하는 신호가 되고, 다른 하나는 원하는 신호가 아니다. 이 두 신호 중, 원하는 신호를 찾아내기 위해서는 적당한 판단 기준을 만들어,이 기준에 만족하는 해는 원하는 신호로 결정하고, 아니면 버리는 한가지의 과정이 더 포함되게 된다.

2. Iterative 알고리즘의 개발

Iterative 알고리즘을 개발하기 전에, 먼저 자기상관함수의 차이함수인 $r_{yxh}(k)$의 해를 iterative한 방법으로 구하는 알고리즘을 고려한다. 식 (2)으로부터, 주파수 영역에서의 차이함수는 다음의 식

$$R_{yxh}(e^{jw})=X^*(e^{jw})H(e^{jw})+X(e^{jw})H^*(e^{jw}) \qquad (7)$$

로서 주어진다. 여기서, $H(e^{j\omega})$는 더해지는기준함수 $h(n)$이다. $R_{yxh}(e^{j\omega})$은

$$R_{yxh}(e^{jw})=\left|Y^*(e^{jw})\right|^2-\left|X(e^{jw})\right|^2-\left|H(e^{jw})\right|^2$$

로서 주어지고, $|Y(e^{j\omega})|$와 $|X(e^{j\omega})|$ 및 $|H(e^{j\omega})|$는 주어진 정보라고 가정했기 때문에, (7)의 좌변은 모두 주어진 값들이다. 이 방정식 (7)의 해는 successive approximation 방법으로 구할 수 있다. Successive approximation 방법에 의한 update 방정식은

$$X_{k+1}(e^{jw})=X_k(e^{jw})+\beta(w)$$
$$\cdot\left[R_{yxh}(e^{jw})-X_k(e^{jw})H^*(e^{jw})-X_k^*(e^{jw})H(e^{jw})\right].$$

여기서, $\beta(\omega)$는 수렴 속도를 결정하는 함수로서, ω의

함수이다. 여기에, k번째 단에서의 에러 $E_k(e^{j\omega})$를

$$E_k(e^{jw}) = R_{yxh}(e^{jw}) - X_k(e^{jw})H^*(e^{jw}) - X_k^*(e^{jw})H(e^{jw}),$$

라고 가정하면, $(k+1)$번째의 에러의 절대값은 각 ω 값에 대하여

$$\left|E_{k+1}(e^{jw})\right| = \left|1 - 2\,\mathrm{Re}[\beta(w)H(w)]\right|^{k+1}\left|E_0(e^{jw})\right|$$

로서 주어진다. 따라서,

$$\left|1 - 2\,\mathrm{Re}\left[\beta(w)H(e^{jw})\right]\right| < 1$$

이면, k가 증가함에 따라 에러함수 $|E_k(e^{j\omega})|$는 0으로 수렴한다. 여기서, $\beta(\omega)$를

$$\beta(w) = sign\left\{\mathrm{Re}\left[H(e^{jw})\right]\right\}\cdot\beta_0$$

라고 정의하고, β_0가

$$0 < \beta_0 < 1/\left|\mathrm{Re}\left[H(e^{jw})\right]\right|$$

의 조건을 만족하면, $|E_k(e^{j\omega})|$는 k가 증가함에 따라, 각 ω에서 0으로 수렴한다. $|E_k(e^{j\omega})|$이 모든 ω값에 대하여 수렴하기 위해서는 β_0는

$$0 < \beta_0 < \min\left\{1/|\mathrm{Re}\left[H(e^{jw})\right]|\right\} = 1/\max_w\left\{|\mathrm{Re}\left[H(e^{jw})\right]|\right\}$$

를 만족해야 하고, 이때 $|E_k(e^{j\omega})|$는 0으로 수렴한다.

하지만, $E_k(e^{j\omega})$가 0으로 수렴한다는 것은 반드시 $X_k(e^{j\omega})$가 원하는 신호로 수렴한다는 것을 의미하지는 않는다. 사실, 방정식 (7)를 만족하는 해는 무한히 많이 있다. 하지만, 전체 시스템이 정리2 또는 정리3을 만족하면, 이들 중에 주어진 푸리에 변환의 크기 $|X(e^{j\omega})|$를 만족하는 신호는 하나밖에 존재하지 않는다. 따라서, 여기에 successive approximation 방법에 푸리에 크기 $|X_{k+1}(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$를 제한 조건으로 주면, 전체적인 알고리즘은 유일한 해를 갖게 되고, 따라서 원하는 신호에 수렴할 수 있게 된다. 주파수 영역에서의 푸리에 크기의 제한조건 외에, 공간영역에서는 유한 신호영역 제한조건, 양의 신호값의 제한조건등을 이용할 수 있으며, 이들 제한조건들은 각 단에서의 신호를 푸리에 변환과 역푸리에 변환을 번갈아 하면서 만족시키도록 할 수 있다. 예측된 신호를 푸리에 변환과 역푸리에 변환을 번갈아 수행하면서, 각종 제한조건을 만족시키는 것은 Gerchberg-Saxton 알고리즘의 기본 골격이므로, 여기서 개발된 알고리즘은 successive approximation과 Gerchberg-Saxton 알고리즘의 합성으로 되어있다고 볼 수 있다. 그림 2에 개발된 iterative 알고리즘의 구성도를 보였다.

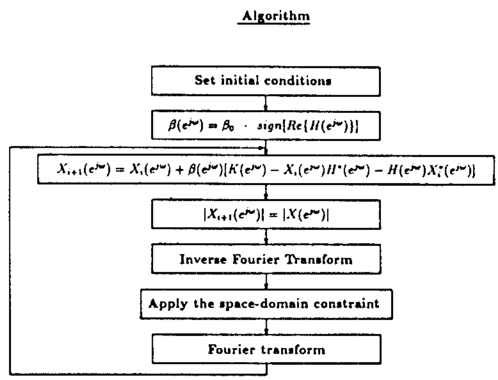


그림 2. 이 논문에서 개발된 Iterative 알고리즘
Fig. 2. The iterative algorithm developed in this paper.

(a) (b)

그림 3. Iterative 알고리즘을 이용하여 복원한 신호
Fig. 3. Reconstructed signal using the iterative algorithm.

예제 3. 그림 3 (a)는 128×128의 원신호이며, 그림 3 (b)는 역시 위의 알고리즘을 50번 반복한 뒤의 결과이다. 이 경우의 기준신호 $h(m,n)$는

$$h(m,n) = \begin{cases} 256 & (m,n) \in [10,11]\times[10,11] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

를 사용하였다. 이때의 $Re\{H(e^{j\omega})\}$의 최대값은 256*4 = 1024으로서 수렴상수 β_0는

$$0 < \beta_0 < 1/1024 = 9.7656\cdot 10^{-4}$$

의 안에 있어야 하고, 이 경우에는 $\beta_0 = 4\cdot 10^{-4}$으로 선택하였다. 이 경우의 신호 대 잡음의 비는 26 dB

이었다.

그림 4는 공간 영역에서의 세가지 알고리즘, (즉, successive approximation, Gerchberg-Saxton 알고리즘, 여기서 개발된 알고리즘)의 수렴특성을 나타내는 그림으로, 복원된 신호의 NMSE (Normalized Mean-Squared Error)를 나타낸다. 여기서, 공간영역에서의 normalized mean-squared 에러 ($NMSE_{time}$)는

$$NMSE_{time} = \frac{\sum |x_r(n) - x_0(n)|^2}{\sum |x_0(n)|^2}$$

으로 정의되었고, 여기서, $x_r(n)$는 복원된 신호를, $x_o(n)$는 원래의 신호를 나타낸다. 이 그림에서 알 수 있듯이, Gerchberg-Saxton 알고리즘은 (실선으로 표시) 원하는 신호에 수렴도, 발산도 하지 않았고, successive approximation (점선으로표시)은 발산함을 알 수 있다. 하지만, 이 논문에서 개발된 알고리즘 (dashedline)은 원하는 신호에 수렴하는 것을 알 수 있다.

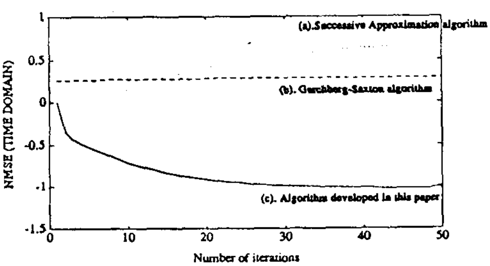


그림 4. 수렴성 비교 : (a) Successive approximion 알고리즘 (b) Gerchberg Saxton 알고리즘 (c) 이 논문에서 개발된 알고리즘

Fig. 4. comparision of the convergence property among (a) Successive Approximation alorithm (b) the Gerchberg-Saxton Algorithm and (c) the iterative algorithm developed in this paper.

Ⅲ. 결 론

이 논문에서는 더해지는 기준신호를 이용한 신호복원'의 Ⅱ부로서, 원하는 다차원 신호의 푸리에 크기와 원하는 신호에 알고 있는 기준신호가 더해진 신호의 푸리에 변환의 크기의 정보가 주어졌을 때, 원하는 신호가 주어진 정보로부터 결정되고, 복원될 수 있는가에 대하여 알아보았다. Ⅰ부에서는 주어진 조건으로부터 원하는 신호가 유일하게 결정이 될 수 있는가에대하여 알아보았고, Ⅱ부에서는 원하는 신호를 어떻게 구하는 가에 대하여 알아보았다.

먼저 Ⅰ부의 결과에 따르면, 주어진 조건으로부터 결정되는 신호는 최대로 2개 밖에 존재하지 않는다.

먼저 non-iterative 알고리즘으로 원하는 신호를 구하는 알고리즘을 구하는 경우를 보면, 첫째로, 원하는 신호가 유일하게 결정이 되는 경우에 기준신호가 점신호함수이면, 더해진 신호, 원하는 신호, 및 기준신호의 자기상관함수의 차이 신호는 원하는 신호와 원하는 신호를 180도 회전한 신호를 서로 겹쳐 놓은 것과 같은 형상을 하고 있고, 따라서 원하는 신호의 일부는 윈도우를 사용하여 구할 수 있다. 나머지 부분은 차이신호와 원하는 신호의 자기상관 함수로부터 선형 방정식을 풀어서 구할 수 있다. 이 개념은 기준신호가 점신호가 아닌 일반적인 신호에 대하여도 확장할 수 있다.

원하는 신호가 유일하게 결정이 안되는 경우에도 단지 2개의 신호만이 원하는 신호가 되기위한 후보가 되므로, 이들 신호들도 구할 수 있다. 먼저, 원하는 신호의 자기상관함수와 자기상관함수들의 차이함수로부터 원하는 신호의 두 경계값의 합과 곱을 구할 수 있고, 이를 이용하여, 2차 방정식을 꾸밀 수 있다. 이 방정식을 풀면, 2쌍의 경계값들이 구해지고, 이를 이용하여 행렬방정식을 만들어 풀면, 2개의 신호를 구할 수 있다.

Iterative 알고리즘으로 원하는 신호를 구하는 경우, 자기상관함수의 차이함수의 해를 구하는 알고리즘을 successive approximation 방법을 이용하여 구할 수 있고, 여기에 푸리에 크기 조건을 만족하는 신호, 즉, 원하는 신호로 알고리즘이 수렴하도록 하기위하여 Gerchberg-Saxton 알고리즘을 접합하였다.

參考文獻

[1] G. N. Ramachandran and R. Srinivasan. "Fourier Methods in Crystallography" Wiley-Interscience, 1970.

[2] A. V. Oppenheim and J. S. Lim. "The importance of phase in signals" *Proceedings of the IEEE*, 69:pp529-541, May 1981.

[3] M. H. Hayes. "The reconstruction of a

multidimensional sequences fromthe phase or magnitude of its Fourier transform". *IEEE Trans.. Accoust.. Speech. and Signal Process.* ASSP-39 (2):pp 140-154. April 1982.

[4] 김 우식. 더해지는 기준신호를 이용한 위상복원: Ⅰ. 이론". 전자공학회지.

[5] R. W. Schafer. R. M. Mersereau. and M. A. Richards. Constrainediterative restoration algorithms". *Proceedings of the IEEE*. 69(4):pp432-450. April 1981.

著者紹介

金 禹 植(正會員)

1961年 3月 8日生. 1984年 2月 서울대학교 전자공학과 졸업(학사). 1986年 2月 서울대학교 전자공학과 졸업(석사). 1991年 9月 미국 G.I.T. 전기공학과 졸업(박사). 1992年 9月 ~ 1993年 12月 서울대학교 의과대학부설 의공학연구소, 특별연구원. 1993年 12월 ~ 현재 한국통신 시스팀 개발 센터. 선임연구원. 주관심 분야는 Digital signal Processing 및 그의 응용 (X-ray crystallography. (광학. 천문학). 의공학. 통신(VOD 및 ADSL). Computer Graphics. Spectrum Estimation 등임.