

채널 등화기에 應用한 제2차 필터화 경사도 알고리즘의 解析

正會員 金 海 正* 正會員 李 斗 秀*

Analysis of Quadratically Filtered Gradient Algorithm with Application to Channel Equalization

Hae Jung Kim*, Doo Soo Lee* *Regular Members*

要 約

本 論 文 에 서 는 스칼라 因數 α_1 , α_2 를 媒 介 變 數 化 하여 鞏 固 性 을 첨가한 非線形 適 應 알고리즘의 特 性 을 解 析 한다. 수렴 特 性 의 解 析 에 서 평 均 필터 계 수 벡터 에 대 하여 전이 행렬의 固 有 值 가 記 述 된다. 그 알고리즘이 安 定 하 기 위 한 範 圍 도 證 明 된다. 본 알고리즘의 時 定 數 도 유 도 되 고, sign 알고리즘, 기 존 의 LMS 알고리즘, LFG 알고리즘의 計 算 量 도 比 較 해 본다. 평 均 자 승의 수렴 특성을 解 析 하고 평 均 자 승 循 環 式 과 초 과 평 均 자 승 오차(excess mean square error) 表 現 式 을 유 도 하 고 본 알고리즘이 安 定 하 기 위 한 條 件 도 定 然 한다. 컴 퓨 터 模 擬 實 驗(simulation) 에 서 채널 등 화 기 를 이 용 하 여 QFG 알고리즘의 性 能 特 性 을 모 여 준다. QFG 알고리즘이 LMS, LFG 알고리즘 보다 계 산 량 이 증 가 하 는 반 면 收 斂 速 度 에 서 현 지 한 向 상 을 모 여 준다. QFG 알고리즘이 부 트 러 음(smooth) 수렴 특성을 가지기 때문에, 버 스톱 오차(error bursting) 가 分 離 가 되는 情 况 에 유 용 하 다.

ABSTRACT

This paper analyzes the properties of such algorithm that corresponds to the nonlinear adaptive algorithm with additional update terms, parameterized by the scalar factors α_1 and α_2 . The analysis of convergence leads to eigenvalues of the transition matrix for the mean filter coefficient vector. Regions in which the algorithm becomes stable are demonstrated. The time constant is derived and the computational complexity of the QFG algorithm is compared with those of the conventional LMS, sign, and LFG algorithms. The properties of convergence in the mean square are analyzed and the expressions of the mean square recursion and the excess mean square error is derived and the necessary condition for the CFG algorithm to be stable is attained. In the computer simulation a channel equalization is utilized to demonstrate the performance feature of the QFG algorithm.

* 漢 陽 大 學 校 工 科 大 學 電 子 工 學 科
Department of Electronic Engineering, HanYang University
論 文 番 號 : 94 - 14

The QFG algorithm has the more computational complexities but the faster convergence speed than LMS and LFG algorithms. Since the QFG algorithm has smoother convergence, it may be useful in case where error bursting is a problem.

I. 序 論

本 論 文 中 提 出 的 第 二 次 濾 波 梯 度 算 法 (quadratically filtered gradient algorithm: QFG) 을 연구하게 된 동기는 기존의 최소평균자승 알고리즘 (least mean squares algorithm: LMS)[1]이나 선형 필터화 경사도 알고리즘 (linearly filtered gradient algorithm: LFG)보다 빠른 수렴속도에 대한 필요성에서 비롯되었다. 선형 필터화 경사도 (LFG) 알고리즘은 디지털 통신 신호에 대한 고속 적응 등화기에 처음 도입되었다[2][3][4]. 제2차 필터화 경사도 (QFG) 알고리즘은 갱신된 필터 계수 벡터를 얻기 위하여 매번 반복시 3개의 전필터계수 벡터가 결합되는 제3차 적응 알고리즘이다. 최근 선형 필터화 경사도 알고리즘의 비선형 형태를 사용하여 다층 퍼셉트론 (multilayer perceptron)의 역전파 학습 (back-propagation training) 알고리즘에서 학습 특성을 향상시켰다[5].

제2차 필터화 경사도 알고리즘은 선형 필터화 경사도 알고리즘[6]으로부터 미소량 $\alpha_i [W(n-i+1) - W(n-i)]$, $i=2$ 을 부가하여 유도된다. 필터계수의 변화량을 계산할 때 그 이전의 변화량의 일부를 부가하여 필터계수 변화량을 같은 방향으로 유지시킨다. 이 부가항이 수렴시 모멘텀 효과를 나타낸다. 전필터 계수 변화량을 현재의 갱신량에 더하기 때문에 필터 계수 벡터에 대하여 보다 빠르고 부드러운 (smooth) 수렴특성을 나타낸다. 과거의 필터계수 벡터 $W(n-1)$, $W(n-2)$ 등의 기억공간과 부가적인 복잡도로 인하여 그 특성이 개선된다. QFG 알고리즘의 계산량은 LMS 알고리즘에 비하여 2배 증가하고, LFG 알고리즘에 비하여 4/3배 증가한다. 그러나 알고리즘이 최소값 (global minimum)에 접근할 때 모멘텀 항이 성능을 저하시켜 오조정량 (misadjustment)을 증가시킬 수 있다. 이런 문제를 극복하기 위하여 필터계수 벡터의 변화량이 충분히 작을 경우 모멘텀 항을 제거하여 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 로 둘 수 있다.

本 論 文 中 提 出 的 [7][8][9]에서 기술된 방법을 이용하여 제2차 필터화 경사도 알고리즘의 수렴 특성을 해석하고, 채널 등화기에 응용하여 [2][3][4][6]에

서 제기된 성능상의 문제점을 해결한다. II장에서 제2차 필터화 경사도 알고리즘을 기술하고 이를 수렴특성의 해석에 적합한 형태로 나타낸다. III장에서는 평균수렴 안정도 조건을 살펴보고, 평균 필터계수 순환식에서 복소수 고유치의 발생에 대하여 새로운 결과를記述한다. 또한 시정수에 관하여 근사적인 결과식을 보여주고, 제2차 필터화 경사도 알고리즘의 산술적 연산량이 LMS 알고리즘, LFG 알고리즘의 연산량과 비교된다. IV장에서는 평균자승의 수렴특성을 분석하고 초과 평균자승오차 표현식을 유도하고 본 알고리즘이 안정한 제한범위를 정한다. V장에서는 컴퓨터 모의실험 (simulation)을 실시하여 채널 등화기에 적용한 결과 QFG 알고리즘이 LMS, LFG 알고리즘보다 계산량이 증가하는 반면 수렴 특성에서 현저히 향상된 수렴 속도와 부드러운 수렴효과 (smooth convergence effect)를 나타내는 것을 보여준다. VI장에서는 지금까지의 내용과 앞으로의 과제를 요약한다.

II. QFG 알고리즘

급경사 하강 알고리즘 (steepest descent algorithm)의 일종인 제2차 필터화 경사도 알고리즘 (QFG algorithm)은 다음과 같은 제3차 필터계수 갱신식으로 표현될 수 있다.

$$W(n+1) = W(n) - \mu \nabla(n) + \alpha_1 [W(n) - W(n-1)] + \alpha_2 [W(n-1) - W(n-2)],$$

$$|\alpha_1| < 1, \quad |\alpha_2| < 1. \quad (2-1)$$

자승평균의 앙상블 평균 (ensemble average)을 이용하지 않고, 확률적 경사도 알고리즘 (stochastic gradient algorithm)[10]에서 위 경사도의 추정치인 순시값을 적용하면 위 경사도는 다음과 같이 근사화된다.

$$\nabla(n) \approx \begin{bmatrix} \partial e^2(n) / \partial w_0 \\ \partial e^2(n) / \partial w_1 \\ \vdots \\ \partial e^2(n) / \partial w_{N-1} \end{bmatrix} = -2e(n)X(n) \quad (2-2)$$

위 식에서 $W(n) = [w_0(n), \dots, w_{N-1}(n)]^T$ 이다. 출력 오차는 다음 식으로 주어진다.

$$e(n) = d(n) - X^T(n)W(n) \quad (2-3)$$

위 식에서 $X(n) = [x(n), \dots, x(n-N+1)]^T$ 은 입력 신호 벡터이고, $d(n)$ 은 理想應答이고 $y(n) = W^T(n)X(n)$ 은 $d(n)$ 의 추정값이다. 스텝 크기 μ 는 수렴 속도를 제어하고, 매개변수 α_1, α_2 는 경사도에 부가된 모멘텀 항의 계수가 된다.

$\alpha_1 = 0$ 이고 $\alpha_2 = 0$ 이면 LMS 알고리즘이 되고, $\alpha_2 = 0$ 이면 LFG 알고리즘이 된다. 알고리즘의 특성상 $\alpha_1 \rightarrow 1, \alpha_2 \rightarrow 1$ 일 때 저역통과 필터의 구조를 가지고, $\alpha_1 \rightarrow -1, \alpha_2 \rightarrow -1$ 일 때 고역통과 필터의 구조를 가진다. 식 (2-1)에서 경사도를 알아내기가 어렵기 때문에 식 (2-2)에서는 유한한 입력 신호를 이용하여 각 반복순환에서 경사도가 불완전하게 추정되고 있으며 이로 인하여 경사도 잡음이 발생한다[11].

입력신호 공분산 행렬은 $R = E[X(n)X^T(n)]$ 로 정의하고, 고유벡터 분해 $R = Q\Lambda Q^T$ 가 성립하고, 대각선 행렬 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ 에서 위 입력신호 공분산 행렬의 고유벡터는 $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}$ 로 배열되어 있다. 행렬 Q 의 열은 $QQ^T = I$ 인 특성이 성립하는 직교 고유벡터이고, I 는 단위 행렬이다. 이상 응답과 입력신호 벡터사이의 상호 공분산 벡터 $P = E[X(n)d(n)]$ 로 정의한다. 입력신호가 넓은 의미에서 정제된(wide-sense stationary) 상태에 있고 서로 독립적(independent)이라고 가정한다.

필터계수오차 벡터를 $V(n) = W(n) - W_0$ 라고 할 때, $W_0 = R^{-1}P$ 은 이산적 Wiener-Hopf 필터의 계수벡터가 되고, 다음 식이 성립한다.

$$V(n+1) - V(n) = 2\mu e_o(n)X(n) - 2\mu X(n)X^T(n)V(n) + \alpha_1[V(n) - V(n-1)] + \alpha_2[V(n-1) - V(n-2)] \quad (2-4)$$

위 식에서 최적 출력오차는 $e_o(n) = d(n) - W_0^T X(n)$ 이다. 그러나 위의 Wiener-Hopf 필터에서 선형위상 특성을 보장하지는 않는다.

회전 필터계수 오차벡터를 $\tilde{V}(n) = Q^T V(n)$ 이라고 두고, 식(3)에 Q^T 를 곱하면 다음 식이 성립한다.

$$\tilde{V}(n+1) - \tilde{V}(n) = 2\mu e_o(n)X(n) - 2\mu \tilde{X}(n)\tilde{X}^T(n)\tilde{V}(n)$$

$$+ \alpha_1[\tilde{V}(n) - \tilde{V}(n-1)] + \alpha_2[\tilde{V}(n-1) - \tilde{V}(n-2)] \quad (2-5)$$

위 식에서 $\tilde{X}(n)$ 은 회전입력 벡터 $\tilde{X}(n) = Q^T X(n)$ 이다.

적용 매개변수 공간에서 위 알고리즘이 최소값에 도달하면 학습은 끝난다. 그러나 국소(local) 최소값에 도달하면, 출력 오차는 용인될 수 없을 정도로 크다. 위 알고리즘이 허용될 수 있는 최적값에 도달하기 전에 학습을 중지한다면, 위 매개변수를 변화시키거나 필터계수의 초기값을 바꿈으로써 그 문제를 해결할 수 있다.

III. 平均 循環式에서의 收斂 特性

1. 安定度 條件

식 (2-5)에서 평균을 취하면, 다음 식이 성립한다.

$$E[\tilde{V}(n+1) - \tilde{V}(n)] = -2\mu\Lambda E[\tilde{V}(n)] + \alpha_1 E[\tilde{V}(n) - \tilde{V}(n-1)] + \alpha_2 E[\tilde{V}(n-1) - \tilde{V}(n-2)] \quad (3-1)$$

위 식 (3-1)에서 $\Lambda = E[X(n)X^T(n)]$ 은 고유치의 대각선 행렬이다. 직교성 원리에 따라서 $E[e_o(n)\tilde{X}(n)] = 0$ 이 되고[1], $W(n)$ 과 $X(n)$ 은 독립적이다. 3N 차원 상태 벡터 $\tilde{U}(n)$ 를

$$\tilde{U}(n) = \begin{bmatrix} \tilde{V}(n) \\ \tilde{V}(n-1) \\ \tilde{V}(n-2) \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

으로 정의할 때, 다음의 순환식이 성립한다.

$$E[\tilde{U}(n+1)] = \begin{bmatrix} (1+\alpha_1)I - 2\mu\Lambda & (-\alpha_1+\alpha_2)I & -\alpha_2 I \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \cdot E[\tilde{U}(n)] \quad (3-3)$$

위 식에서 블록 전이 행렬(block transition matrix)은 3N 차원의 크기를 가진다. 본 알고리즘의 안정도는 다음 행렬식

$$\det \begin{bmatrix} (1+\alpha_1-\zeta)I - 2\mu\Lambda & (-\alpha_1+\alpha_2)I & -\alpha_2 I \\ I & -\zeta I & 0 \\ 0 & I & -\zeta I \end{bmatrix} = 0 \quad (3-4)$$

의 근 $|\zeta_i|$ 에 따라 영향을 받는다.

위 행렬식을 밀러 행렬로 분해하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\det \begin{bmatrix} -\zeta I & 0 \\ I & -\zeta I \end{bmatrix} \det \{[(1+\alpha_1-\zeta)I-2\mu\Lambda] - [(-\alpha_1+\alpha_2)I-\alpha_2 I] \begin{bmatrix} -\zeta I & 0 \\ I & -\zeta I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\} = 0 \quad (3.5)$$

위 (3.5)식에서 逆行列 D^{-1} 이 존재하기 때문에, 다음 特性方程式을 유도할 수 있다.

$$(-\zeta)^{2N} \det \{ (1+\alpha_1-\zeta)I-2\mu\Lambda - (-\alpha_1+\alpha_2)\zeta^{-1}I - \alpha_2\zeta^{-1}I \} = 0 \quad (3.6)$$

식 (3.6)에서 $3N$ 개의 근을 간절하기 위하여, 다음의 3차형

$$\zeta^3 - (1+\alpha_1+2\mu\lambda_i)\zeta^2 + (\alpha_1-\alpha_2)\zeta + \alpha_2 = 0 \quad (3.7)$$

을 조사할 필요가 있다. 수정된 Schur-Cohn 검정 [12]을 이용하여, 식 (3.7)의 안정도를 판정할 수 있으며, 다음의 안정도 조건을 유도할 수 있다.

조건 1: $0 < \mu < \frac{1+\alpha_1-\alpha_2}{\lambda_{\max}}$

조건 2: $-1 < \alpha_2 < 1$

조건 3: $|-\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2 + 2\mu\lambda_i| < 1 - \alpha_1^2$

$\alpha_2 \rightarrow 0$ 일 때, 위 3개의 제한조건은 다음과 같은 안정도 조건으로 귀결된다.

조건 1: $0 < \mu < \frac{1+\alpha_1}{\lambda_{\max}}$

조건 2: $0 < \alpha_1 < 1$

위 안정도 한계는 진형 필터화 경사도(LFG) 알고리즘의 안정도 조건이 되는 것을 알 수 있다 [6].

위 조건 3에서 $\alpha_1 < 0$ 일 때, α_1 과 μ 의 범위는 다음과 같이 줄 수 있다.

$$-(1-\alpha_2) + 2\mu\lambda_i/(1+\alpha_2) < \alpha_1 < 0$$

$$\mu < (1-\alpha_1^2)/(2\lambda_{\max}) \quad (3.8)$$

$\alpha_1 \rightarrow 0$ 일 때, 안정도 한계는 $0 < \mu < 1/2\lambda_{\max}$ 로 증가한다. $\alpha_1 \rightarrow -1$ 일 때, 안정도 한계는 0으로 감소한다. α_1 가 음수일 경우 알고리즘이 안정하더라도 그 성능을 저하시킨다. 즉, 전 필터계수 갱신항이 음의 방향에 있을 때 $(\alpha_1 [W(n-i+1) - W(n-i)] < 0)$ 그 필터계수 갱신항의 음의 분수를 그 다음의 필터계수 갱신항에 첨가하기 때문에 수렴 속도가 저하될 수 있다.

$\alpha_2 > 0$ 및 $-\alpha_1(1+\alpha_2) + 2\mu\lambda_i > 0$ 일 때, 다음의 부등식이 성립한다.

$$0 < -(1-\alpha_2) + 2\mu\lambda_i/(1+\alpha_2) < \alpha_1 < (1-\alpha_1^2)/2\lambda_{\max} < \mu \quad (3.9)$$

$\alpha_2 \rightarrow 0$ 일 때 안정도 한계: $\min(1/2\lambda_{\min}, (1+\alpha_1)/\lambda_{\max}) < \mu < \max(1/2\lambda_{\min}, (1+\alpha_1)/\lambda_{\max})$ 로 감소하고, $\alpha_2 \rightarrow 1$ 일 때 안정도 한계는 $0 < \mu < \alpha_1/\lambda_{\max}$ 이 된다. $\alpha_2 \rightarrow -1$ 일 때 안정도 한계는 $1/\lambda_{\min} < \mu < (2+\alpha_1)/\lambda_{\max}$ 로 된다.

$\alpha_1 > 0$ 및 $-\alpha_1(1+\alpha_2) + 2\mu\lambda_i < 0$ 일 때, 다음의 부등식이 성립한다.

$$0 < \alpha_1 < 1 - \alpha_2 + 2\mu\lambda_i/(1+\alpha_2) < (1-\alpha_2^2)/2\lambda_{\min} < \mu \quad (3.10)$$

$\alpha_2 \rightarrow 0$ 일 때 안정도 한계: $\min(1/2\lambda_{\min}, (1+\alpha_1)/\lambda_{\max}) < \mu < \max(1/2\lambda_{\min}, (1+\alpha_1)/\lambda_{\max})$ 이고, $\alpha_2 \rightarrow 1$ 일 때 안정도 한계는 $0 < \mu < \alpha_1/\lambda_{\max}$ 이 된다. $\alpha_2 \rightarrow -1$ 일 때 안정도 한계는 $0 < \mu < (2+\alpha_1)/\lambda_{\max}$ 로 된다. α_2 가 음수일 경우 알고리즘이 안정하더라도 그 성능을 저하시킨다.

LMS 알고리즘의 잔이행편은 대칭적이고, 그 고유치는 정수가 된다. 그러나 QFG 알고리즘의 잔이행편은 대칭적이지 않고, 그 고유치는 복소수가 된다.

2. 平均 循環式의 實根 및 虛根

정상 평장식이 근이 실수가 되기 위하여 그 판별식이 음수가 되어서는 안된다.

$$32\alpha_2\lambda_i^2\mu^2 - 4(\alpha_1^2 + 12\alpha_2 + 10\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)\lambda_i^2\mu^2 + 4(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 6\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1^2\alpha_2 + 10\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2^2)\lambda_i\mu$$

$$-\alpha_1^2 + 2\alpha_1^3 - \alpha_1^4 - 4\alpha_2 + 8\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1^2\alpha_2 - 2\alpha_1^3\alpha_2 + 8\alpha_2^2 - 8\alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_1^2\alpha_2^2 - 4\alpha_2^3 \leq 0 \quad (3-11)$$

$\alpha_2 = 0$ 일 때, 식(15)에서 $-\alpha_1^2$ 으로 나누고 정리하면, 다음식과 같이 된다.

$$4\lambda_1^2\mu^2 - 4(1 + \alpha_1)\lambda_1\mu + (1 - \alpha_1)^2 \geq 0 \quad (3-12)$$

위 식은 [6]에서 유도된 판별식과 일치함을 알 수 있다. 식 (3-11)의 3차 함수를 $f(\mu)$ 라고 할 경우 다음과 같은 성질을 가진다.

(1) $f(\mu)$ 의 2개 도함수

$$f'(\mu) = 192\alpha_2\lambda_1^3\mu - 8(\alpha_1^2 + 12\alpha_2 + 10\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)\lambda_1^2 \quad (3-13)$$

의 근 $\mu_2 = (\alpha_1^2 + 12\alpha_2 + 10\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)/24\lambda_1\alpha_2$ 은 변곡점이 된다.

(2) $f(\mu)$ 은 μ_1, μ_3 에서 극값을 가진다.

i) $\alpha_2 > 0$ 일 때, $\mu_1 = (-c_1 - (c_1^2 - 4c_0c_2)^{1/2})/2c_0$ 에서 극소점이 되고,

$\mu_2 = (-c_1 + (c_1^2 - 4c_0c_2)^{1/2})/2c_0$ 에서 극대점이 된다.

ii) $\alpha_2 < 0$ 일 때, $\mu_1 = -(c_1 - (c_1^2 - 4c_0c_2)^{1/2})/2c_0$ 에서 극대점이 되고,

$\mu_2 = -(c_1 + (c_1^2 - 4c_0c_2)^{1/2})/2c_0$ 에서 극소점이 된다.

이 때 c_0, c_1, c_2 의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c_0 &= 96\alpha_2\lambda_1^3, \\ c_1 &= -8(\alpha_1^2 + 12\alpha_2 + 10\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)\lambda_1^2, \\ c_2 &= 4(\alpha_1^2 + \alpha_1^3 + 6\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1^2\alpha_2 + 10\alpha_2^2 + \alpha_1\alpha_2^2)\lambda_1 \end{aligned} \quad (3-14)$$

(3) $f(\mu)$ 는 다음과 같은 경우에 양수가 되지 않는다. 즉, 특성 방정식이 실근을 갖는다.

i) $\alpha_2 > 0$ 일 때, $\mu < \mu_{0,1}$ 혹은 $\mu_{0,2} < \mu < \mu_{0,3}$

ii) $\alpha_2 < 0$ 일 때, $\mu_{0,1} < \mu < \mu_{0,2}$ 혹은 $\mu_{0,3} < \mu$

여기서 $\mu_{0,1}, \mu_{0,2}, \mu_{0,3}$ 는 특성 방정식의 근이다.

앞의 결과에서 알고리즘의 i번째 모드에 안정도에 대한 조건은 다음과 같다.

$$0 < \mu < \mu_{0,1} = (1 + \alpha_1 - \alpha_2)/\lambda_1 \quad (3-15)$$

$\alpha_2 > 0$ 일 때, 특성 방정식은 다음 범위에서 실근을 갖는다.

$$(0 < \mu < \mu_{0,1}) \cup (\mu_{0,2} < \mu < \mu_{0,3}) \quad (3-16)$$

$\alpha_2 < 0$ 일 때, 특성 방정식은 다음 범위에서 실근을 갖는다.

$$(\mu_{0,1} < \mu < \mu_{0,3}) \cup (\mu_{0,3} < \mu < \mu_{0,1}) \quad (3-17)$$

위 식에서 \cup 는 union 연산자이다. 그림 1에서 위 결과가 도시되어 있다. 전체 모드의 안정도에 대한 조건은 식 (3-15)의 영역의 교집합에 의하여 주어진다.

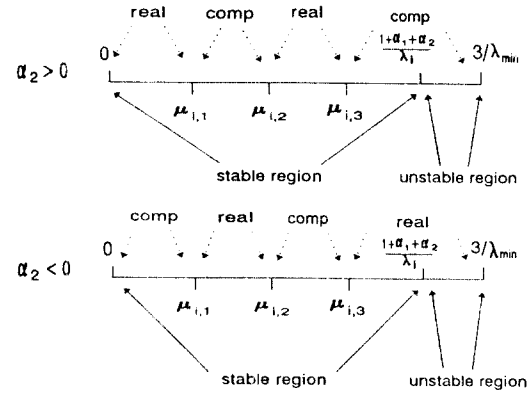


그림 1. 실근과 복소근에 대한 μ 의 범위

Fig. 1. Regions of μ for real and complex roots

3. 時定數 및 演算量

식 (3-3)에서 각 순환값은 기하 수열이 되고, i번째 mode의 기하비(geometric ration)는 식 (3-4)으로 주어진다. 일반적으로 위 기하 수열을 지수 포락선으로 근사화하고, 저속의 적응성과 큰값의 시정수를 가정한다[11]. 식 (3-7)에서 특성방정식의 근 ζ_i 가 실수이고 양수의 제곱근만을 유지한다고 가정하면, i번째 mode에서 시정수 τ_i 는 다음과 같은 관계식을 가진다.

$$\begin{aligned} \tau_i &\approx 1/(1 - \zeta_i) \\ &\approx 3/(3 - 3\gamma + \alpha_1) \end{aligned} \quad (3-18)$$

위 식 (3-18)에서 상수 γ 및 a_1 는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \gamma &= \left[\frac{1}{2} [-b_2 - (b_2^2 + 4b_1^3)^{1/2}] \right]^{1/3} \\ &+ \left[\frac{1}{2} [-b_2 + (b_2^2 + 4b_1^3)^{1/2}] \right]^{1/3} \\ b_1 &= -\frac{a_1^2}{3^2} + \frac{a_2}{3} \\ b_2 &= -\frac{2a_1^3}{3^3} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3 \\ a_1 &= -1 - \alpha_1 + 2\mu\lambda_i \\ a_2 &= \alpha_1 - \alpha_2 \\ a_3 &= \alpha_2 \end{aligned} \quad (3-19)$$

LFG 알고리즘은 α_1 을 적절히 조정하므로써 LMS 알고리즘 보다 수렴속도를 개선할 수 있고, QFG 알고리즘은 α_2 를 적절히 조정하므로써 LFG 알고리즘 보다 수렴속도를 향상시킬 수 있다. 그러나 이는 오 조정량을 증가시킬 수 있으므로, 서로 상충하는 수렴 속도와 오 조정량이 실제 필터실계에서 허용되도록 안정한 범위 내에서 최적의 α_2 를 선정하여야 한다.

QFG 알고리즘의 계산량(computational complexity)을 기존의 알고리즘의 계산량과 비교하여 보자. QFG 알고리즘의 산술 연산(arithmetic operation)의 수가 sign 알고리즘[13], LMS 알고리즘, LFG 알고리즘의 산술 연산의 수와 비교된다. QFG 알고리즘의 곱셈 연산 수는 sign 알고리즘에 비하여 4배 증가하고, LMS 알고리즘에 비하여 2배 증가하고, LFG 알고리즘에 비하여 4/3 배 증가한다. QFG 알고리즘의 덧셈 연산수는 sign 알고리즘에 비하여 3배 증가하고, LMS 알고리즘에 비하여 3배 증가하고, LFG 알고리즘에 비하여 3/2 배 증가한다. sign 알고리즘의 곱셈 연산수는 N이고, LMS 알고리즘의 곱셈 연산수는 2N 이고, LFG 알고리즘의 곱셈 연산수는 3N 이고, QFG 알고리즘의 곱셈 연산수는 4N 이다. 여기서 N은 적응필터 계수의 크기(size)를 나타낸다. QFG 알고리즘은 필터 구조에서 곱셈기(multiplier) 및 덧셈기(adder)가 많아지므로 계산량이 증가한다는 것을 위 결과로부터 알 수 있다.

IV. 平均自乘 循環式에서의 收斂 特性

1. 平均自乘 循環式과 誤調停量

필터계수 벡터의 공분산 행렬(covariance matrix)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{cov}[\tilde{V}(n+1)] &= E[\tilde{V}(n+1)\tilde{V}^T(n+1)] \\ &= (1+\alpha_1)^2 E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n)] + 4\mu^2 [2\Lambda E[\tilde{V}(n) \\ &\cdot \tilde{V}^T(n)]\Lambda + \Lambda \text{tr}[\Lambda E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n)]]] \\ &- 2\mu(1+\alpha_1)[\Lambda E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n)] + E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n)]\Lambda] \\ &+ (\alpha_1 - \alpha_2)^2 E[\tilde{V}(n-1)\tilde{V}^T(n-1)] \\ &+ \alpha_2^2 E[\tilde{V}(n-2)\tilde{V}^T(n-2)] - (1+\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2) \\ &\cdot E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n-1)] + E[\tilde{V}(n-1)\tilde{V}^T(n)] \\ &+ 2\mu(\alpha_1 - \alpha_2)[\Lambda E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n-1)]\Lambda \\ &+ E[\tilde{V}(n-1)\tilde{V}^T(n)]\Lambda + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2[E[\tilde{V}(n-1) \\ &\cdot \tilde{V}^T(n-2)] + E[\tilde{V}(n-2)\tilde{V}^T(n-1)]] \\ &- (1+\alpha_1)\alpha_2[E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n-2)] + E[\tilde{V}(n-2)\tilde{V}^T(n)]] \\ &+ 2\mu\alpha_2[\Lambda E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n-2)] + E[\tilde{V}(n-2)\tilde{V}^T(n)]\Lambda] \\ &+ E[\tilde{V}(n-2)\tilde{V}^T(n)]\Lambda] + 4\mu^2 \xi_m \Lambda \end{aligned} \quad (4-1)$$

위 식 (4-1)에서 tr은 trace 연산자이고, 입력 신호 X(n)은 정규 랜덤 프로세스이다. 최소평균자승은 $\xi_m = E[e_0^2(n)]$ 으로 정의된다. 또한 위 식과 연계하여 다음과 같은 공분산 행렬의 순환식을 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{cov}[\tilde{V}(n+1), \tilde{V}(n)] &= E[\tilde{V}(n+1)\tilde{V}^T(n)] \\ &= (1+\alpha_1)E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n)] - (\alpha_1 - \alpha_2)[E[\tilde{V}(n-1) \\ &\cdot \tilde{V}^T(n)] - \alpha_2 E[\tilde{V}(n-2)\tilde{V}^T(n)] - 2\mu\Lambda E[\tilde{V}(n) \\ &\cdot \tilde{V}^T(n)]] \end{aligned} \quad (4-2)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[\tilde{V}(n+1), \tilde{V}(n-1)] &= E[\tilde{V}(n+1)\tilde{V}^T(n-1)] \\ &= (1+\alpha_1)E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n-1)] - (\alpha_1 - \alpha_2)[E[\tilde{V}(n-1) \\ &\cdot \tilde{V}^T(n-1)] - \alpha_2 E[\tilde{V}(n-2)\tilde{V}^T(n-1)]] \\ &- 2\mu\Lambda E[\tilde{V}(n)\tilde{V}^T(n-1)] \end{aligned} \quad (4-3)$$

위 공분산 행렬에서 각 성분에 대한 순환식을 유도하기 위하여 다음과 같은 기호를 도입한다.

$$\begin{aligned} C_i(n+1) &= E[\tilde{V}(n+1)\tilde{V}^T(n+1)]_{ii} \\ D_i(n+1) &= E[\tilde{V}(n+1)\tilde{V}^T(n)]_{ii} \\ E_i(n+1) &= E[\tilde{V}(n+1)\tilde{V}^T(n-1)]_{ii} \end{aligned} \quad (4-4)$$

위 식 (4-4)으로부터 i번째 모드 성분에 대한 순환식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 C_i(n+1) = & [(1+\alpha_1)^2 + 8\mu^2\lambda_i^2 - 4(1+\alpha_1)\mu\lambda_i]C_i(n) \\
 & + 4\mu^2\lambda_i \sum_{j=0}^N \lambda_j C_j(n) + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \\
 & \cdot C_i(n+1) + \alpha_2^2 C_i(n-2) + [-2(1+\alpha_1) \\
 & \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) + 4(\alpha_1 - \alpha_2)\mu\lambda_i] D_i(n) \\
 & + 2(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 D_i(n-1) + [-2(1+\alpha_1) \\
 & \cdot (\alpha_2 - \alpha_3) + 4(\alpha_2 - \alpha_3)\mu\lambda_i] E_i(n) \\
 & + [-2(1+\alpha_1)\alpha_2 + 4\alpha_2\mu\lambda_i] E_i(n) \\
 & + 4\mu^2\xi_m\lambda_i \quad (4-5a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_i(n+1) = & (1+\alpha_1 - 2\mu\lambda_i)C_i(n) - (\alpha_1 - \alpha_2)D_i(n) - \alpha_2 E_i(n) \\
 & \quad (4-5b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_i(n+1) = & -(\alpha_1 - \alpha_2)C_i(n-1) + (1+\alpha_1 - 2\mu\lambda_i) \\
 & \cdot D_i(n) - \alpha_2 D_i(n-1) \quad (4-5c)
 \end{aligned}$$

z 영역에서 해석하기 위하여, 위식을 z 변환하면 대응하는 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & z[C_i(z) - C_i(0)] \\
 = & [(1+\alpha_1)^2 + 8\mu^2\lambda_i^2 - 4(1+\alpha_1)\mu\lambda_i]C_i(z) \\
 & + 4\mu^2\lambda_i \sum_{j=0}^N \lambda_j C_j(z) + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \\
 & \cdot z^{-1}C_i(z) + \alpha_2^2 z^{-2}C_i(z) + [-2(1+\alpha_1) \\
 & \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) + 4(\alpha_1 - \alpha_2)\mu\lambda_i] D_i(z) \\
 & + 2(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 z^{-1} D_i(z) + [-2(1+\alpha_1) \\
 & \cdot (\alpha_2 - \alpha_3) + 4(\alpha_2 - \alpha_3)\mu\lambda_i] E_i(z) \\
 & + [-2(1+\alpha_1)\alpha_2 + 4\alpha_2\mu\lambda_i] E_i(z) + \frac{4\mu^2\xi_m\lambda_i}{1-z^{-1}} \\
 & \quad (4-6a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z[D_i(z) - D_i(0)] = & (1+\alpha_1 - 2\mu\lambda_i)C_i(z) - (\alpha_1 - \alpha_2) \\
 & \cdot D_i(z) - \alpha_2 E_i(z) \quad (4-6b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z[E_i(z) - E_i(0)] = & -(\alpha_1 - \alpha_2)z^{-1}C_i(z) + (1+\alpha_1 - 2\mu\lambda_i) \\
 & \cdot D_i(z) - \alpha_2 z^{-1}D_i(z) \quad (4-6c)
 \end{aligned}$$

위 식 (4-6)으로부터 $C_i(z)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 H_i(z) \cdot C_i(z) = & I_i(z) \\
 H_i(z) = & z - (1+\alpha_1)^2 - 8\mu^2\lambda_i^2 + 4(1+\alpha_1)\mu\lambda_i \\
 & + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 z^{-1} - \alpha_2^2 + [[2(1+\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2) \\
 & + 4(\alpha_1 - \alpha_2)\mu\lambda_i - 2(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 z^{-1}] \\
 & \cdot [1+\alpha_1 - 2\mu\lambda_i + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 z^{-2}] + [2(1+\alpha_1)\alpha_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4\alpha_2\mu\lambda_i][1+\alpha_1 - 2\mu\lambda_i - \alpha_2 z^{-1}][1+\alpha_1 - 2\mu\lambda_i \\
 & + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 z^{-2}]/[z + (\alpha_1 - \alpha_2) \\
 & + \alpha_2(1+\alpha_1 - 2\mu\lambda_i)z^{-1} - \alpha_2^2 z^{-2}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_i(z) = & 4\mu^2\lambda_i \sum_{j=0}^N \lambda_j C_j(z) + \frac{4\mu^2\xi_m\lambda_i}{1-z^{-1}} + zC_i(0) \\
 & + [[2(1+\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2) + 4(\alpha_1 - \alpha_2)\mu\lambda_i \\
 & + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 z^{-1}][-\alpha_2 E_i(0) + zD_i(0)] \\
 & + [-2(1+\alpha_1)\alpha_2 + 4\alpha_2\mu\lambda_i][1+\alpha_1 - 2\mu\lambda_i - \alpha_2 z^{-1}]z^{-1} \\
 & [-\alpha_2 E_i(0) + zD_i(0)]]/[z + (\alpha_1 - \alpha_2) \\
 & + \alpha_2(1+\alpha_1 - 2\mu\lambda_i)z^{-1} - \alpha_2^2 z^{-2}] + [-2(1+\alpha_1)\alpha_2 \\
 & + 4\alpha_2\mu\lambda_i][(-\alpha_1 + \alpha_2)z^{-2}C_i(z) + E_i(0)] \quad (4-7)
 \end{aligned}$$

초과 평균자승 오차(excess mean square error)는 다음과 같다[7].

$$\begin{aligned}
 \xi_x(n) = & \sum_{i=1}^N \lambda_i C_i(n) \quad (4-8)
 \end{aligned}$$

위 식 (4-8)에서 $C_i(n)$ 은 식 (4-4)에서 정의되어 있고, 식 (4-5)에 의하여 계산될 수 있다. 위 식을 z 변환하면 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 \Xi_x(z) = & \sum_{i=1}^N \lambda_i C_i(z) \quad (4-9)
 \end{aligned}$$

위 식 (4-9)에 식 (4-7)을 대입하여 계산하면 $\Xi_x(z)$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}
 \Xi_x(z) = & \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i I_i(z)}{H_i(z)} \\
 = & \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{H_i(z)} [4\mu^2\lambda_i \Xi_x(z) + \frac{4\mu^2\xi_m\lambda_i}{1-z^{-1}} + zC_i(0) \\
 & + [[2(1+\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2) + 4(\alpha_1 - \alpha_2)\mu\lambda_i \\
 & + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 z^{-1}][-\alpha_2 E_i(0) + zD_i(0)] \\
 & + [-2(1+\alpha_1)\alpha_2 + 4\alpha_2\mu\lambda_i][1+\alpha_1 - 2\mu\lambda_i - \alpha_2 z^{-1}]z^{-1} \\
 & [-\alpha_2 E_i(0) + zD_i(0)]]/[z + (\alpha_1 - \alpha_2) \\
 & + \alpha_2(1+\alpha_2 - 2\mu\lambda_i)z^{-1} - \alpha_2^2 z^{-2}] + [-2(1+\alpha_1)\alpha_2 \\
 & + 4\alpha_2\mu\lambda_i][(-\alpha_1 + \alpha_2)z^{-2}C_i(z) + E_i(0)] \quad (4-10)
 \end{aligned}$$

위 식 (4-10)를 정리하면 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 & [1 - 4\mu^2 \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{H_i(z)}] \Xi_x(z) \\
 &= \frac{4\mu^2 \xi_m}{1-z^{-1}} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{H_i(z)} + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{H_i(z)} [zD_i(0) \\
 &+ [-2(1+\alpha_1)\alpha_2 + 4\alpha_2\mu\lambda_i] (-\alpha_1 + \alpha_2) z^{-1} [C_i(z) + E_i(0)] \\
 &+ \{ [2(1+\alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2) + 4(\alpha_1 - \alpha_2)\mu\lambda_i + 2(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 z^{-1}] \\
 &+ [-2(1+\alpha_1)\alpha_2 + 4\alpha_2\mu\lambda_i] [1 + \alpha_1 - 2\mu\lambda_i - \alpha_2 z^{-1}] z^{-1} \\
 &\cdot [-\alpha_1 E_i(0) + zD_i(0)] / [z + (\alpha_1 - \alpha_2) \\
 &+ \alpha_2(1 + \alpha_1 - 2\mu\lambda_i) z^{-1} - \alpha_2^2 z^{-2}] \} \quad (4-11)
 \end{aligned}$$

위 식 (4-11)으로부터 정상상태에서의 초과(excess) 평균 사중오차(초종값 정리(final value theorem) [12])를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\xi_x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{4\mu^2 \xi_m \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{H_i(z)}}{1 - 4\mu^2 \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{H_i(z)}} \quad (4-12)$$

상대적인 초과 평균 사중오차인 오조정량(misadjustment)은 $\xi_x(\infty)/\xi_m$ 으로 정의되므로 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned}
 M_e &= \frac{\lim_{z \rightarrow 1} J(z)}{1 - \lim_{z \rightarrow 1} J(z)} \\
 \lim_{z \rightarrow 1} J(z) &= 4\mu^2 \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{\lim_{z \rightarrow 1} H_i(z)} \quad (4-13)
 \end{aligned}$$

위 식 (4-7)로부터 $\lim_{z \rightarrow 1} H_i(z)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 1} H_i(z) &= 1 - (1 + \alpha_1)^2 - 8\mu^2 \lambda_i^2 + 4(1 + \alpha_1)\mu\lambda_i \\
 &+ (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - \alpha_2^2 + \{ [2(1 + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2) \\
 &- 4(\alpha_1 - \alpha_2)\mu\lambda_i - 2(\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2] \\
 &\cdot [1 + \alpha_1 - 2\mu\lambda_i + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2] + [2(1 + \alpha_1)\alpha_2 \\
 &+ 4\alpha_2\mu\lambda_i] [1 + \alpha_1 - 2\mu\lambda_i - \alpha_2] + [1 + \alpha_1 - 2\mu\lambda_i \\
 &+ (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2] / [1 + (\alpha_1 - \alpha_2) \\
 &+ \alpha_2(1 + \alpha_1 - 2\mu\lambda_i) - \alpha_2^2] \} \\
 &= 2[-\alpha_1 - \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2 + 2(1 + \alpha_1)\mu\lambda_i \\
 &- 4\mu^2 \lambda_i^2 + (1 + \alpha_1 - \alpha_2 - 2\mu\lambda_i)(\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 \\
 &- 2\alpha_2\mu\lambda_i)(1 + \alpha_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 - 2\mu\lambda_i) / \\
 &(1 + \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_2\mu\lambda_i)] \quad (4-14)
 \end{aligned}$$

위 식을 식 (4-13)에 대입하면 $\lim_{z \rightarrow 1} J(z)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 1} J(z) &= 2\mu^2 \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 (1 + \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_2\mu\lambda_i) / \\
 &[-(\alpha_1 - \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2 + 2(1 + \alpha_1)\mu\lambda_i \\
 &- 4\mu^2 \lambda_i^2)(1 + \alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_2\mu\lambda_i) \\
 &+ (1 + \alpha_1 - \alpha_2 - 2\mu\lambda_i)(\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2\mu\lambda_i) \\
 &\cdot (1 + \alpha_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_2 - 2\mu\lambda_i)] \quad (4-15)
 \end{aligned}$$

LMS 알고리즘일 경우에 위 식 (4-15)는 다음과 같이 기술된다.[7]

$$\lim_{z \rightarrow 1} J(z) = \mu \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{1 - 2\mu\lambda_i} \quad (4-16)$$

LFG 알고리즘일 경우에 위 식 (4-15)은 다음과 같이 표현된다.

$$\lim_{z \rightarrow 1} J(z) = \mu \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i(1 + \alpha_1)}{1 - 2\mu\lambda_i - \alpha_2^2} \quad (4-17)$$

QFG 알고리즘에서 오조정량의 변동을 LFG 알고리즘에 첨가된 모멘텀항에 기인한다. LFG와 QFG 알고리즘을 비교할 때, QFG 알고리즘에서 μ 와 α_1 을 변화시키므로써 LFG 알고리즘과 동일한 오조정량을 가지게 할 수도 있다. QFG 알고리즘의 사상수는 LFG 알고리즘의 사상수와 일치하도록 μ 와 α_1 을 적절히 변화시킬 수 있다. 그러나 μ , α_1 , α_2 의 각 값에 대하여 QFG 및 LFG 알고리즘을 비교하는 것은 어려운 문제이며 컴퓨터 모의실험을 통하여 안정도 조건을 만족하는 범위내에서 최적의 매개변수를 경험적으로(heuristically) 찾아내어야 한다. 필터계수 벡터의 변화량이 충분히 작을 경우 모멘텀 항을 제거하여 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 로 두어 오조정량을 감소시켜 위 문제를 극복하는 방법도 있다.

2. 平均 自乘에서의 安定度

QFG 알고리즘의 평균 사중 순환식은 앞 절에서 유도되었다. 위 시스템이 안정하기 위한 필요 충분 조건은 식 (4-10)의 극점이 단위원 내부에 존재하기만 하면 된다. 즉, 다음 식의 영점이 단위원 내부에 존재하도록 제한되어야 한다.

$$D_n(z) = P(z)Q(z)$$

$$P(z) = \prod_{j=1}^N H_j(z)$$

$$Q(z) = 1 - 4\mu^2 \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i^2}{H_i(z)} \quad (4-18)$$

식 (4-10)가 안정하기 위한 조건을 구하기 위하여 [12]에서 기술되어 있는 Schur-Cohn 검정을 조사하면 된다. 본 논문에서는 위 검정을 상세히 다루지는 않겠으나, 안정하기 위한 필요조건으로서 $\lim_{z \rightarrow 1} D_n(z) > 0$ 이 요구된다.

식 (4-13)으로부터 오조정량은 다음과 같이 표현된다.

$$M_c = \frac{1-Q(1)}{Q(1)} \quad (4-19)$$

위 식에서 QFG 알고리즘의 오조정량은 α_1, α_2 에 좌우된다. 또한 오조정량은 양의 실수이기 때문에 $Q(1) > 0$ 이 성립하기 때문에 $P(1) > 0$ 도 성립하지 않으면 안된다. 따라서 식 (4-18)로부터 평균사승에서 안정하기 위한 필요조건은 다음과 같다.

$$\mu^2 \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 (1 + \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_2 \mu \lambda_i) / [(-\alpha_1 - \alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2^2 + 2(1 + \alpha_1) \mu \lambda_i - 4\mu^2 \lambda_i^2)(1 + \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2^2 - 2\alpha_2 \mu \lambda_i) + (1 + \alpha_1 - \alpha_2 - 2\mu \lambda_i)(\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 - 2\alpha_2 \mu \lambda_i)(1 + \alpha_1 + (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_2 - 2\mu \lambda_i)] < \frac{1}{2} \quad (4-20)$$

위 제한조건은 Schur-Cohn 검정중의 한개를 이용하였기 때문에 필요조건은 될 수 있으나 충분조건이 되기는 어려우므로 몇가지 필요조건이 각 상황에 따라서 부가적으로 고려되어야 할 것으로 사료된다.

V. 컴퓨터 模擬實驗

QFG 알고리즘을 이용한 채널 동화기(channel equalizer)의 블록도가 그림 2에 도시되어 있다. QFG 필터의 입력이 되는 채널의 출력은 다음 식에 따라서 생성된다.

$$x(n) = G(z)s(n) + v(n) \quad (5-1)$$

위 식 (5-1)에서 $s(n)$ 과 $v(n)$ 은 상호 상관관계가 없

고 백색 수열이다. 채널 입력 $s(n)$ 은 이진 신호(binary signal)인데, 각 신호는 동일한 확률을 가진 신호였다. $v(n)$ 은 첨가 잡음(additive noise)인데, 균일한 분포(uniform distribution)를 가지고 있었다. 따라서 위 백색 랜덤 수열(white random sequences)은 평균이 0이고 분산이 각각 $\text{var}(s) = 1.0$ 과 $\text{var}(v) = 0.0001$ 이었다. 모의실험에 사용된 채널의 임펄스 응답 $g(i)$ 는 다음과 같이 정의 되는 raised-cosine pulse에 상응하는 제2차 FIR 필터였다.

$$g(i) = \frac{k}{2} [1 + \cos(\frac{2\pi(i-1)}{h})], \quad i = 0, 1, 2 \quad (5-2)$$

식(5-2)에서 스케일 인수(scale factor) h 로부터 적응 필터의 입력신호 상관 행렬 R 의 固有值 伸張比(eigenvalue spread) 혹은 條件數(condition number)를 결정할 수 있다[14][15]. 적응 필터의 계수의 수는 $N = 15$ 이었다. 이상응답은 채널 입력에서 8개의 샘플이 지연(retard)되었다. 이로 인하여 15개의 탭 동화기(tap equalizer)에 대하여 중심 탭이 8번째 계수가 되는 인과적인 동화기(causal equalization)가 된다 [16].

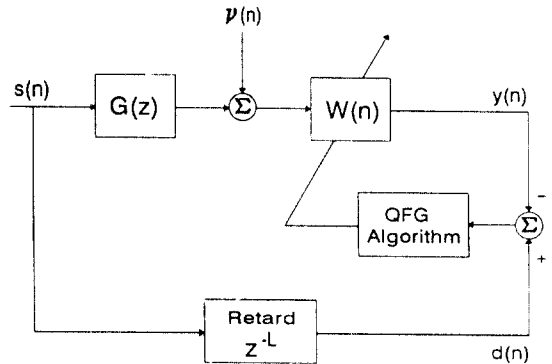


그림 2. QFG 알고리즘을 이용한 채널 동화기
Fig. 2. Channel equalization using the QFG algorithm

그림 3~그림 7은 채널 동화기(channel equalizer)의 모의실험에서 LMS 알고리즘, LFG 알고리즘, QFG 알고리즘에 대한 평균사승오차 학습 곡선(MSE learning curve)을 보여준다. 이 곡선은 컴퓨터를 사용하여 200회의 독립 시행을 실시하여 출력 오차 $e(n)$ 의 사승을 평균하여 얻은 앙상블 평균(ensemble

average) 수렴특성을 보여준다. 이 경우에 적응필터 계수의 수 N 은 15개이었다. 또한 채널 시스템 $G(z)$ 에서 상수 k 를 1.0이라고 가정하였다.

그림 3에서는 조건 $h=3.0$, $\mu=0.001$ 아래에서 매개변수 $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.42$ 인 QFG 알고리즘과 LMS 알고리즘이 도시되어 있는데, QFG 알고리즘의 수렴속도가 크게 향상된 것을 알 수 있다. $h=3.0$ 일 때 固有值 伸張比는 8.2가 되었고 이에 상응하는 채널 계수는 $g(0)=0.25$, $g(1)=1.0$, $g(2)=0.25$ 이었다. 그림 4에서는 조건 $h=3.0$, $\mu=0.001$ 아래에서 매개변수 $\alpha_1=0.5$ 인 LFG 알고리즘과 매개변수 $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.42$ 인 QFG 알고리즘을 보여주고 있는데, 같은 조건에서 QFG 알고리즘의 수렴속도가 현저히 향상된 것을 알 수 있다. 위 QFG 알고리즘은 $0 < \alpha_2 < 0.48$ 범위에서 안정하였고, LFG 알고리즘보다 수렴속도가 개선되었으며, $\alpha_2=0.41$ 로 최적화 되었을 때 수렴속도가 가장 향상되었다. 그러나 $-1 < \alpha_2 < 0$ 범위에서는 LFG 알고리즘보다 수렴속도가 오히려 저하되었으며, $\alpha_2 > 0.48$ 범위 및 $\alpha_2 < -1$ 범위에서는 불안정한 특성을 나타내었다.

그림 5에서 $h=3.2$, $\mu=0.001$ 이고, 매개변수 $\alpha_1=1.0$ 인 LFG 알고리즘이 불안정한 특성을 나타내더라도 매개변수 $\alpha_2=-0.1$ 를 가진 QFG 알고리즘은 안정한 수렴특성을 보여주고 있다. $h=3.2$ 일 때 固有值 伸張比는 15.2가 되었고 이에 상응하는 채널 계수는 $g(0)=0.308658$, $g(1)=1$, $g(2)=0.308658$ 이었다. 그림 6에서 $h=3.9$, $\mu=0.02$ 이고, 매개변수 $\alpha_1=0.5$ 를 가진 LFG 알고리즘이 불안정한 지라도 매개변수 $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=-0.2$ 로 최적화된 QFG 알고리즘이 가장 신속한 수렴속도를 나타내고 있다. $h=3.9$ 일 때 固有值 伸張比는 420이 되었고 이에 상응하는 채널 계수는 $g(0)=0.479867$, $g(1)=1$, $g(2)=0.479867$ 이었다.

그림 7에서는 조건 $h=3.9$, $\mu=0.025$ 아래에서 매개변수 $\alpha_1=0.1$, $\alpha_2=0.01$ 인 QFG 알고리즘이 LMS 알고리즘에 비하여 동일한 조건 아래에서 좀 더 부드러운 수렴특성(smoothing convergence)을 나타내고 있다. LMS 알고리즘에서의 버스트 오차는 통신 분야의 응용에서 성능을 저하시키므로, QFG 알고리즘은 버스트 오차 효과를 방지하여 성능을 크게 향상시킬 수 있다.

LFG 알고리즘이 $\alpha_1=1$ 일 때 불안정하다는 것은 평균 순환 해석에서 알 수 있었다. 또한 α_1 의 값이 음수 일 때 성능이 저하됨을 알 수 있다. 즉, 전 필터계

수 갱신항이 음의 방향에 있을 때 그 필터계수 갱신량의 음의 분수를 그 다음의 필터계수 갱신항에 첨가하기 때문에 수렴 속도가 저하될 수 있다. 불안정한 LFG 알고리즘이 수렴할 수 있도록 적절한 α_2 의 값을 더하면 그 알고리즘을 안정하게 할 뿐만 아니라 수렴 속도도 현저히 향상시킬 수 있다. 위 그림 5에서 살펴듯이, $\alpha_1=1$ 인 불안정한 LFG 알고리즘에서 $0 < \alpha_2 < -0.7$ 인 QFG 알고리즘을 적용하였을 때 학습곡선이 안정하였으며, $\alpha_2=-0.1$ 일 때 수렴속도가 가장 빨랐다.

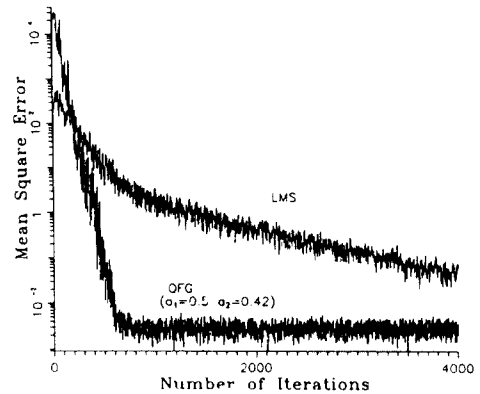


그림 3. LMS 및 $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.42$ 를 가진 QFG에 대한 MSE 학습 곡선(I)
Fig. 3. MSE learning curves for the LMS and the QFG with $\alpha_1=0.5$ and $\alpha_2=0.42$ (I)

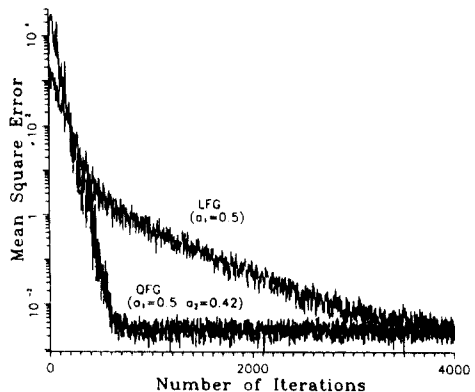


그림 4. $\alpha_1=0.5$ 를 가진 LFG 및 $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.42$ 를 가진 QFG에 대한 MSE 학습 곡선(II)
Fig. 4. MSE learning curves for the LFG with $\alpha_1=0.5$ and the QFG with $\alpha_1=0.5$ and $\alpha_2=0.42$ (II)

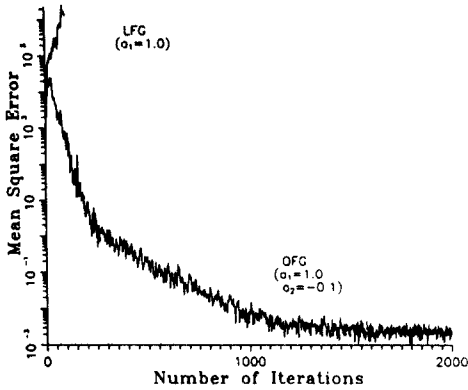


그림 5. $\alpha_1=1$ 을 가진 LFG 및 $\alpha_1=1, \alpha_2=-0.1$ 를 가진 QFG에 대한 MSE 학습 곡선(III)
 Fig. 5. MSE learning curves for the LFG with $\alpha_1=1$ and the QFG with $\alpha_1=1$ and $\alpha_2=-0.1$ (III)

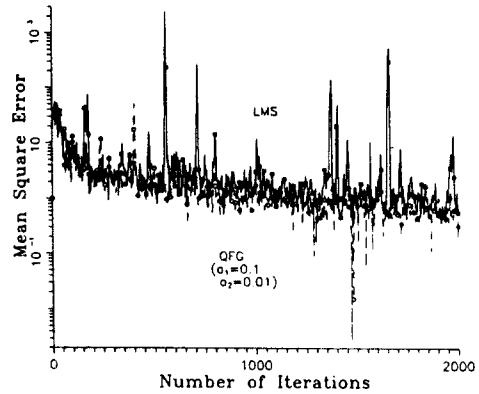


그림 7. LMS 및 $\alpha_1=0.1, \alpha_2=0.01$ 를 가진 QFG에 대한 MSE 학습 곡선(V)
 Fig. 7. MSE learning curves for the LMS and QFG with $\alpha_1=0.1$ and $\alpha_2=0.01$ (V)

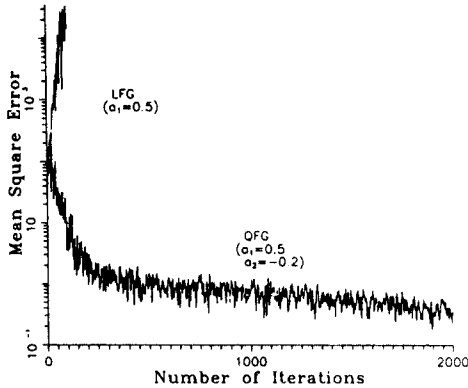


그림 6. $\alpha_1=0.5$ 를 가진 LFG 및 $\alpha_1=0.5, \alpha_2=-0.2$ 를 가진 QFG에 대한 MSE 학습 곡선(IV)
 Fig. 6. MSE learning curves for the LFG with $\alpha_1=0.5$ and the QFG with $\alpha_1=0.5$ and $\alpha_2=-0.2$ (IV)

VI. 結 論

스칼라 변수 α_1, α_2 에 의하여 매개변수화된 제2차 필터화 경사도 알고리즘에 관하여 收斂 結果를 살펴 보았다. 평균 수렴 특성을 해석할 때 그 전이 행렬의 고유치가 복소수 혹은 실수가 될 수 있음을 살펴 보았다. 수렴 특성을 해석할 때 본 알고리즘이 안정하기 위한 제한조건을 보여주었다. 이 때 $\mu_i > (1 + \alpha_1 - \alpha_2) / \lambda_i$ 에서는 본 알고리즘이 불안정함을 알 수 있었고,

그 결과는 컴퓨터 모의실험에서 증명되었다. 적절한 α_1 가 알고리즘의 수렴속도를 향상시킬 수 있지만, 오조정량(misadjustment)이 증가하는 경우가 발생할 수 있다. 이 경우에는 알고리즘이 수렴 상태에 도달하기 전에 모멘텀 항을 제거하여 오조정량을 감소시킬 수 있다. 평균자승 수렴특성을 해석할 때 평균자승 순환식을 유도하고 초과 평균자승 오차 및 오조정량을 살펴보고 본 알고리즘이 안정하기 위하여 고려되어야 할 필요조건에 대하여 알아 보았다.

채널 등화기에 적용한 컴퓨터 모의실험에서는 제2차 필터화 경사도 알고리즘이 기존의 LMS 알고리즘, LFG 알고리즘보다 수렴속도에서 현저한 향상을 보여주었고, 버스트 오차 효과를 방지하도록 부드러운(smooth) 수렴특성을 나타내었다. 그러나 단점으로서 QFG 알고리즘의 계산량이 LMS, LFG 알고리즘의 계산량에 비하여 증가함을 알 수 있었다. 또한 LFG 알고리즘이 불안정하거나 발산할 때에도, QFG 알고리즘을 적용할 경우 학습곡선이 안정하였으며 그 수렴속도가 가장 빨랐다.

디지털 通信 시스템에서 평균자승오차를 최소화하기 위한 채널 등화기는 초기의 학습기간(initial training period)을 필요로 하였다. 그러나 이와 같은 초기의 학습기간도 필요 없고 data 흐름에 대하여 직접 등화기로서 언제든지 수행할 수 있는 보다 효율적인 등화기와 carrier recovery 알고리즘 등은 앞으로 연구되어야 할 것으로 사료된다.

참 고 문 헌

1. B.Widrow and S.D.Stearns, Adaptive Signal Processing, Englewood Cliffs, NJ :Prentice Hall, 1985.
2. J.G.Proakis, "Channel identification for high speed digital communications," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC 19, pp.916-922, Dec. 1974.
3. J.R.Glover, Jr., "Comments on 'Channel identification for high speed digital communications,'" IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC 20, pp. 823, Dec. 1975.
4. J.G.Proakis, "Author's Reply," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC 20, pp.823-824, Dec. 1975.
5. R.P.Lippmann, "An introduction to computing with neural nets," IEEE ASSP Mag., vol. 4, pp.1-22, Apr. 1987.
6. S.Roy and J.J.Shyk, "Analysis of the momentum LMS algorithm," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP 38, pp. 2088-2098, Dec. 1990.
7. L.L.Horowitz and K.D.Senne, "Performance advantage of complex LMS for controlling narrow band adaptive arrays," IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS 28, pp.562-576, June 1981.
8. A.Feuer and E.Weinstein, "Convergence analysis of LMS filters with uncorrelated Gaussian data," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-33, pp.222-230, Feb. 1985.
9. W. A. Gardner, "Learning characteristics of stochastic gradient descent algorithms : A general study, analysis, and critique," Signal Processing, vol. 6, pp.113-133, 1984.
10. B.Widrow, P.E.Mantey, L.J.Griffiths, and B. B.Goode, "Adaptive Antenna Systems," Proc. IEEE, vol.55, no.12, pp.2143-2159, Dec. 1967.
11. B.Widrow, J.M.McCool, M.G.Larimore, and C.R.Johnson, Jr., "Stationary and Nostationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter," Proc. IEEE, vol.64, no.8, pp. 1151-1162, Aug. 1976.
12. E.I.Jury, Theory and Application of the Z-Transform Method, New York : Wiley, 1964.
13. S.H.Cho, "Convergence analysis for efficient adaptive digital filtering algorithms and structures," Ph. D. dissertation, University of Utah, August 1989.
14. S.Haykin, Adaptive Filter Theory, Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1991.
15. B.Mulgrew and C.F.N.Cowan, Adaptive Filters and Equalizers, Kluwer Academic Publishers, 1988.
16. S. Roy, "Design of Linear Phase FIR Filters Using the LMS Algorithm," IEEE Trans. Signal Processing, vol.41, pp.1685-1689, Apr. 1993.

金 海 正(Hae Jung Kim)

正 會 員

1960년 10월 26일생

현재 : 한양대학교 전자공학과 박사과정
제18권 제11호 참조

李 斗 秀(Doo Soo Lee)

正 會 員

1946년 7월 3일생

현재 : 한양대학교 전자공학과 교수
제18권 제11호 참조