論文94-31B-2-3

Linear Combination of Weighted Order Statistic 필터의 분석과 구현

(Analysis and Implementation of Linear Combination of Weighted Order Statistic Filters)

宋 鍾 官*, 李 勇 勳*

(Jong Kwan Song and Yong Hoon Lee)

要 約

스택 필터의 확장으로 볼 수 있는 linear combination of weighted order statistic(LWOS)필터는 이진 영역에서 모든 Boolean 함수(BF) 및 그의 확장인 extended Boolean 함수(EBF)를 나타낼 수 있다. 이 논문에서 우리는 주어진 BF 또는 EBF와 동일한 LWOS 필터들 중에서 가장 간단한 형태의 LWOS 필터를 찾아내는 방법을 제시하였다. 또한 LWOS 필터의 구현에 유용한 성질을 유도하고 LWOS 필터링 알고리듬을 제안하였다.

Abstract

Linear combination of weighted order statistic(LWOS) filters, which is an extension of stack filters, can represent any Boolean function(BF) or its extension, which is called the extended BF(EBF). In this paper, we present a procedure for finding an LWOS filter of the simplest type from LWOS filters which are equivalent to a given BF or EBF. In addition, a property that is useful for implementing an LWOS filter is derived and an algorithm for LWOS filtering is presented.

Ⅰ. 서 론

LWOS 필터[1]는 weighted order statistic (WOS) 필터[2][3]와 linear combination of order statistic(LOS) 필터[4][5]의 조합인 디지틀 필터이다. 이 필터는 입력 데이터 위를 움직여 가는 윈도우(window)를 가지고 있다. 각 위치에서 출력값은 WOS 필터링에서와 같이 윈도우 안의 입력 데이타들을해당하는 가중치 만큼 반복하여 늘어놓은 다음 이들을 크기 순으로 정렬한 후 이들 정렬된 데이타들의 선형 조합을 통하여 구해진다(그림 1 참조).

*正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科
(Dept. of Electrical Eng., KAIST)
接受日字 : 1993年 1月 21日

LWOS 필터는 threshold decomposition 성질[6]을 가지며 따라서 이진 영역 특성에 의해필터 특성이 완전히 결정된다. 역으로 어떤 Boolean 함수(BF) 또는 그의 확장인 extended Boolean 함수(EBF)라도 모든입력이 0일 때 0을 출력으로 낸다면 LWOS 필터로 나타낼 수 있다. 이러한 사실은 LWOS 필터가 비선형 스택 필터[2]와 선형 FIR 필터를 포함한 많은 종류의 필터들을 나타낼 수 있음을 의미한다. [1] 에서는 주어진 BF 또는 EBF에 대응하는

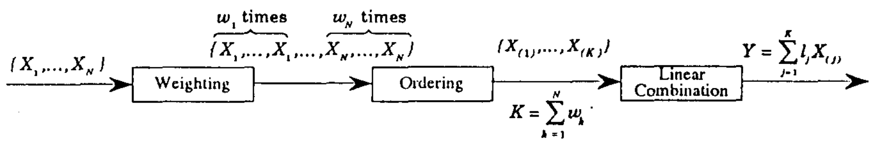


그림 1. LWOS 필터링. 여기서 X_i는 윈도우의 왼쪽으로부터 i번째 샘플이고, $X_{(j)}$는 j번째 큰 샘플이며 $w = (w_1, \cdots, w_N)$, $l = (l_1, \cdots, l_K)$이다

Fig. 1. LWOS filtering. Here X_i is the i-th sample from the left of the window. $X_{(j)}$ is the j-th largest sample. $w = (w_1, \cdots, w_N)$ $l = (l_1, \cdots, l_K)$.

LWOS 필터를 찾는 방법을 보였다. 이러한 방법에 의하여 구해진 LWOS 필터는 표준형 LWOS 필터(canonical LWOS filter)라고 하는특정한 형태를 갖게 된다.

표준형 LWOS 필터가 BF 또는 EBF를 나타내는데 유용하지만 윈도우 크기가 N인 표준형 LWOS 필터의 선형조합벡터(그림 1에서 l)는 dimension이 $2^N - 1$로 매우 크기 때문에 많은 계산 량을 요구하게 된다. 이 논문에서 우리는 많은 경우에 BF 또는 EBF를 표준형 LWOS 필터보다 간단한 형태의 LWOS 필터로 나타낼 수 있음을 보였다. 또한 LWOS 필터의 구현 알고리듬을 제시하였다.

이 논문의 구성은 다음과 같다.

2절에서는 LWOS 필터에 대하여 간단히 설명하고 논문에서 사용될 표기법(notation)을 소개한다. 3절에서는 BF 또는 EBF에 해당하는 LWOS 필터를 찾는 방법을 제시한다. 4절에서는 LWOS 필터의 구현에 유용하게 사용될 수 있는 성질을 유도하고 필터링 알고리듬을 제안한다.

Ⅱ. LWOS 필터들

$\{0, 1, \cdots, M-1\}$의 값을 가지는 입력 신호를 $X(m)$이라 하자. 입력 신호 $X(m)$ 위를 움직이는 크기가 N인 윈도우를 갖는 LWOS 필터의가중치를 w_i, $1 \le i \le N$, 그리고 선형 조합 계수를 l_j, $1 \le j \le K$라고 할 때 출력 $Y(m)$은 다음과 같이 주어진다.

$$Y(m) = \sum_{j=1}^{K} l_j \cdot [j^{th} \, Largest\{\overbrace{X_1(m),\ldots,X_1(m)}^{w_1 \, times}, \overbrace{X_2(m),\ldots,X_2(m)}^{w_2 \, times},\ldots,\overbrace{X_N(m),\ldots,X_N(m)}^{w_N \, times}\}] \quad (1)$$

여기서 $X_i(m)$은 시간 계수 m에서 윈도우의 왼쪽에서 j번째 되는 입력 값이며 $K=\sum_{i=1}^{N} w_i$ 이다. 지금부터는 수식을 간단히 하기 위해 $X_i(m)$ 와 $Y(m)$에서 시간 계수 m을 제외시키겠다. 벡터 표기법을 이용하여 (1)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y = \sum_{j=1}^{K} l_j \cdot [j^{th} Largest\{W(X)\}] = l \cdot W'_{OS}(\mathbf{X}) \quad (2)$$

여기서 $W(\cdot)$은 다음과 같이 정의되는 반복 연산자이다.

$$W(\mathbf{X}) = \{\overbrace{X_1,\ldots,X_1}^{w_1 \, times}, \overbrace{X_2,\ldots,X_2}^{w_2 \, times},\ldots,\overbrace{X_N,\ldots,X_N}^{w_N \, times}\} \quad (3)$$

$W_{os}(\boldsymbol{X})$는 $W(\boldsymbol{X})$의 원소들을 크기 순으로 정렬하여 얻어지는 벡터이며 prime(′)은 벡터의 transpose를 나타낸다. LWOS 필터가 threshold decomposition 성질을 만족하므로 출력 Y는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Y = l \cdot W'_{OS}(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^{M-1} l \cdot W'_{OS}\{I_k(\mathbf{X})\} \quad (4)$$

여기서 $I_k(\boldsymbol{X})$는 $I_k[X]=\{I_k[X_1], \cdots, I_k[X_n]\}$이며 $I_k(x)$는 indicator 함수로 $x \ge k$ 이면 1이고 그 외는 0이다. 스택 필터에서와 같이 LWOS 필터도 이진(0 또는 1)영역에서 특성이 완전히 결정된다. 이진 입력 벡터 $x=(x_1, \cdots, x_N)$에 대한 LWOS 필터의 출력 y는 다음과 같다.

$$y = l \cdot W'_{OS}(x) \quad (5)$$

여기서 $W_{os}(x)$는 연속된 1과 그 다음 나타나는 연속된 0으로 이루어지는 벡터이다. EBF $f(x)$.는 다음과 같이 정의된다.

$$f(x^i) = y^i, \quad 1 \le i \le P \quad (6)$$

여기서 $P=2^N-1$이고, x^i는 N차 이진 벡터로써 양의 정

수 i의 이진수 표현(radix 2 representation)이며 y^i는 x^i에 대한 f(·)에 대한 출력 값이다. 주어진 EBF를 나타낼 수 있는 LWOS 필터는 다음 조건을 만족하는 w와 l을 찾음으로써 구해진다.

$$l \cdot W'_{OS}\left(x^i\right) = y^i,\ 1 \le i \le P \tag{7}$$

이 식을 벡터와 행렬을 이용하여 다시 쓰면,

$$[A] \cdot l' = y' \tag{8}$$

여기서

$$[A] = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^{w_N\ times}0 & \cdots & 0 \\ \overbrace{1 \cdots 1}^{w_{N-1}\ times}0 & \cdots & 0 \\ \overbrace{1 \quad \cdots \quad 1}^{w_N + w_{N-1}\ times}0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \overbrace{1 \quad \cdots \quad 1}^{K\ times} & & \end{pmatrix},\quad y' = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ \vdots \\ y^P \end{pmatrix}$$

$K = \sum_{i=1}^{N} w_i$, [A] 행렬의 i 번째 행이 가지는 1의 개수는 $x^i \cdot w'$ 개이며 [A] 는 $P \times K$행렬이다. (7) 또는 (8) 식을 만족하는 w와 l이 존재하기 위한 충분 조건은 다음과 같다.

성질1 [1] :주어진 EBF에 대하여 LWOS 필터의 가중치 w가 다음의 두 가지 조건을 만족한다면 이 때 우리는 선형조합벡터 l을 유일하게 구할 수 있으며 이러한 w와l을 갖는 LWOS 필터는 주어진 EBF와 동일하다.

조 건: $w' \cdot x^i \ne w' \cdot x^j \quad i \ne j,\ 1 \le i, j \le P$ (9a)

$K=P$. (9b)

위의 두 조건이 만족되는 경우, 선형조합벡터 l은 (8) 식을 풀어서 구할 수 있다. 표준형 LWOS 필터는 선형조합벡터 l의 dimension인 K가 P와 같다는 점에서 가장 간단한 LWOS 필터이다. 표준형 LWOS 필터는 (9)의 조건을 만족하는 LWOS 필터들 중 하나로 다음과 같은 가중치 벡터를 갖는다.

$$w = \left(2^{N-1}, 2^{N-2}, \ldots, 2^0\right) \tag{10}$$

이러한 가중치 벡터에 대하여

$$[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\quad [A]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

이 성립하므로 l은 다음과 같이 주어진다.

$$l_i = \begin{cases} y^i & i = 1 \\ y^i - y^{i-1}, & 2 \le i \le P \end{cases} \tag{12}$$

표준형 LWOS 필터는 $f(\mathbf{0})=0$인 어떠한 EBF, f(x), 도 나타낼 수 있다. 다음절에서 우리는 어떤 EBF에 대하여 K가 P보다 작은 값을 가질 수 있음을 보이겠다.

Ⅲ. EBF에 대응하는 비표준형(non—canonical) LWOS 필터들

주어진 EBF $f(x)$의 출력 값 y^i와 $y^j, i \ne j, 1 \le i, j \le P$,가 같은 값을 갖는 경우, 즉 $f(x^i) = f(x^j)$,를 고려하자. 이 EBF를 나타내는 LWOS 필터는 (9a) 식을 만족하지 않을 수도 있다. $x^i \cdot w' = x^j \cdot w'$인 경우 $l \cdot W'_{OS}(x^i) = l \cdot W'_{OS}(x^j)$이며 이는 $y^i = y^j$를 의미한다. 따라서 $y^i = y^j$경우 $x^i \cdot w' = x^j \cdot w'$ 인 가중치 벡터도 가능하다. (9a) 조건은 모든 EBF를 표현하기 위한 조건이므로 모든 y^i, $1 \le i \le P$,가 서로 다르다는 가정 하에서 유도된 것이다. 주어진 EBF의 몇 몇 출력 값들이 동일한 경우 종종 이에 대응하는 비표준형 LWOS 필터를 찾는 것이 가능하고 이렇게 구해진 필터는 표준형 LWOS 필터보다 간단하다. 이러한 LWOS 필터를 찾는데 기초가 되는 성질을 다음에 보였다.

성질 2: 주어진 EBF에 대하여 LWOS 필터의 가중치 w가 다음의 두 가지 조건을 만족한다면 이 때 우리는 선형조합벡터 l을 유일하게 구할 수 있으며 이러한 w와 l을 갖는 LWOS 필터는 주어진 EBF와 동일하다.

조 건:

(i) $f(x^i) \ne f(x^j)$인 경우 $x^i \cdot w' \ne x^j \cdot w'$. 그러나 $f(x^i)=f(x^j)$인 경우에는 $x^i \cdot w'$와 $x^j \cdot w'$가 같을 수 있다.

(ii) $\left\{x^i \cdot w' | 1 \le i \le 2^N - 1\right\} = \{1, 2, \ldots, K\}$. 여기서 $K = \sum_{i=1}^{N} w_i$ 이고 이는 P보다 작을 수 있다.

증명: 표준형 LWOS 필터(K = P)는 분명 이들 조건을 만족한다. 단지 두 출력 값만이 서로 같고 그 외는 모두 다른 경우를 고려하자. 즉 어떤 i, j, $i \ne j$, 에 대하여 $f(x^i)=f(x^j)$이고 $\{n, m\} \ne \{i, j\}$인 모든 n, m에 대하여 $f(x^n) \ne f(x^m)$인 경우를 고려하자. 또한 $x^i \cdot w' = x^j \cdot w'$이고 $K=P-1$인 가중치 벡터로 (i)과 (ii) 조건을 만족하는 가중치 벡터를 찾을 수 있었다고 가정하자. 이 경우 (8) 식을 풀어서 주어진 EBF와 동일한 LWOS 필터의 l을 찾을 수 있다. 이 때 [A] 는 $P \times (P-1)$행렬이며 l과 y는 각각 (P-1)과 P 차 벡터이다. 여기서 [A] 행렬의 i번째와 j번째

행이 동일하고 y 벡터의 i번째 원소와 j번째 원소가 동일하다는 사실에 주목할 필요가 있다. 따라서 우리는 $[A]$의 i번째 행과 j번째 행 중 하나를 없애고 또한 그에 대응하는 y 벡터의 원소를 동시에 없앨 수 있으며 이에 따라 $[A]$는 $(P-1)\times(P-1)$ 행렬이 되고 y는 $(P-1)$의 벡터가 된다. 이렇게 dimension이 줄어든 $[A]$와 y를 $[\hat{A}]$와 $\hat{y}$으로 나타내면

$$[\hat{A}]\cdot l' = \hat{y}'. \tag{13}$$

$[\hat{A}]$의 모든 행 있는 연속된 1의 개수가 모두 다르다는 사실을 나타내는 조건 (ii)에 따라 square 행렬인 $[\hat{A}]$은 nonsingular이고 이 때 l은 유일하게 결정된다. (13)식은 근본적으로 (8)식과 동일하므로 이렇게 결정된 w와 l을 갖는 LWOS 필터는 주어진 EBF와 동일하다. 이러한 증명은 여러 개의 출력 값들이 같은 값을 갖는 경우로 바로 확장될 수있다.

주어진 EBF와 동일한 많은 LWOS 필터들 중에서 최소의 K를 갖는 LWOS 필터를 찾는 문제는 다음의 최소화 문제(minimization problem)으로 생각할 수 있다.

$$Minimize \sum_{i=1}^{N} w_i, \tag{14}$$

Under the conditions in **성질** 2

이 문제는 다음의 제한 조건들(constraints)을 만족하는 모든 x를 검토함으로써 풀 수 있다.

$$w_i \text{ are integers, } w_i \geq 1 \text{ for all } 1 \leq i \leq N$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \leq P = 2^N - 1$$

$$\text{At least one } w_i \text{ should equal to } 1$$

Under the conditions in **성질** 2 (15)

위에서 두 번째 제한 조건은 $K=P$인 표준형 LWOS 필터는 항상 주어진 LWOS 필터를 표현할 수 있다는 사실에 근거하며 세번째 제한 조건은 성질 2의 두번째 조건에 따른 것이다. 이들 중 앞의 세가지 제한 조건은 매우 간단히 검토할 수 있는 것이다. 먼저 $w=(1, 1, \cdots, 1)$로부터 시작하여 $\sum_{i=1}^{K} w_i$를 하나씩 증가시키며 이들 제한 조건을 모두 만족하는 가중치 벡터가 발견될 때까지 계속된다. 이렇게 하여 w를 구한 후에는 (13)을 이용하여 선형조합벡터 l을 구하게 된다. 성질 2의 두번째 조건에 따라 $[\hat{A}]$의 각 행들과 그에 대응하는 $\hat{y}$의 원소들을 적절히 바꾸어 줌으로써 은 lower triangular 행렬로 바꾸어 줄 수 있으며 [(11) 참조] 이 때 l은 (12)에서처럼 체계적으로 구해질 수 있다. 다음의 예제는 BF에 대한 LWOS 필터를 찾는 이러한 과정을 보여준다.

예제 1: $f(x)=x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3+x_1\cdot x_2\cdot x_3+\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3+\bar{x}_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3$의 BF를 고려하자. 이 BF에 대하여 (15)의 최소화 문제를 풀면 $w=(1, 1, 1)$을 구할 수 있다. 표 1에 이 BF에 대한 $\{x^i\cdot w'\}$을 나타내었다. $f(x^i)\neq f(x^j)$인 모든 i와 j에 대하여 $x^i\cdot w'\neq x^j\cdot w'$임을 볼 수 있다. 이 BF에 대한 입출력 관계는 (8)에서와 같이 행렬과 벡터를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

$[A]$ 행렬의 동일한 행들과 그에 대응하는 y의 원소를 동시에 없앰으로써 다음의 식을 얻게 되며

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

이로부터 $(l_1\, l_2\, l_3)=(1\ -1\ 1)$을 구할 수 있다.

여기에서 볼 수 있는 흥미로운 점은 구해진 $w=(1\ 1\ 1), l=(1\ -1\ 1)$의 LWOS 필터는 $Y=X_{(1)}+X_{(3)}-X_{(2)}$로 주어지는 LOS 필터라는 사실이다. 여기서 $X_{(j)}$는 윈도우 안에서 j번째 큰 데이타를 나타낸다. 따라서 주어진 BF는 LOS 필터이다.

일반적으로 스택 필터에 대한 BF 표현 식은 매우 길고 또한 다루기 어렵다. 이 절에서 보인 방법을 통

표 1. $f(x)=x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3+x_1\cdot x_2\cdot x_3+\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3+\bar{x}_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3$의 진리표

Table 1. Truth table of $f(x)=x_1\cdot\bar{x}_2\cdot\bar{x}_3+x_1\cdot x_2\cdot x_3+\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2\cdot x_3+\bar{x}_1\cdot x_2\cdot\bar{x}_3$.

i	x^i	y^i	$x^i w'$
1	(0,0,1)	1	1
2	(0,1,0)	1	1
3	(0,1,1)	0	2
4	(1,0,0)	1	1
5	(1,0,1)	0	2
6	(1,1,0)	0	2
7	(1,1,1)	1	3

해 우리는 스택 필터에 대한 LWOS 표현 식을 구할 수 있고 이는 종종 해당하는 BF 표현 식보다 단순한 형태를 갖는다.

Ⅳ. Multilevel 입력을 가진 LWOS 필터들

이 절에서는 LWOS 필터에 M-valued 입력 $\{X_1, \cdots, X_N\}$이 주어졌을 때 이에 대한 출력 Y는 N개의 입력 값들의 가중 평균(weighted average)으로 주어지며 이 때가중치들은 입력 값들에 따라 결정됨을 보일 것이다. 이 결과를 서술하는데는 입력들의 크기 등급(rank)과 시변수(time index)를 동시에 나타내면 편리하다. 크기 등급이 j인 입력 값의 시변수를 $q(j)$로 나타내면 $X_{q(1)} \geq \cdots \geq X_{q(N)}$이다. 예를 들면 $N=3$일 때 입력의 크기 순서가 $X_2 \geq X_3 \geq X_1$이면 $q(1) = 2$, $q(2) = 3$, $q(3) = 1$이다. 물론 $j \in \{1, \cdots, N\}$, $q(j) \in \{1, \cdots, N\}$이며 $i \neq j$일 때 $q(i) \neq q(j)$이다. 여기에서 각 입력을 모두 다른 크기 등급을 갖도록 한다. 어떤 입력들이 같은 값을 가질 때 이들의 크기 등급은 다르게 잡아야 되지만 어느 것을 크게 잡아도 관계없다. 예를 들어 $X_2 = X_3 > X_1$이면 $\{q(1)=2, q(2)=3, q(3)=1\}$이나 $\{q(1)=3, q(2)=2, q(3)=1\}$중 임의의 것을 선택하여도 된다. 이들 표기법을 이용하여 우리의 주된 결과를 다음에 보였다.

정리 1: 윈도우의 크기가 N인 표준형 LWOS 필터의 출력 값은

$$Y = \sum_{j=1}^{N} \left(y^{s(j)} - y^{s(j-1)} \right) \cdot X_{q(j)} \tag{17}$$

여기에서 이고 $w_{q(m)}$은 $X_{q(m)}$에 대응하는 가중치이며 $y^{s(j)}$와 $y^{s(j-1)}$은 각각 $s(j)$와 $s(j-1)$의 N차 이진수 표현들이 표준형 LWOS 필터의 입력일 때 발생되는 출력이다.

증명:

$$\begin{aligned} Y &= l \cdot W'_{OS}(X) \\ &= \left(\sum_{m=1}^{w_{q(1)}} l_m \right) \cdot X_{q(1)} + \left(\sum_{m=w_{(q)}+1}^{w_{q(1)}+w_{q(2)}} l_m \right) \cdot X_{q(2)} + \cdots \\ &\quad + \left(\sum_{m=w_{q(1)}+\cdots+w_{q(N-1)}+1}^{w_{q(1)}+\cdots+w_{q(N)}} l_m \right) \cdot X_{q(N)}. \end{aligned} \tag{18}$$

(12) 식을 이용하면,

$$\sum_{m=i}^{j} l_m = \sum_{m=i}^{j} \left(y^m - y^{m-1} \right) = y^j - y^{i-1}, \quad i \leq j.$$

따라서

$$\begin{aligned} Y &= \left(y^{w_{q(1)}} \right) \cdot X_{q(1)} + \left(y^{w_{q(1)}+w_{q(2)}} - y^{w_{q(1)}} \right) \cdot X_{q(2)} + \cdots \\ &\quad + \left(y^{w_{q(1)}+\cdots+w_{q(N)}} - y^{w_{q(1)}+\cdots+w_{q(N-1)}} \right) \cdot X_{q(N)} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left(y^{w_{q(1)}+\cdots+w_{q(j)}} - y^{w_{q(1)}+\cdots+w_{q(j-1)}} \right) \cdot X_{q(1)}. \end{aligned} \tag{19}$$

이 정리에서 $s(j)$는 입력의 크기 순서에 따라 결정된다. 이에 대한 예제는 아래에 주어진다.

예제 2: $N = 3$일 때 입력의 크기 순서가 $X_2 \geq X_3 \geq X_1$이면 $q(1)=2, q(2)=3, q(3)=1$이다. 따라서 $s(1)=w_2=2, s(2)=w_2+w_3=3, s(3)=w_2+w_3+w_1=7$이고 출력 $Y=(y^2-y^0) \cdot X_2+(y^3-y^2) \cdot X_3+(y^7-y^3) \cdot X_1$이다. $N = 3$이므로 가능한 입력의 크기 순서는 3! 가지가 되며 이 때 각 크기 순서에 대한 필터의 출력들을 표 2에 정리하였다.

표 2. $N=3$일 때 각 크기 순서에 대한 $s(j)$와 Y

Table 2. $s(j)$ and Y corresponding to each ordering when $N=3$.

ordering	$\{s(1), s(2), s(3)\}$	Y
$X_1 \geq X_2 \geq X_3$	$\{4, 6, 7\}$	$(y^4 - y^0)X_1 + (y^6 - y^4)X_2 + (y^7 - y^6)X_3$
$X_1 \geq X_3 \geq X_2$	$\{4, 5, 7\}$	$(y^4 - y^0)X_1 + (y^5 - y^4)X_3 + (y^7 - y^5)X_2$
$X_2 \geq X_1 \geq X_3$	$\{2, 6, 7\}$	$(y^2 - y^0)X_2 + (y^6 - y^2)X_1 + (y^7 - y^6)X_3$
$X_2 \geq X_3 \geq X_1$	$\{2, 3, 7\}$	$(y^2 - y^0)X_2 + (y^3 - y^2)X_3 + (y^7 - y^3)X_1$
$X_3 \geq X_1 \geq X_2$	$\{1, 5, 7\}$	$(y^1 - y^0)X_3 + (y^5 - y^1)X_1 + (y^7 - y^5)X_2$
$X_3 \geq X_2 \geq X_1$	$\{1, 3, 7\}$	$(y^1 - y^0)X_3 + (y^3 - y^1)X_2 + (y^7 - y^3)X_1$

표준형 LWOS 필터의 가중치 $w_m=2^{N-m}, 1 \leq m \leq N$, 들의 부분합(partial sum)인 $s(j)$와 $s(j-1)$은 LWOS 필터의 출력을 구하는데 유용한 몇 가지 성질을 가지고 있다.

보조정리 1: $s(j)$와 $s(j-1)$을 N차 이진수로 표현하고 이들을 각각 $\mathbf{s}_j$ 및 $\mathbf{s}_{j-1}$이라 하자. 이 때 $\mathbf{s}_j$와 $\mathbf{s}_{j-1}$은 다음과 같은 성질을 가진다.

(A) $\mathbf{S}_j$ 및 $\mathbf{S}_{j-1}$의 $q(j)$-th significant bit은 각각 1 및0이다.

(B) $\mathbf{s}_j$ 및 $\mathbf{s}_{j-1}$의 k-th significant bits, $k \neq q(j)$, 의 값은 같고 그 값은 $k \in \{q(1), \cdots, q(j)\}$이면 1이고 아니면 0이다.

증명: $w_m=2^{N-m}$이므로 w_m의 이진수 표현은 m-th significant bit 만 1이고 나머지 bit들은 모두 0이다. 따라서 $\mathbf{s}_j$의 k-th significant bit은 $k \in \{q(1), \cdots, q(j)\}$인 경우에만 1이 된다. 물론 $q(j) \in \{q(1), \cdots, q(j)\}$이므로 $\mathbf{s}_j$의 $q(j)$-th significant bit은 1이다. 반면에 $s(j-1) = s(j) - w_{q(j)}$이므로 $\mathbf{s}_{j-1}$의 $q(j)$-th significant bit은 0이며 $\mathbf{s}_{j-1}$의 k-th significant bit, $k \neq q(j)$, 은 $k \in \{q(1), \cdots, q(j-1)\}$일 때만 1이며 이는 $\mathbf{s}_j$의 k—th significant bit와 같은 값을

가진다.

스택 필터의 출력 값은 항상 입력 데이타 $(X_1, \cdots, X_N)$들 중 하나이므로 (17)식의 $y^{s(j)}-y^{s(j-1)}$은 어떤 한 j값에 대해서만 1이고 나머지 값들에서는 0이 된다.

성질3: 스택 필터의 경우에는 어떤 $j, 1 \le j \le N$, 에 대하여 $y^{s(j)}-y^{s(j-1)} = 1$이고 그 외의 모든 i, $i \ne j$, $1 \le i \le N$에 대하여는 $y^{s(i)}-y^{s(i-1)} = 0$이다.

증명: 이진 스택 필터의 출력 값은 0 또는 1이며, stacking 성질을 만족한다. 따라서 $y^{s(j)}-y^{s(j-1)}= 1$은 $y^{s(j)} = 1$이고 $y^{s(j-1)} = 0$임을 의미한다. $i < j$인 임의의 i를 고려하자. $j > j-1 \ge i > i-1$이므로 $s(j) > s(j-1) \ge s(i) > s(i-1)$이며 $\mathbf{s}_j > \mathbf{s}_{j-1} \ge \mathbf{s}_i > \mathbf{s}_{i-1}$이다. 이러한 사실과 stacking 성질로부터 $y^{s(j)} \ge y^{s(j-1)} \ge y^{s(i)} \ge y^{s(i-1)}$임을 알 수 있으며 따라서 $y^{s(i)} = y^{s(i-1)} = 0$이다. 유사한 방법으로 $i > j$인 임의의 i에 대하여 $y^{s(i)} = y^{s(i-1)} = 1$임을 알 수 있다. 따라서 모든 i, $i \ne j$에 대하여 $y^{s(i)}-y^{s(i-1)} = 0$이다.

아래에 서술되는 바와 같이 이진 영역에서 PBF가 아닌 일반적인 BF로 나타내어지는 LWOS 필터의 경우 $y^{s(j)}-y^{s(j-1)}$은 -1의 값을 가질 수도 있다.

성질 4: 이진 영역에서 PBF가 아닌 BF, $f_{BF}(x)$, 로 주어지는 필터를 나타내는 LWOS 필터의 경우 (17)식의 $y^{s(j)}-y^{s(j-1)}$는 1또는 0또는 -1의 값을 가진다. 만일 어떤 입력의 크기 순서에 대하여 $y^{s(j)}-y^{s(j-1)}=-1$이라면 $f_{BF}(x)$은 $x_{q(j)}$의 보수(complement)인 $\bar{x}_{q(j)}$를 포함한다.

증명: f_{BF} (x)의 출력은 0 또는 1이므로 $y^{s(j)}-y^{s(j-1)}$이 0 또는 1 또는 -1의 값을 갖는다는 것은 당연하다. 어떤 j에 대하여 $y^{s(j)}-y^{s(j-1)}= -1$이라고 가정하자. f_{BF} (x)은 항상 $f_{BF}(x) = x_{q(j)} \cdot q_1(x) + \bar{x}_{q(x)} \cdot q_2(x) + q_3(x)$ 의 sum-of-product형태로 쓸 수 있다. 여기서 $g_3(x)$는 $x_{q(j)}$와 $\bar{x}_{q(j)}$중 어느 것도 포함하지 않는 곱셈 항(product term)들을 나타내고 $x_{q(j)} \cdot g_1(x)$와 $\bar{x}_{q(j)} \cdot g_2(x)$는 각각 $x_{q(j)}$와 $\bar{x}_{q(j)}$를 포함하는 곱셈 항들을 나타낸다. 물론 $g_1(x)$와 $g_2(x)$는 $x_{q(j)}$와 $\bar{x}_{q(j)}$를 포함하지 않는다. 보조 정리 1 (A)로부터 $y^{s(j)} - y^{s(j-1)} = g_1(s_j) - g_2(s_{j-1})$이며 $y^{s(j)} = f_{BF}(sj-1) = g2(sj-1) + g3(sj-1)$ 이다. 그러나 $g_3(x)$는 $x_{q(j)}$와 $\bar{x}_{q(j)}$ 을 포함하지 않으므로 $g_3(s_j)=g_3(s_{j-1})$이다 [보조 정리 1 참조] . 따라서 $y^{s(j)} - y^{s(j-1)} = g_1(s_j) = g_1(s_j) = g_2(s_{j-1})$ 이므로 $y^{s(j)} - y^{s(j-1)} = -1$ 라는 사실은 $g_1(s_j)=0$이고 $g_2(s_{j-1})=1$임을 말한다. 이러한 사실로부터 우리는 $f_{BF}(x) = x_{q(j)} \cdot q_1(x) + \bar{x}_{q(x)} \cdot q_2(x) + q_3(x)$ 에서 $g_2(x) \ne 0$임을 알 수 있고 이는 곧 $f_{BF}(x)$가 $\bar{x}_{q(j)}$를 포함한다는 사실을 나타낸다.

FIR 필터에서는 $y^{s(j)}-y^{s(j-1)}$이 임펄스 응답 $h_{q(j)}$와 같다는 사실이 다음 성질에서 보여진다.

성질 5: 임펄스 응답이 $h=(h_1, \cdots, h_N)$이고 출력이 $Y=\boldsymbol{X} \cdot h'$으로 주어지는 선형 FIR 필터에서는 $y^{s(j)}-y^{s(j-1)}=h_{q(j)}$이 된다.

증명 : $Y=\boldsymbol{X} \cdot h'$이므로 $y^{s(j)}-y^{s(j-1)}=(s_j-s_{j-1}) \cdot h'$이다. 이 때 s_j-s_{j-1}은 $q(j)$-th significant bit 만 1이고 나머지는 모두 0인 N 차 이진 벡터가 된다.

비록 정리 1이 표준형 LWOS 필터에 대하여 유도되었지만 이 결과는 일반적인 LWOS 필터의 출력을 구하는데 사용할 수 있다. 왜냐하면 임의의 LWOS 필터는 항상 표준형 LWOS 필터로 표현될 수 있기 때문이다. 주어진 LWOS 필터의 확장된 진리표를 구한 후에는 (1) 식의 w를 사용하여 바로 (17) 식을 계산할 수 있다.

정리 1의 결과는 LWOS 필터의 출력을 계산하는데 유용하게 사용될 수 있다.

정리 1의 결과를 사용하여 LWOS 필터의 출력을 구하는 과정을 아래에 보였다.

LWOS 필터의 출력을 구하기 위한 알고리듬

1단계 : 입력 데이타 $X_1, \cdots, X_N$을 크기 순으로 배열한다.

2단계 : $s(j), 1 \le j \le N$, 을 구한다.

3단계 : $y^{s(j)}, 1 \le j \le N$, 을 계산한다.

4단계 : 식 (17)을 이용하여 출력 Y를 계산한다.

이 알고리듬에서 1단계는 running sorting 알고리듬[5] 을 사용할 때 $O(N)$ 비교 연산(comparison)으로 구현될 수 있다. 2단계에서 각 $s(j), 1 \le j \le N$, 는 j번의 swapping 연산으로 얻어진다. 3단계는 LWOS 필터의 확장된 진리표를 메모리에 저장하여 두면 쉽게 구현된다. 4단계의 연산이 $O(N)$곱셈 연산 및 덧셈 연산으로 수행된다는 것은 자명하다. LWOS 필터를 직접 구현할 때는 $O(N)$비교 연산 외에 각각 K개의 곱셈 연산 및 덧셈 연산을 필요로 한다. K는 선형조합벡터의 dimension이므로 $K \ge N$이다. 따라서 이 알고리듬은 $K \gg N$인 경우에 직접 구현 방식보다 매우 효율적이다.

V. 결 론

이 논문에서는 주어진 BF 또는 EBF에 대응되는 LWOS 필터들 중 가장 간단한 LWOS 필터를 찾는 방법을 제시하고 효율적인 구현 알고리듬을 제안하였다. 표준형 LWOS 필터가 비선형 스택 필터와 선형 FIR 필터를 포함한 많은 종류의 필터들을 일관된형태로 표현할 수 있으므로 필터 해석에 매우 유용하지만 많은 계산량을 요구하므로 실제구현에 어려움이 있다. 그러나 특정한 BF 또는 EBF를 구현할 때는

이 논문에서 제시한 방법을 통하여 표준형 LWOS 필터보다 간단히 구현할 수 있으며 이는 스택 필터의 구현에도 사용될 수 있다. 현재 제시된 방법들을 스택 필터 구현에 응용하는 방법 및 영상 처리에 LWOS 필터를 응용하는 방법에 대한 연구가 진행되고 있다.

參考文獻

[1] J. Song and Y. H. Lee, "Linear combination of weighted order statistic-filters: An extension of stack filters," *Proc. 26th Annual Conf. on Information Sciences and Systems*, Princeton, NJ, March 1992, *also submitted to IEEE Trans. Circuits and Syst*

[2] P. D. Wendt, E. J. Coyle, and N. C. Gallagher Jr., "Stack filters," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp. 898—911, Aug. 1986.

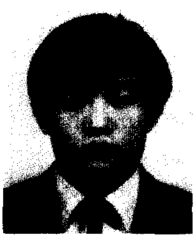
[3] O. Yli—Harja, J. Astola, and Y. Neuvo, "Analysis of the propertiesof weighted median filters using threshold logic and stack filterrepre-sentation," IEEE Trans. Signal Processing, vol. SP—39, pp. 395—410, Feb. 1991.

[4] A. C. Bovik, T. S. Huang, and D. C. Munson, Jr., "A generalization of median filtering using linear combina-tions of order statistics," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Pro-cessing*, vol. ASSP—31, pp. 1342—1350, Dec. 1983.

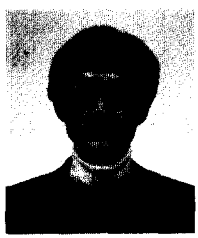
[5] I. Pitas, "Fast algorithms for running ordering and max/min calculation," *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, vol. CAS—36, pp.795—804, June 1989.

Captions of Figures and Tables

著者紹介



宋 鍾 官(正會員)
1966年 2月 18日生. 1989年 2月 부산대학교 전자공학과 졸업(공학사). 1991年 2月 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학 석사). 1991年 3月 ~ 현재 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정 재학중. 주관심 분야는 영상처리 및 통신 등임.



李 勇 勳(正會員)
1955年 7月 12日生. 1978年 2月 서울대학교 전기공학과 졸업(공학사). 1980年 2月 서울대학교 대학원 졸업(공학석사). 1984年 8月 Pennsylvania 대학 박사학위 취득. 1984年 ~ 1989年 버팔로 소재 뉴욕 주립대학 조교수로 근무. 1989年 이후 한국과학기술원 부교수로 재직. 주관심 분야는 일차원 및 이차원 디지탈 신호처리 등임.