응용통계연구 제 7권 2호
1994년 9월 pp. 289-297

L_i 계획에서 조화행렬의 구조에 관한 연구[1)]

배종성[2)]

요약

블럭계획에서 조화행렬(concordance matrix)이 퍼뮤테이션 행렬(permutation matrix)들의 크로네커 곱(Kronecker product)의 선형결합으로 표시되면, 그러한 블럭계획들은 특성치 C (Property C)를 갖고 특성치 C를 갖는 블럭계획들은 역행렬의 계산없이 블럭내분석이 가능하다(Paik, 1985). L_i 계획(L_i type PBIB design)이 특성치 C에 속하는 것을 보이기 위하여, 조화행렬의 구조가 다중순환형식임을 보였다.

1. 서 론

부분적으로 균형된 불완비블럭계획(Partially Balanced Incomplete Block design; PBIB design)에서 처리효과를 추정하기 위한 블럭내분석(intrablock analysis)의 축소된 정규방정식은 다음과 같다.

$$C\hat{\tau}=Q . \qquad (1.1)$$

여기서, $C=rI-(1/k)NN'$로 블럭내 행렬(intrablock matrix; John, 1980), 혹은 정보행렬(information matrix; John, 1987), $Q=T-Nk^{-1}B$, r은 반복수, I는 단위행렬, k는 블럭의 크기, NN'는 조화행렬 (John, 1980) ; 혹은 일치행렬(concurrence matrix; John, 1987), N은 각 블럭에 어느 처리가 배치 되었는가를 나타내는 결합행렬(incidence matrix), N'는 N의 전치행렬, $\hat{\tau}$는 처리의 추정치를 나타내는 벡터, T는 각 처리의 합을 나타내는 벡터, B는 각 블럭의 합을 나타내는 벡터이다. (1.1)식의 정규방정식 해는 (1.2)식과 같다.

$$\hat{\tau}=\Omega Q , \qquad (1.2)$$

여기서, Ω는 $C\Omega C=C$로 되는 C의 일반화된 역행렬이다. C의 일반화된 역행렬 Ω는 다음과 같이 구하는 것이 편리하다(Shah, 1959).

$$\Omega=(C+aJ)^{-1}, \qquad (1.3)$$

여기서, a는 0이 아닌 상수, J는 모든 원소가 1인 행렬이다. (1.2)식의 $\hat{\tau}$를 구하는데, NN'의 특수한 구조를 이용하여 역행렬을 이용하지 않고 해를 구하는 방법이 연구되어 왔다.

Kurkjian과 Zelen(1963)은 처리수 $(v)=m_1m_2\cdots m_n$으로 표시되는 블럭실험에서 NN'가 아래의 (1.4)식과 같이 크로네커 곱의 곱과 합으로 표시되면 특성치 A를 갖는다 라고 하고, $\hat{\tau}$를 역행

1) 이 논문은 1993년도 한국학술진흥재단의 지방대육성 연구비에의하여 연구되었음.
2) (500-757) 광주직할시 북구 용봉동 300 전남대학교 통계학과.

렬을 구하지 않고 계산하는 방법을 보였다.

$$NN' = \sum_{s=0}^{n} \{ \sum_{\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_n=s} h(\delta_1\delta_2\dots\delta_n) \prod_{i=1}^{n} \otimes D_i^{\delta_i} \}, \tag{1.4}$$

여기서, δ_i=0 혹은 1 이고 , h($\delta_1\delta_2..\delta_n$)은 상수,

$$D_i \text{ 는 } \begin{cases} \delta_i=0 \text{ 이면 } I_{mi} \\ \delta_i=1 \text{ 이면 } J_{mi} \end{cases} \text{ 이다.}$$

한편, Paik(1985)은 $v=m_1m_2\cdots m_n$인 블럭계획에서 NN'가

$$NN' = \sum_{i_1=0}^{m_1-1} \sum_{i_2=0}^{m_2-1} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n-1} h(i_1i_2\dots i_n) \ (\prod_{i=1}^{n} \otimes R_{m_j}^{i_j}), \tag{1.5}$$

여기서, h($i_1i_2\dots i_n$)은 NN'의 첫 행의 원소, $R_{m_j}^{i_j}$는 m_j*m_j인 행과 열에 1이 하나이고 나머지 원소가 0인 퍼뮤테이션 행렬이고, $\prod_{i=1}^{n} \otimes R_{m_j} = R_{m_1}^{i_1} \otimes R_{m_2}^{i_2} \dots \otimes R_{m_n}^{i_n}$ 이다.

(1.5)식과 같이 표시되면 그 블럭계획은 특성치 C를 갖는다 라고 하고, 이 경우 NN', C 및 Ω는 구조적으로 동일하기 때문에(다중순환형식행렬) Ω의 첫행을 c($i_1i_2\dots i_n$)라 하면

$$c(i_1i_2\dots i_n) = (\prod_{i_1}^{n} m_j)^{-1} \sum_{i_1}\sum_{i_2}\dots\sum_{i_n} \theta^{-1}(i_1i_2\dots i_n)\cos(\sum_{k=1}^{n} 2i_kj_k\pi/m_k), \tag{1.6}$$

여기서, $\theta(i_1i_2\dots i_n) = \sum_{i_1}\sum_{i_2}\dots\sum_{i_n} a(i_1i_2\dots i_n)\cos(\sum_{k=1}^{n} 2i_kj_k\pi\ /m_k)$.

(1.6)식과 같이 (1.2)식의 역행렬을 이용하지 않고, $\hat{\tau}$를 계산하는 방법과 특성치 A는 특성치 C의 특수한 경우임을 보였다.

(1.5)식의 특징은 NN'가 분할된 블럭행렬間, 블럭행렬內에서 서로 순환하는 다중순환형식(multi-nested block circulant pattern; Paik(1985), 혹은 블럭순환형식(block circulant pattern; John, 1987) ; 혹은 구조 K (structure K; Gupta 등, 1989)에 따른다는 것이다. 대부분의 부분적으로 균형된 불완비블럭계획은 특성치 C에 속한다(Paik, 1985). 그러나 $L_{i(i=3,4,\dots,n)}$ 계획의 NN'의 구조에 대해서는 몇가지 문헌에서 서로 상반되는 결과를 보여주고 있다. 즉 Raghavarao(1971)의 pp. 264와 Day(1986) 의 pp. 271에는 L_i 계획은 특성치 A에 속한다고 했으나 Cotter 등(1973)과 Paik(1979)에서는 L_3 계획은 특성치 A에 속하지 않는다고 했다. 본 논문에서는 $L_{i(i=3,4,\dots,n)}$ 계획이 특성치 C에 속함을 보이고자 하는 것이다. 또한 L_5 계획이 특성치 A에 속하지 아니함을 예를 통해서 보였다.

Robert 등(1973, pp. 200)의 " 모든 고유행렬(proper matrix)은 같은 차수를 갖는 퍼뮤테이션 행렬들의 선형결합으로 표시 할 수 있다." 라는 정리를 이용하여 쉽게 블럭실험에서 조화행렬이 다중순환형식이면 특성치 C에 속한다는 것을 증명할 수 있다.

따라서 우리는 $L_{i(i=3,4,\dots,n)}$ 계획의 NN'가 특성치 C에 속한다는 증명 대신, NN'가 다중순환

형식행렬이 됨을 보이려고 한다.

L_i 계획의 정의는 다음과 같다.

정의 1 $v = s^2$인 처리를 s*s 방격에 자연수의 순서로 나열하고 (i-2)개의 s*s라틴방격을 직교하게 겹쳤을때 같은행 같은렬 같은 문자에 대응하는 처리끼리는 첫 번째 상반관계(first associate(λ_1)), 나머지 처리와는 두 번째 상반관계(second associate(λ_2))가 되도록 한 상반형(association scheme)에 따라 구성된 부분적으로 균형된 불완비블럭계획을 L_i 계획이라한다.

2. L_i 계획의 상반형

크기 s*s인 (s-1)개의 서로 직교하는 라틴방격을 만드는 방법은 여러가지가 있을 수 있으나 방법 중의 한가지는 다음과 같다(박성현 pp. 374 참조).

먼저 (s-1)개 방격의 첫행의 문자를 모두 1, 2, 3, ...,s 로 자연수의 순서로 나열하고

a) 첫번째 방격 M_1의 y(y=2,3,4...s)행은 y-1행의 원소를 왼편으로 1개씩 순환시켜서 만든다.

b) 두번째 방격 M_2 의 y(y=2,3,4..s)행은 y-1행의 원소를 왼편으로 2개씩 순환시켜서 만든다.

c) 같은 방법으로 M_{s-1}번째 방격의 y(y=2,3,4..s)행은 y-1행의 원소를왼편으로 (s-1)개씩 순환시킨, y-1행의 마지막 원소를 y행의 첫번째 원소로 하여 순환 시켜서 만든다. 직교하는 $M_1, M_2, \cdots, M_{s-1}$개의 라틴방격중 (i-2)개의 방격을 겹치면 L_i 계획의 상반형이 된다. 이를 그림으로 나타내면 그림 1과 같다.

3. 다중순환형식행렬

$v = s^2$인 L_i 계획의 NN'을 행으로 s개씩 분할해서 각각 $p_1, p_2, \cdots, p_s$그룹이라 하고, 열로 s개씩 분할하여 각각 $w_1, w_2, \cdots, w_s$그룹이라고 한다. p_i그룹과 w_j 그룹에 속하는 블럭원소를 C_{ij}라 하면 NN'는 아래의 (3.1)식과 같이 나타낼 수 있다.

$$NN' = \{C_{ij}\}_{ij=1,2,\cdots,s}. \tag{3.1}$$

(3.1)식의 블럭행렬 C_{ij}는 모두 순환행렬이 되고, $C_{ij(i,j=1,2,\cdots,s)}$間에 순환하는 블럭間 순환행렬이 되어, NN'는 다중순환형식행렬이 됨을 보이고자 한다.

처 리	1	2	3	4	. . .	s-1	s
방 격 M_1	1	2	3	4	. . .	s-1	s
방 격 M_2	1	2	3	4	. . .	s-1	s
방 격 M_3	1	2	3	4	. . .	s-1	s
.	.	.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	.	.	. . .	.	.
방 격 M_{s-1}	1	2	3	4	. . .	s-1	s
처 리	s+1	s+2	s+3	s+4	. . .	s+s-1	2s
방 격 M_1	2	3	4	5	. . .	s	1
방 격 M_2	3	4	5	6	. . .	1	2
방 격 M_3	4	5	6	7	. . .	2	3
.	.	.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	.	.	. . .	.	.
방격 M_{s-1}	s	1	2	3	. . .	s-2	s-1
.	.	.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	.	.	. . .	.	.
.	.	.	.	.	. . .	.	.
처 리	s(s-1)+1	s(s-1)+2	s(s-1)+3	s(s-1)+4	...	s(s-1)+s-1	s*s
방 격 M_1	s	1	2	3		s-2	s-1
방 격 M_2	s-1	s	1	2		s-3	s-2
방 격 M_3	s-2	s-1	s	1		s-4	s-3
.	.	.	.	.	...	.	.
.	.	.	.	.	...	.	.
방 격 M_{s-1}	2	3	4	5	...	s	1

<그림 1>

정리 1 $v=s^2$인 L_i 계획의 NN′을 크기 s*s인 s^2개의 블럭으로 나누어 각각의 블럭을 $C_{ij(i,j=1,2,\cdots,s)}$라면 대각선블럭 $C_{ii(i=1,2,\cdots,s)}$는 모두 대각선원소가 반복수 r이고, 비대각선원소가 λ_1인 순환행렬이다.

증명 $v=s^2$인 처리를 s*s방격에 자연수의 순서로 s개씩 나열했기 때문에 $C_{ii(i=1,2,\cdots,s)}$의 비대각선 원소에 대응 하는 처리는 같은 행에 속하는 처리들이다(그림 1 참조). 정의 1에 의해 같은 행에 속하는 처리들은 λ_1의 관계가 있기 때문에 비대각선원소는 모두 λ_1이다. 또한 부분적으로 균형된 불완비 블럭계획에서 NN′의 정의에 의해 대각선원소는 반복수 r이 나타난다.

3.1 블럭內 순환행렬

정리 2 $v=s^2$인 L_i 계획의 조화행렬을 크기 s*s인 s^2개의 블럭행렬로 분할했을때 블럭행렬 각각은 모두 순환행렬이다.

증명 그림 1에서 $M_{h(h=1,2,\cdots,i-2)}$개의 방격을 사용했을때, (3.1)식에서 $P_{k(k=1,2,\cdots,s)}$그룹의 a번째 처리와 $w_{j(j\neq k=1,2,..s)}$ 그룹에서 e 번째에 문자 z로 만난다면 방격 M_h의 성질에의해 W_{j+1} (mod s) 번째 그룹에서는 (e-h) (mod s)번째에 문자 z가 나타나게 된다. 또한 $P_{k(k=1,2,\cdots,s)}$그룹의 (a+1) (mod s)번째 처리와는 $w_{j(j\neq k=1,2...s)}$그룹에서는 (e+1) (mod s)번째에 문자 z가 나타난다. 정의 1에 의해서 같은 문자 끼리는 λ_1의 관계에 있고, (i-2)개의 방격이 서로 직교하기 때문에 같은 위치에 λ_1이 겹쳐서 나타나지 아니한다. 또한 정리 2에의해 대각선 블럭행렬은 모두 대각선원소가 반복수 r이고, 비대각선 원소는 λ_1인 순환행렬이다. 따라서 s_2개의 블럭행렬은 모두 순환행렬이다.

3.2 블럭間 순환행렬

정리 3 $v=s^2$인 L_i 계획의 조화행렬을 크기 s*s인 s^2개의 블럭행렬로 분할했을때 조화행렬은 블럭행렬間에 순환하는 블럭間 순환행렬이다.

증명 그림 1의 $M_{h(h=1,2,\cdots,i-2)}$방격은 y(y=1,2,3..s−1)행의 원소를 h개씩 왼편으로 순환시켜 (y+1)행을 만들었기 때문에 (3.1)식에서 $P_{k(k=1,2,\cdots,s)}$그룹의 a번째 처리와 $w_{j(j=1,2,\cdots,s)}$그룹의 d 번째 처리에 대응 하는 문자가 z번째 문자로 λ_1의 관계라면, $P_{k+1(k=1,2,\cdots,s)}$ (mod s)그룹의 a번째 처리와 $w_{j+1(j=1,2,\cdots,s)}$ (mod s)그룹의 d 번째 처리에 해당하는 문자는 (z+h)번째 문자로 λ_1의 관계에 있다. 또한 (정리 2)에 의해 대각선 블럭행렬은 모두 대각선원소가 반복수 r, 비대각선 원소가 λ1인 행렬이다. 즉 (3.1)식의 $C_{ij}=C_{i+1\ j+1\ (i,j=1,2,\cdots,s)}$ (mod s) 인 관계가 성립 한다는 것이다. 따라서 s^2개의 블럭행렬은 서로 순환하는 블럭間 순환행렬이다.

3.3 L_i 계획에서 조화행렬의 구조

위의 정리 1, 정리 2 및 정리 3을 종합하여 정리 4를 얻을 수 있다.

정리 4 $v=s^2$인 L_i 계획의 조화행렬을 크기 s*s인 s^2개의 블럭행렬로 분할했을 때 s^2 개의 블럭행렬 각각은 모두 순환행렬이고 또한 블럭행렬間에서 서로 순환하는 블럭순환행렬로 조화행렬은 다중순환형식행렬이다.

4. 예제

$v=5^2$인 L_2 계획을 2장 그림 1의 상반형을 사용하면, NN′는 그림 2와 같이 다중순환형식행렬이 된다(단, 그림 2에서 r은 반복수, 1은 λ_1을, 2는 λ_2를 나타냄).

r 1 1 1 1	1 2 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 1 2 1	1 1 1 1 2
1 r 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 1 2 1	1 1 1 1 2	2 1 1 1 1
1 1 r 1 1	1 1 1 2 1	1 1 1 1 2	2 1 1 1 1	1 2 1 1 1
1 1 1 r 1	1 1 1 1 2	2 1 1 1 1	1 2 1 1 1	1 1 2 1 1
1 1 1 1 r	2 1 1 1 1	1 2 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 1 2 1
1 1 1 1 2	r 1 1 1 1	1 2 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 1 2 1
2 1 1 1 1	1 r 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 1 2 1	1 1 1 1 2
1 2 1 1 1	1 1 r 1 1	1 1 1 2 1	1 1 1 1 2	2 1 1 1 1
1 1 2 1 1	1 1 1 r 1	1 1 1 1 2	2 1 1 1 1	1 2 1 1 1
1 1 1 2 1	1 1 1 1 r	2 1 1 1 1	1 2 1 1 1	1 1 2 1 1
1 1 1 2 1	1 1 1 1 2	r 1 1 1 1	1 2 1 1 1	1 1 2 1 1
1 1 1 1 2	2 1 1 1 1	1 r 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 1 2 1
2 1 1 1 1	1 2 1 1 1	1 1 r 1 1	1 1 1 2 1	1 1 1 1 2
1 2 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 1 r 1	1 1 1 1 2	2 1 1 1 1
1 1 2 1 1	1 1 1 2 1	1 1 1 1 r	2 1 1 1 1	1 2 1 1 1
1 1 2 1 1	1 1 1 2 1	1 1 1 1 2	r 1 1 1 1	1 2 1 1 1
1 1 1 2 1	1 1 1 1 2	2 1 1 1 1	1 r 1 1 1	1 1 2 1 1
1 1 1 1 2	2 1 1 1 1	1 2 1 1 1	1 1 r 1 1	1 1 1 2 1
2 1 1 1 1	1 2 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 1 r 1	1 1 1 1 2
1 2 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 1 2 1	1 1 1 1 r	2 1 1 1 1
1 2 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 1 2 1	1 1 1 1 2	r 1 1 1 1
1 1 2 1 1	1 1 1 2 1	1 1 1 1 2	2 1 1 1 1	1 r 1 1 1
1 1 1 2 1	1 1 1 1 2	2 1 1 1 1	1 2 1 1 1	1 1 r 1 1
1 1 1 1 2	2 1 1 1 1	1 2 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 1 r 1
2 1 1 1 1	1 2 1 1 1	1 1 2 1 1	1 1 1 2 1	1 1 1 1 r

<그림 2>

그림 2의 NN′을 (1.5)식과 같이 나타내기 위해 퍼뮤테이션 행렬 R^i(i=0, 1, 2, 3, 4)를 다음과 같이 놓으면

$$R^0=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad R^1=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad R^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$R^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}\qquad R^4=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

NN′는 다음과 같이 퍼뮤테이션 행렬들의 크로네커 곱의 선형결합으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}NN' = \; & rR^0\otimes R^0+\sum_{i=1}^{4}(1R^0\otimes R^i)+1R^1\otimes R^0+2R^1\otimes R^1+\sum_{i=2}^{4}(1R^1\otimes R^i)\\ & +\sum_{i=0}^{1}(1R^2\otimes R^i)+2R^2\otimes R^2+\sum_{i=3}^{4}(1R^2\otimes R^i)+\sum_{i=0}^{2}(R^3\otimes R^i)+2R^3\otimes R^3\\ & +1R^3\otimes R^4+\sum_{i=0}^{3}(1R^4\otimes R^i)+2R^4\otimes R^4,\end{aligned}$$

여기서, r은 반복수, 1 은 λ_1을, 2는 λ_2를 나타낸다. 따라서 L_5 계획이 특성치 C에 속함을 알 수 있다. 그러나 그림 2의 NN′을 (1.4)식으로는 나타낼 수 없기 때문에 특성치 A에는 속하지 아니한다.

5. 논 의

L_i 계획의 상반형을 작성하는 것은 크기 s*s인 (i-2)개의 직교하는 방격을 찾아야 하기 때문에 쉬운 일이 아니다. 우리는 박성현(1982)의 PP. 374을 참조하여 상반형을 작성하였다. 그러나 이 방법 외에도 다른 방법이 있을 수 있다(Clatworthy, 1973).

예제에서 보았듯이 L_5 계획은 NN′가 다중순환형식행렬이기 때문에 특성치 C에 속하나, 특성치 A에는 속하지 아니한다. 특성치 A에 속하기 위해서는 (3.1)식의 $C_{ij(i\neq j=1,2,..s)}$ 가 $C_{ii(i=1,2,\cdots,s)}$ 와 같은 형식을 취해야한다. 우리는 L_i 계획이 특성치 C에 속함을 보였기 때문에, (1.6)식으로 역행렬을 이용하지 않고 L_i 계획의 해를 구할 수있다.

참 고 문 헌

[1] 박성현 (1982). 『현대실험계획법』, 민영사, 서울.

[2] Clatworthy,W.H. (1973). Tables of two associate class partially balanced designs, *National Bureau of Standard Applied Math.* Series 47.

[3] Cotter, S.C., John, J.A., and Smith, T.M.F. (1973). Multifactor experiment in non-orthogonal designs, *Journal of the Royal Statistical Society,* Series B, Vol. 35, 361-367.

[4] Dey, A. (1986). *Theory of block designs.* John Wiley & Sons, New York.
[5] Gupta, S. and Mukerjee, R. (1989). *A calculus for factorial arrangements,* Springer-Verlag, New york.
[6] John, J.A. (1987). *Cyclic designs,* Chapman and Hall, New York.
[7] John, P.W.M. (1980). *Incomplete block design,* Marcel Dekker, New york.
[8] Kurkjian, B. and Zelen, M. (1963). Applications of the calculus of factorial arrangements I. block and direct product design, *Biometrika,* Vol. 50 , 63-67.
[9] Paik, U.B. (1979), Latin square type partially balanced incomplete block designs, Journal of the Korean Statistical Society, Vol. 8, 125-130.
[10] ------ (1985). Cyclic factorial association scheme partially balanced incomplete block designs, Journal of the Korean Statistical Society, Vol. 14, 29-34.
[11] Raghavararo, D. (1971). *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments,* John Wiley & Sons, New York.
[12] Robert, A.W and Verlag, D.E. (1973). *Convex Function.* Academic Press, New York.
[13] Shah, B.V. (1959). A generalization of partially balanced incomplete block designs, *The Annals of Mathematical Statistics,* Vol. 30, 1041-1050.

A Study on the Structure of Concordance Matrices of Li Type PBIB Designs.[3]

Jongsung Bae[4]

Abstract

A block design will be said to have Property C if the concordance matrix can be expressed as a linear combination of Kronecker product of permutation matrices. No matrix inversions are necessary for the intrablock analysis of the block designs which possesses the Property C(Paik,1985). In this paper, in order to show the Li type PBIB designs possesses the Property C, we suggest the structure of the concordance matrices of Li type PBIB designs are multi-nested block circulant pattern.

3) This paper was supported by the NON DIRECTED RESEARCH FUND, Korea Research Foundation, 1993.

4) Department of statistics, Chonnam National University,Kwangju,500-757, KOREA.