

베이지안 추정법에 의한 소자의 수명 예측에 관한 연구

正會員 吳 宗 煥* 正會員 吳 英 煥**

A Study on the Lifetime Prediction of Device by the Method of Bayesian Estimate

Jong Hwan Oh*, Yong Hwan Oh** *Regular Members*

要 約

본 논문은 일반적으로 채택하고 있는 소자(device)의 수명분포인 와이불(Weibull) 분포를 적용하여 소자의 가속(accelerated) 수명 테스트에서 얻은 데이터, 즉 소자의 고장 시간을 이용하여 소자의 수명을 예측(prediction)하는데 필요한 모수(parameter)들을 추정 하는데 베이지안(Bayesian) 추정법을 이용하였다.

베이지안 추정법에서 모수를 추정하기 위해서는 사전정보가 있어야 하는데 본 논문에서는 사전정보 없이 현재의 정보만을 이용하여 모수를 추정하는 방법을 제안하였다.

스트레스가 온도인 경우, Arrhenius 모델을 적용하여 소자의 정상동작 상태에서의 수명을 예측 하는데 선형 추정을 하였다.

ABSTRACT

In this paper, Weibull distribution is applied to the lifetime distribution of a device. The method of Bayesian estimate used to estimate requiring parameter in order to predict lifetime of device using accelerated lifetime test data, namely failure time of device.

The method of Bayesian estimate needs prior information in order to estimate parameter. But this paper proposed the method of parameter estimate without prior information.

As stress is temperature, Arrhenius model is applied and the method of linear estimate is applied to predict lifetime of device at the state of normal operation.

*光云大學校 大學院 電子通信工學科
Kwang Woon University Graduate school Electronic Communication
論文番號 : 93165
接受日字 : 1993年 9月 3日

I. 서 론

일반적으로 소자를 정상 동작상태에서 성능을 테스트 하면 소자의 수명 데이터를 구하는데 오랜 시간이 필요하므로 가속 수명 테스트를 행한다. 소자의 수명을 예측하기 위해서는 가속 수명 테스트에서 얻은 데이터에 확률이론을 적용하여 수명분포로 나타낸다. 일반적으로 소자의 수명분포로는 와이불 분포를 사용한다. 소자의 수명분포를 해석하기 위한 방법으로는 그래프적인 해석방법(graphical analysis)⁽⁹⁾, 최소자승 추정법(method of least square estimate)⁽⁸⁾, 최우 추정법(method of maximum likelihood estimate)^(10,11), 베이지안 추정법(method of Bayesian estimate)⁽¹⁵⁾ 등이 제시되었다.

본 논문에서는 n개의 테스트 소자중 r개의 고장이 발생했을때 테스트가 끝나는 Type-II censoring 데이터에 대해서 베이지안 추정법을 적용 하였다. 베이지안 추정법을 제외한 다른 방법들은 우리가 추정하고자 하는 모수를 미지의 상수(unknown constant)로 놓고 해석하는데 반하여 베이지안 추정법은 이 모수가 임의의 확률분포를 갖는 확률변수로 놓고 해석한다. 또한 임의의 모수가 갖는 확률분포를 사전분포(prior distribution)라 하고 이들을 이용해 모수들을 추정한다. 기존의 논문에서는 이들 베이지안 추정법의 특성상 사전분포에 대한 사전정보가 있어야 한다. 그러나 본 논문에서는 현재의 데이터만을 이용하여 최우 추정법으로 구한 모수와 첫번째와 마지막 데이터를 이용하여 구한 모수와 이들의 RMS(root mean square) error를 사전정보로 적용하여 수명을 예측하는데 필요한 모수를 추정하였다.

소자의 가속 수명 테스트 데이터는 그 소자에 가해지는 스트레스에 의해 달라지는데 스트레스가 전압인 경우에는 Power Law 모델에 적용되고 스트레스가 온도인 경우에는 Arrhenius 모델이 적용 된다. 본 논문에서는 한예로 130℃의 온도에서 작동하도록 제작된 모터의 수명을 구하기 위해 170℃, 190℃, 220℃에서 각 10개씩의 모터를 가속수명 테스트하여 얻은 type-II censoring 데이터⁽⁶⁾를 이용하여 회귀 분석법으로 Arrhenius 모델의 모수들을 추정하여 정상상태 동작에서의 소자의 수명을 추정하였다.

II. 공액 분포족을 이용한 베이지안 추정 방법

일반적으로 소자의 수명분포의 확률밀도 함수는 다음과 같다.

$$f(t|\beta, \alpha) = (\alpha/\beta)(x/\beta)^{\alpha-1} \exp[-(x/\beta)^\alpha] \quad (1)$$

식 (1)에서 $\lambda = \beta^{-1/\alpha}$ 라고 하면,

$$f(t|\lambda, \alpha) = \alpha \lambda t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t^\alpha) \quad (2)$$

이다. 여기서,

α : 형태모수 (shape parameter)

λ : 크기모수 (scale parameter)

t : 소자의 고장시간

이다.

식 (2)에 대해 Type-II censoring 데이터에 대한 우도 함수(likelihood function)를 구하면

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n | \lambda, \alpha) = K \lambda^\alpha \alpha^r \left(\prod_{i=1}^r t_i^{\alpha-1} \right) \exp(-\lambda T_n) \quad (3)$$

와 같다. 여기서,

$$K = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$T_n = \left(\sum_{i=1}^r t_i^\alpha + (n-r)t_n^\alpha \right)$$

이다.

와이불 분포에서 두개의 모수 α, λ 를 임의의 확률분포를 갖는 확률변수로 보고 베이지안 추정법을 이용하여 모수를 추정하였다.

여기서 고려해야할 문제는 모수 λ 와 α 의 사전분포를 어떻게 놓느냐 하는 문제인데 다음과 같은 이유때문에 공액 분포(the family of natural conjugate)를 많이 이용한다.

- 1) 모수의 사전분포가 이 공액 분포족의 여러가지 형태중 한가지 형태로 표현 될 수 있다.
- 2) 공액분포를 사전분포로 사용하면 소자의 수명분포의 사전분포와 사후분포(posterior distribution)의 형태가 동일하므로 사후분포를 쉽게 알아낼

수 있고 또, 이 사후분포를 이용하여 수명분포의 모수추정이 간편하다.

따라서 공액분포를 갖는 모수들의 사전분포들은

$$\Pr\{\alpha = \alpha_j\} = p_j \quad (4)$$

$$g(\lambda|\alpha_j) = \frac{a_j^{b_j} \lambda^{b_j} \exp(-\lambda a_j)}{\Gamma(b_j + 1)} \quad (5)$$

$$j=1, 2, \dots, m \quad 0 \leq \lambda, \quad a_j, \quad b_j \leq \infty$$

와 같다. 여기서 식 (3), (4), (5)를 조건부 밀도함수를 이용하여 각 모수 λ, α 의 사후분포를 구해보면

$$\begin{aligned} \Pr\{\alpha = \alpha_j | t_1, t_2, \dots, t_n\} &= p_j' \\ &= \frac{\int_0^\infty L(t_1, t_2, \dots, t_n | \lambda, \alpha_j) f(\lambda | \alpha_j) \Pr\{\alpha = \alpha_j\} d\lambda}{\sum_{j=1}^m \int_0^\infty L(t_1, t_2, \dots, t_n | \lambda, \alpha_j) f(\lambda | \alpha_j) \Pr\{\alpha = \alpha_j\} d\lambda} \\ &= \frac{\frac{\alpha_j^r a_j^{b_j} p_j}{\Gamma(b_j)} \left(\prod_{i=1}^m t_i^{\alpha_j-1}\right) \frac{\Gamma(r+b_j)}{(Tn_j+a_j)^{r+b_j}}}{\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j^r a_j^{b_j} p_j}{\Gamma(b_j)} \left(\prod_{i=1}^m t_i^{\alpha_j-1}\right) \frac{\Gamma(r+b_j)}{(Tn_j+a_j)^{r+b_j}}} \quad (6) \\ f(\lambda | t_1, t_2, \dots, t_n, \alpha_j) &= \frac{(Tn_j+a_j)^r + b_j \lambda^{r+b_j-1}}{\Gamma(r+b_j)} \\ &\quad \exp[-\lambda(Tn_j+a_j)] \quad (7) \end{aligned}$$

와 같다. 여기서 각모수의 추정치는 사후분포의 기대값이 되므로

$$\hat{\alpha}_M = \sum_{j=1}^m p_j' \alpha_j \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_M &= \int_0^\infty \lambda \left[\sum_{j=1}^m \Pr\{\alpha = \alpha_j | t_1, t_2, \dots, t_n\} f(\lambda | t_1, t_2, \dots, t_n, \alpha) \right] d\lambda \\ &= \sum_{j=1}^m p_j' \alpha_j \frac{r+b_j}{Tn_j+a_j} \quad (9) \end{aligned}$$

가 된다. 따라서 소자의 수명분포의 각 모수를 구할 수 있다.

여기서 식 (9)의 크기모수 추정값들은 Tn_j 의 값에 많은 영향을 받아 Tn_j 의 값들의 변화가 큰 경우에는 부정확한 추정값들이 구해짐으로 본 논문에서는 식

(8)에서 구한 형태모수의 추정값들을 이용하여 최우 추정법으로 크기모수를 추정하였다.

III. 사전 분포의 모수 추정

식 (8), (9)에서 각 모수의 추정값 $\hat{\alpha}_M, \hat{\lambda}_M$ 를 구하려면 사전분포의 모수 α_j, p_j, a_j, b_j 를 알아야 된다. 기존의 논문에서는 α_j, p_j 를 구하는데 과거에 동일하거나 특성이 같은 소자의 추정값들을 이용하였으나 본 논문에서는 현재의 가속수명 테스트에 의해 얻어진 데이터에 의해서 이 값들을 구하였다.

여기서 α_j 값들은 최우 추정법에 의해 구한값과 실험 데이터의 첫번째 값과 마지막 값을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^r t_i^{\alpha_1} \ln(t_i) + (n-r) t_n^{\alpha_1} \ln(t_n)}{Tn_1} &= \frac{1}{\alpha_1} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n \ln(t_i) \quad (10) \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = \frac{r}{Tn_1} \quad (11)$$

$$\alpha_2 = \frac{\ln[-\ln(1-F_1)] - \ln[-\ln(1-F_r)]}{\ln(t_1) - \ln(t_r)} \quad (12)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\ln(1-F_1)}{t_1^{\alpha_2}} \quad (13)$$

α_1, λ_1 : 최우추정법에 의해 추정된 모수

α_2, λ_2 : 단순 데이터에 의해 추정된 모수 또한 그래프의 위치는

$$F_j = \frac{i-0.3}{n+0.4} \quad (14)$$

와 같이 중앙순위 (median rank)를 이용하였다⁽⁶⁾.

다음 p_j 는 식(10)~(14)에 의한 추정치들을 식(2)에 대입하여 구한 추정 수명과 실험 데이터 간의 RMS error를 적용하였다. 즉,

$$R_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r (t_i - \hat{t}_{mi})^2}{r}} \quad R_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r (t_i - t_{Ri})^2}{r}} \quad (15)$$

$$p_1 = \frac{R^{-1}}{R_1^{-1} + R_2^{-1}} \quad p_2 = \frac{R_2^{-1}}{R_1^{-1} + R_2^{-1}} \quad (16)$$

t_{mi} : 최우 추정법에 의해 구한 모수값들을 이용해 구한 소자의 수명

t_{di} : 단순 데이터에 의해 구한 모수값들을 이용해 구한 소자의 수명

R_1, p_1 : 최우 추정법에 의해 구한 RMS error와 p_j 값
 R_2, p_2 : 단순 데이터에 의해 구한 RMS error와 p_j 값
 그리고 식 (5)의 a_j, b_j 는 Soland Method^(1,3)를 적용하면,

$$\frac{\ln(a_j) - \ln(a_j + t_j^{\alpha})}{\ln(a_j) - \ln(a_j + \hat{t}_j^{\alpha})} = \frac{\ln(1 - F_j)}{\ln(1 - F_r)} \quad (17)$$

$$b_j = \frac{\ln(1 - F_j)}{\ln(a_j) - \ln(a_j + \hat{t}_j^{\alpha})} \quad (18)$$

가 된다.

IV. Arrhenius 모델의 모수추정

소자의 수명분포를 해석하는데 필요한 모든 모수값들을 이용해 정상 동작 상태에서의 소자의 수명을 구할 수 있다. 소자의 가속 수명 테스트에서 소자의 수명 분포의 모수들중 단지 하나의 모수 즉 와이불 분포의 크기 모수만이 스트레스에 의해 영향을 받는다. 스트레스가 온도인 경우 Arrhenius 모델을 이용 하는데 Arrhenius 모델과 수명분포와의 관계는 다음과 같다.

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \quad (19)$$

여기서 β 를 특성수명(characteristic lifetime)이라 하고 이는

$$\beta^{-1} = A \exp\left(\frac{P}{T}\right) \quad (20)$$

의 관계를 갖는다. 또한 T는 소자의 테스트 상태의 절대온도를 나타낸다. 식 (20)을 (19)에 대입하면,

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\left[A \exp\left(\frac{P}{T}\right) t\right]^{\alpha}\right\} \quad (21)$$

와 같이 된다. 여기서 테스트 데이터 즉, 소자의 가속 수명테스트에 의해 얻어진 데이터에 자연대수를 취하면 이것은 최소극값분포(smallest extreme-value

distribution)를 갖는다. 회귀 분석법을 이용하여 모수 A, P를 구하면

$$A = \exp(-c) \exp\left(\frac{-0.5772}{\alpha}\right) \quad (22)$$

$$P = -\frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (23)$$

가 된다. 여기서

$$x_l = \frac{1}{T_l} \quad l = 1, \dots, L$$

$$y_{il} = \ln(t_{il}) \quad i = 1, \dots, n$$

$$c = \bar{y} + P\bar{x}$$

$$S_{xx} = [n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_L(x_L - \bar{x})^2]$$

$$S_{xy} = [n_1(x_1 - \bar{x})\bar{y}_1 + \dots + n_L(x_L - \bar{x})\bar{y}_L]$$

이다. 따라서 식 (22), (23)을 식 (21)에 대입하여 정상동작 상태에서의 소자의 수명을 예측할 수 있다.

V. 비교 및 고찰

본절에서는 시물레이션에서 얻은 데이터를 이용해 모수를 추정하여 베이지안 추정법의 타당성을 입증 하였고 또한, 실험 데이터를 적용했을 때 최우 추정법과 베이지안 추정에 의해 구한 추정값들 사이에는 어떤 차이점이 있는가를 고찰 하였다. 표 1에서는 시물레이션에서 얻은 데이터에서 최우 추정법과 단순 데이터에 이용한 추정법, 그리고 본 논문에서 제안한 베이지안 추정법을 이용하여 추정한 값들과 시물레이션 데이터 사이의 RMS error 값들을 나타내었다. 표 2에서는 130℃의 온도에서 동작 하도록 제작된 모터의 수명을 구하기 위해 170℃, 190℃, 220℃에서 각 10개의 모터를 가속수명 테스트하여 얻은 type-II censoring 데이터가 나타나 있다. 그림 1, 그림 2, 그림 3에는 실험 데이터를 이용한 각 추정법에 의해 구한 추정값들이 도식화 되었고 그림 4에는 Arrhenius 모델을 적용해 구한 소자의 정상동작 상태의 수명을 나타내었다. 표 3에는 최우 추정법과 베이지안 추정법으로 구한 추정값들과 실험 데이터 사이의 RMS error 값을 나타내었다.

표 1의 50개의 시뮬레이션 데이터를 이용해 구한 RMS error 값들에서 단순 데이터를 이용한 추정법은 데이터의 분포에 따라 추정값 정확도의 변화가 크지

표 1. 시뮬레이션 데이터의 RMS error 값

Table 1. The value of RMS error by simulation data

순위	MLE	Graph	Bayes
1	172.449	163.519	164.909
2	96.049	76.989	76.967
3	137.961	113.603	119.235
4	159.473	143.252	148.767
5	85.463	106.183	87.165
6	256.362	458.681	255.328
7	101.294	117.043	85.109
8	146.678	214.13	143.151
9	99.174	94.831	81.248
10	136.783	119.436	114.736
11	102.196	128.724	102.582
12	238.486	343.981	228.663
13	96.019	33.262	54.518
14	55.819	64.565	51.413
15	214.59	212.574	205.681
16	189.222	297.889	183.155
17	353.782	661.269	353.553
18	72.665	84.779	69.224
19	178.989	156.653	167.763
20	149.988	216.795	152.967
21	87.247	100.125	88.207
22	187.083	280.786	188.094
23	193.674	271.667	183.306
24	111.122	99.7	104.951
25	104.115	131.751	95.648
26	114.817	119.9	99.537
27	86.363	87.771	74.183
28	190.482	188.136	187.096
29	120.405	107.167	110.929
30	120.859	181.516	124.725
31	77.045	71.789	66.039
32	89.877	65.164	68.847
33	122.536	148.22	105.887
34	159.282	166.539	157.132
35	131.893	197.532	137.816
36	141.907	174.212	125.353
37	259.261	302.513	247.933
38	161.517	255.243	154.971
39	128.328	117.713	107.981
40	208.689	197.329	201.435
41	181.419	152.792	166.861
42	111.664	126.475	96.377
43	124.727	135.916	100.974
44	127.293	156.737	118.917
45	84.05	98.354	81.166
46	86.525	111.087	83.495
47	185.864	245.811	181.901
48	121.644	103.139	109.592
49	167.736	155.877	158.094
50	74.866	76.729	69.48

표 2. 실험 데이터

Table 2. Experimental data

순위	실험온도에서의 고장 시간			그래프 위치
	170°C	190°C	220°C	
1	1761	408	408	0.0670
2	2772	408	408	0.1632
3	3441	1344	504	0.2594
4	3542	1344	504	0.3557
5	3780	1440	504	0.4519
6	4860			0.5181
7	5196			0.6143

표 3. 실험 데이터의 RMS error 값

Table 3. The value of RMS error by experimental data

	MLE	Bayes
170°C	256.82	223.525
190°C	236.489	233.555
220°C	26.518	25.073

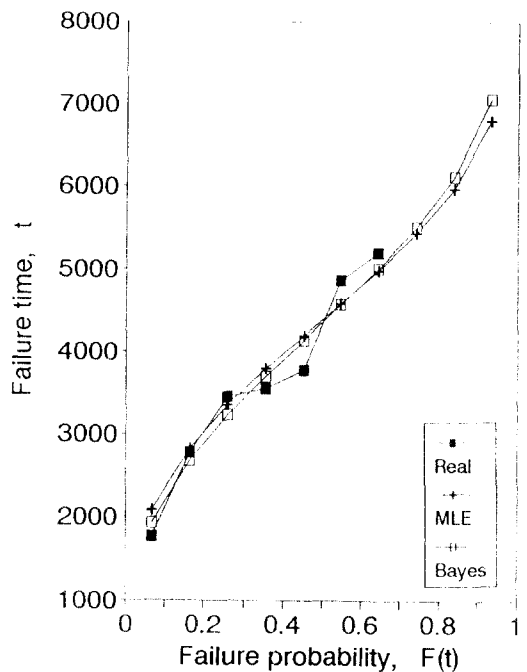


그림 1. 170°C에서의 실험 데이터에 의한 추정
Fig. 1. Estimate by experimental data at 170°C

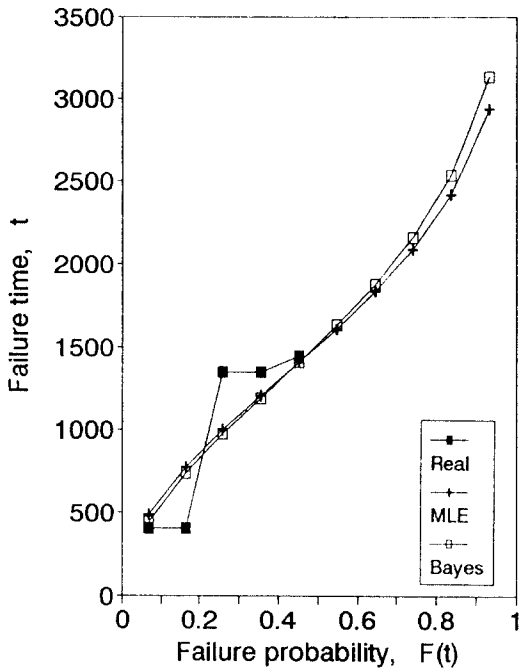


그림 2. 190°C에서의 실험 데이터에 의한 추정
Fig. 2. Estimate by experimental data at 190°C

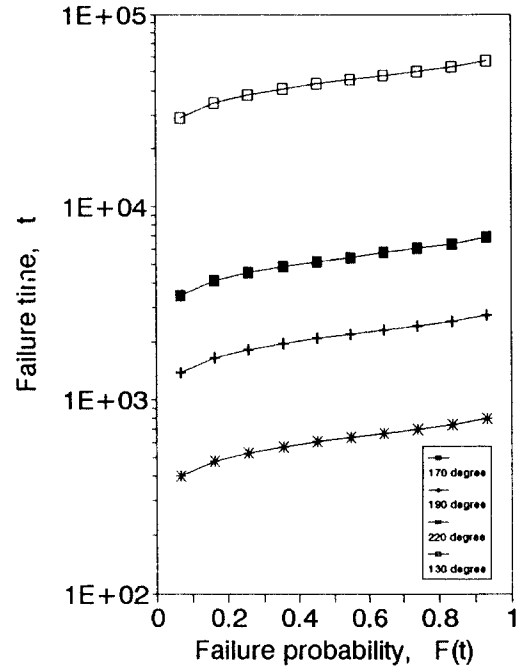


그림 4. Arrhenius 모델을 이용한 정상상태에서의 수명 추정
Fig. 4. Lifetime estimate in the state of normal operation using Arrhenius model

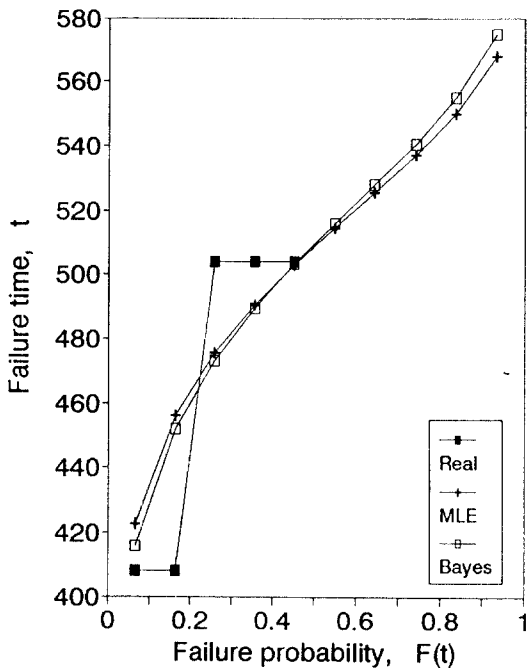


그림 3. 220°C에서의 실험 데이터에 의한 추정
Fig. 3. Estimate by experimental data at 220°C

때문에 좋은 추정법이라고 볼 수 없다. 따라서 최우 추정법과 본 논문에서 제안한 베이지안 추정법을 비교해 보면 50개의 데이터중 8개만이 최우 추정법이 정확한 추정값을 구하고 42개는 본 논문이 제안한 방법이 더 정확한 추정값을 구하는 것으로 나타났다. 그리고 최우 추정법이 제일 정확한 추정값을 구하는 경우에도 본 논문에서 제안한 방법으로 구한 추정값들과 정확도가 별 차이가 없음을 알 수 있다.

표 3과 그림에서도 본 논문에서 제안한 방법이 기존의 최우 추정법보다 더 정확한 추정값들을 구한다는 것을 알 수 있다. 따라서 수명분포의 모수를 추정하는데 본 논문에서 제안한 방법을 사용하는 것이 타당하리라고 본다.

VI. 결 론

본 논문에서는 가속 수명 테스트에서 얻은 Type-II censoring 데이터를 이용하여 소자의 수명을 해석하는데 일반적인 소자의 수명분포인 와이불 분포를 적용하고 이분포의 모수들을 추정 하는데 베이지안

추정법을 이용 하였다. 또한 스트레스가 온도인 경우 Arrhenius 모델을 적용하여 선형 추정을 하여 정상 상태 동작에서의 소자의 수명을 예측하였다.

소자의 수명을 예측 하는데 본 논문에서 제안한 방법을 적용하면 현재의 데이터에만 의존해 배이지안 추정에 필요한 가상적인 사전정보와 사전분포의 모수를 구해야되므로 수식적인 절차가 기존의 추정법 보다 복잡한점은 있다. 그러나 이를 이용하면 소자의 정상상태에서의 수명예측을 기존의 방법보다 더욱 정확하게 할수있는 잇점이 있다. 본 논문에서는 실험 데이터를 모터의 가속수명 테스트 데이터를 이용해 수명해석을 하였는데 각종 전자 부품이나 반도체 소자의 수명해석에도 본 논문의 이론을 적용할 수 있으리라고 본다.

참 고 문 헌

1. I. G. Evans and A. H. M. Nigm, "Bayesian 1-Sample Prediction for the 2-Parameter Weibull Distribution," IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-29, No. 5, December, 1980.
2. Jye-Chyi Lu, "Bayes Parameter Estimation for the Bivariate Weibull Model of Marshall Olkin for Censored Data," IEEE Trans. on Reliability, Vol. 41, No. 4, December, 1992.
3. Richard M. Soland, "Bayesian Analysis of the Weibull Process With Unknown Scale and Shape Parameters," IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-18, No. 4, November, 1969.
4. Albert H. Moore and J. Edward Bikarn, "Bayesian Estimation of Parameters of Life Distributions and Reliability from Type II Censored Samples," IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-

- 27, No. 1, pp. 64-67, April, 1978.
5. Ashok Singh and Anita Singh, "Empirical-Bayes Estimation of Mean Life for a Censored Sample, Constant Hazard Rate Model," IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-35, No. 4, pp. 399-402, October, 1986,3.
6. J. C. Fothergill, "Estimating the Cumulative Probability of Failure Data Points to be Plotted on Weibull and other Probability Paper," IEEE Trans. on Electrical Insulation, Vol. 25, No. 3, June, 1990.
7. Wayne Nelson, "Analysis of Accelerated Life Test Data Least Squares Methods for the Inverse Power Law Model," IEEE Trans. on Reliability, Vol. R-24, No. 2, pp. 103-107, June, 1975.
8. Wayne Nelson and Gerald J. Hehn, "Linear Estimation of a Regression Relationship from Censored Data Part I-Simple Methods and Their Application," Technometrics, Vol. 14, No. 2, pp. 247-269, May, 1972.
9. Wayne Nelson, "Graphical Analysis of Accelerated Life Test Data with the Inverse Power Law Model," IEEE Trans. on Reliability, Vol. R 24, No. 1, pp. 2-11, February, 1972.
10. Mann N, R, and Schafer R, E, and Singpurwalla N, D, "Method for Statistical Analysis of Reliability and Life Data," John Wiley and Sons, New York 1974.
11. Lee J. Bain, "Introduction to Probability and Mathematical Statistics," Duxbury Press, Boston 1987.

吳宗煥(Jong Hwan Oh)

성회원

1966년 4월 19일생

1985년 3월 ~ 1989년 2월 : 광운대학교 공과대학 전자통신공학과

1989년 3월 ~ 1994년 2월 : 광운대학교 공과대학 대학원 통신공학과

1994년 2월 ~ 현재 : 대우통신

吳英煥(Yong Hwan Oh)

성회원

1947년 12월 28일생

인하대학교 공과대학 및 대학원 전자공학과 졸업(공학박사)

광운대학교 공과대학 전자통신공학과 교수