응용통계연구 제 7 권 1 호
1994년 3 월 pp. 113 - 119

14면 주사위의 확률[1)]

허명회[2)]

요약

이 글에서는 '14면 주사위'의 확률 문제를 통하여 논리적 확률과 빈도적 확률의 개념에 대하여 논의하게 될 것이다. 여기서 '14면 주사위'란 경주 안압지에서 출토된 통일신라시대의 목제 주사위를 말하는데 이 주사위는 8개의 삼각면과 6개의 사각면을 갖고 있다.

1. 서론

확률을 개념적 유형에 따라 분류하면 다음과 같다 (Barnett, 1981, p.65).

- '고전적' 확률: 대칭적, '동등하게 가능한 사건 출현'.
- 논리적 확률: 객관적, 함축의 논리적 측도로서의 '믿음의 정도'.
- 빈도적 확률: 경험적, '반복가능한' 상황에서의 상대빈도.
- 주관적 확률: '합리적' 또는 '정합적' 행동의 개인별 평가.

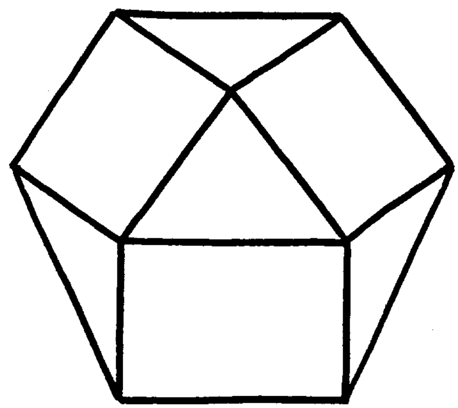
'고전적' 확률이란 동등하게 가능한 결과(equally likely outcome)의 수가 n 일 때 그 중 사건 A가 r개의 결과를 지칭하는 경우 확률 P(A)를 r/n으로 정의하는 것이다. 이런 '고전적' 확률의 개념은 순환적(circular)이면서 동시에 제한적(restrictive)일 수 밖에 없으므로 이것은 논리적 확률로 발전하게 되고 빈도적 확률과 주관적 확률이 병립하게 된다. 케인즈(J.M. Keynes), 제프리즈(H. Jeffreys), 카르납(R. Carnap) 등에 의하여 정형화된 논리적 확률론에서는 어떤 전제하에 그 전제가 사건을 함축할 정도를 논리적으로 수량화하여 확률을 정의한다. 한편 빈도적 확률론에서는 동일한 상황에서 시행을 무한번 반복하는 것이 가능한 경우 사건 출현의 상대빈도를 극한화한 수치값으로 확률을 정의된다. 그리고 주관적 확률론은 가상적인 내기(betting) 상황하에서의 개인의 정합적 행동으로부터 확률이 유도된다는 입장이다. 이런 확률의 개념적 유형에 대한 논의는 Barnett(1981, pp.64-95)와 Fine(1973)에 정리되어 있으며 Carnap(1966)과 이초식(1976) 등에 그 철학적 기반이 분석되어 있다.

이 글의 목적은 논리적 확률과 빈도적 확률의 개념을 쉽게 논의하는 데 있으며 예시의 도구로서 경주 안압지 출토 '14면 주사위'를 사용할 것이다. (고등학교 교과서에서는 '고전적' 확률을 수학적 확률로, 빈도적 확률을 통계적 확률이라 하고 있다.)

---

1) 이 논문은 1993년도 고려대학교 특별연구비 지원을 받았습니다. 모의 주사위를 만드는 데 도움을 주신 고려공예사의 목공과 건설적인 조언을 주신 두 익명의 심사위원께 감사드립니다.

2) (136-701) 서울시 성북구 안암동 5-1, 고려대학교 정경대학 통계학과 교수.



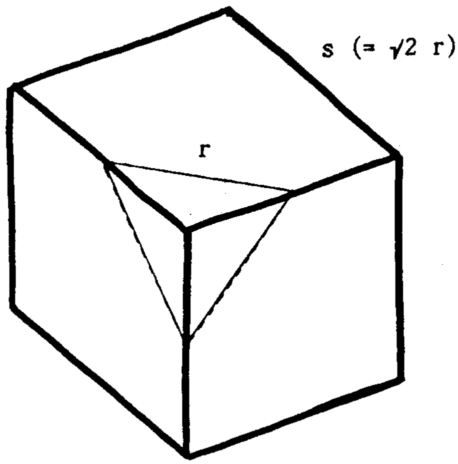
<그림 1> '14면 주사위'

통상의 6면 주사위는 각 면이 동등하게 가능하기 때문에 각 면의 출현확률은 '고전적' 확률의 의미로 1/6 이다. 또한 각 면이 구별가능하지 않기 때문에 각기 논리적 확률 1/6 을 갖는다고 할 수 있다. 한편 빈도적 확률을 계산하기 위해서 주사위를 가령 1000번 굴려서 어느 한 면이 157번 출현하였다면 그 면의 확률이 빈도적으로 0.157로 추정된 것 뿐이지 빈도적 확률값 자체에 대하여는 말할 수 없다 (무한번 시행할 수 없기 때문에). 확률 개념의 설명 및 논의를 위하여 6면 주사위를 대상으로 하는 경우에는 이와 같이 '고전적' 확률과 논리적 확률을 구분하기가 쉽지 않으며 또한 논리적 확률과 빈도적 확률의 근본적 차이를 충분히 인식하기 어렵다. 다음 절에서 소개할 '14면 주사위'가 이런 어려움을 해결하는 데 효과적으로 쓰일 수 있을 것으로 기대한다.

2. 경주 안압지 출토 '14면 주사위'

경주 안압지는 통일신라시대인 7-9세기에 전성기를 누렸으며 수 많은 출토품을 산출하였다. 그 중의 하나인 목제 주사위는 8개의 삼각면과 6개의 사각면으로 구성되어 있는데 현재 경주 국립박물관에 소장되어 있다. 이 '14면 주사위'의 기본적 형태는 <그림 1>과 같다. 주사위의 14면 각각에는 해당하는 벌칙을 한자어로 4-5자가 다음과 같이 쓰여 있어(국립중앙박물관, 1980, pp.144-145), 술자리에서의 놀이에 쓰였을 것으로 추측된다.

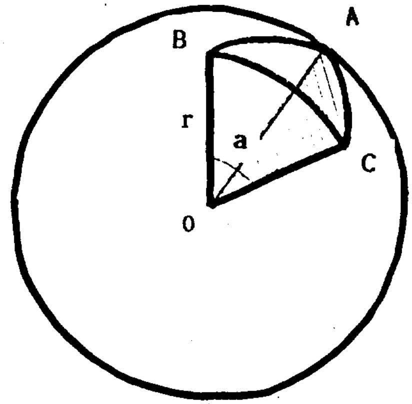
△ **曲臂則盡**
△ **弄面孔過**
△ **任意請歌**



<그림 2> '14면 주사위'의 제작법

△ 月鏡一曲
△ 自唱怪來晩
△ 空詠詩過
△ 兩盞則放
△ 醜物莫放
□ 有犯空過
□ 禁聲作舞
□ 三盞一去
□ 自唱自飮
□ 衆人打鼻
□ 飮盡大笑

어떻게 <그림 1>과 같은 '14면 주사위'를 제작할 수 있는가? 필자의 추측은 다음과 같다. 우선 한 변의 길이가 s (= $\sqrt{2}$ r)인 정육면체의 주사위를 만든다. 그리고나서 <그림 2>에서와 같이 정육면체의 각 꼭지에서 측면 모서리 길이가 s/2 인 삼각뿔을 잘라낸다. 그러면 삼각뿔의 밑면에서 변의 길이가 r (= s/$\sqrt{2}$)인 정삼각면이 8개 나오고 주사위의 원래 면으로부터 변의 길이가 r 인 6개의 정사각면이 남게된다. (안압지 출토 주사위의 형태를 정확히 사실적으로 기술하면 정육면체의 각 꼭지에서 측면 모서리 길이가 s/2 보다 약간 긴 삼각뿔을 잘라냄으로써 주사위의 사각면은 좀 작게되고 삼각면은 실제로는 꼭지점이 조금씩 잘려나간 형태가 되고 있다. 그렇지만 본 연구에서는 기하적 단순 대칭성을 위하여 <그림 2>의 제작방법에 따른 '14면 주사위'를 대상으로 하겠다.)



<그림 3> 구삼각형(spherical triangle)

이 '14면 주사위'는 6면 주사위와는 달리 모든 면이 기하적으로 동형이지 않기 때문에 '고전적' 확률로는 확률을 말하기 어렵다. 다음의 3절에서 이 주사위의 삼각면과 사각면에 대한 논리적 확률을 구하고 4절에서 빈도적 확률을 구하기로 하겠다.

3. '14면 주사위'의 논리적 확률

이 주사위를 굴리기 전에(先驗的으로) 즉 박물관 전시상자 안의 주사위를 만지지 않고도 삼각면과 사각면의 확률을 구할 수 있는가? 이에 대한 방안의 하나로 논리적 확률을 구해보기로 하겠다.

논리적 확률을 객관적으로 구하기 위해서는 어떤 전제가 필요한데, 여기서는 다음과 같은 전제를 하기로 하겠다. (1) '14면 주사위'의 굴림에 따라 주사위를 외접하고 있는 球(sphere)가 굴러간다고 가정하고, (2) 구가 정지하였을 때 低点(아래 수평면과의 접점)의 위치는 구의 표면 어디에나 동등하게 가능하다고 가정하며, (3) '14면 주사위'의 출현면은 구의 頂点(저점의 대칭점)과 가장 가까운 면으로 결정된다고 가정하자. 이 외접원의 반경이 r이라는 것은 쉽게 알아낼 수 있다.

이와 같은 전제하에서라면 삼각면과 사각면의 출현확률은 해당하는 球삼각형(spherical triangle)과 球사각형(spherical quadrangle)의 면적에 비례하게 된다. <그림 3>에서와 같은 1개 구삼각형의 면적은

$$\triangle = (A + B + C - \pi)\, r^2$$

이 된다(Spiegel, 1968, p.10). 여기서 A, B, C는 구삼각형의 세 꼭지각의 크기(단위: radian)이다. 이 경우 A = B = C 이며 구삼각형에서의 코싸인 법칙

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

에 의하여(Spiegel, 1968, p.19)

$$\begin{aligned}\cos A &= -(\cos A)^2 + (\sin A)^2 \cos a \\ &= -(\cos A)^2 + (\sin A)^2/2 \\ &= -3(\cos A)^2/2 + 1/2\end{aligned}$$

이므로 (여기서 a 는 원의 중심 O에서 각 A의 대변이 갖는 각의 크기로서 이 경우 $a = \pi/3$ 이다),

$$\cos A = 1/3, \quad 즉 \quad A = \cos^{-1}(1/3) = 1.23096...(\text{radian})$$

이다. 따라서

$$\triangle = \{ 3 \cos^{-1}(1/3) - \pi \} r^2 = 0.55129... r^2$$

이다. 한편 구사각형의 면적은 반경 r 인 구의 전체 표면적 $4 \pi r^2$ 에서 8△를 뺀 후 6으로 나누어주면 되므로

$$\begin{aligned}\square &= \{ 12 \pi - 24 \cos^{-1}(1/3) \} r^2 / 6 \\ &= \{ 2 \pi - 4 \cos^{-1}(1/3) \} r^2 = 1.35935... r^2\end{aligned}$$

이 된다. 따라서 구면적의 比로 8개의 삼각면과 6개의 사각면은

$$\begin{aligned}8\triangle : 6\square &= \{24 \cos^{-1}(1/3) - 8\pi\} : \{12 \pi - 24 \cos^{-1}(1/3)\} \\ &= 4.41028 : 8.15609\end{aligned}$$

가 된다. 즉 8개 삼각면과 6개 사각면의 확률은 각각 다음과 같다.

삼각면: $\{24 \cos^{-1}(1/3) - 8\pi\} / 4\pi = 4.41028 / 12.56637 = 0.35096$,
사각면: $\{12 \pi - 24 \cos^{-1}(1/3)\} / 4\pi = 8.15609 / 12.56637 = 0.64904$

이다. 즉 '14면 주사위'의 1회 시행에서 삼각면이 나올 '논리적' 확률은 약 35.1%이고 사각면이 나올 확률은 약 64.9%라고 할 수 있다.

4. '14면 주사위'의 빈도적 확률

'14면 주사위'를 굴리는 시행이 球를 굴리는 시행과 力學的으로 완전히 같을 수는 없다. 그러므로 주사위를 실제로 많은 회수 굴림으로써 삼각면과 사각면이 나올 빈도적 확률을 추정할 수 있을 것이다. 이를 위하여 필자는 출토된 '14면 주사위'와 비슷하도록 s = 4.25 cm (약 r = 3.0 cm)정도인 모의 '14면 주사위'를 나무로 제작하였다. 그리고 2000회 굴려본 결과 삼각면이 481번, 사각면이 1529번 나왔으므로 이 모의 주사위의 삼각면과 사각면에 대한 빈도적 확률은 각각 24.1%, 75.9%로 추정된다. 그리고 95% 신뢰한계는 각각 다음과 같다.

삼각면: $0.241 \pm 2 \sqrt{(0.241)(0.759)/2000} = 0.241 \pm 0.019 \simeq 0.24 \pm 0.02$
사각면: $0.759 \pm 2 \sqrt{(0.241)(0.759)/2000} = 0.759 \pm 0.019 \simeq 0.76 \pm 0.02$

물론 이러한 빈도적 확률은 추정가능할 뿐이고 또한 추정치는 동일한 여건에서 많은 수의 시행 후에만(즉 **經驗的**으로만) 얻어질 수 있다.

5. 맺음말

'14면 주사위'에서 삼각면이 나올 논리적 확률은 35.1%, 빈도적 확률(추정값)은 24.1%로 11% 포인트 차이를 갖고 있다. 그렇다고 논리적 확률이 틀렸다고 할 수 있을까? 그렇지 않다. 논리적 확률은 주어진 전제하에서 확률의 유도과정에 계산상의 오류가 있지 않는 한 절대로 참이다. 논리적 확률의 계산을 위해 필요한 전제는 일종의 **模型**(model)이기 때문에 그것은 가상 상황에서의 불확실성을 계량화하는 데 유용할 수 있고 이로부터 **先驗的**으로(즉, **事前的**으로) 얻어지는 논리적 확률 또한 이러한 맥락에서 의미를 갖는다. 이에 반하여 빈도적 확률은 여러 번의 시행을 통해 **經驗的**으로(즉, **事後的**으로) 추정되며 이것은 모형에 의한 가상적 상황에서가 아니라 실제의 현실적 상황에서 얻어진 것이므로 이런 맥락에서의 의미를 갖는다. 다시 말하자면 논리적 확률과 빈도적 확률이 다를 수 있으며 이 두 확률은 각기 다른 상황에서 얻어지는 것이다. ('14면 주사위'에서 논리적 확률을 빈도적 확률과 더 가깝게 하기 위하여 3절에서 필자가 세운 전제를 어떻게 바꿔야 하여야 하는지에 대하여는 추후의 연구로 남는다.)

추 기 (追 記)

확률론 또는 통계학 교육시 본 소고가 확률의 개념에 대한 흥미로운 강의자료로 활용되기를 기대한다. 아울러 좀 더 정확한 논리적 확률계산을 위해서는 어떠한 가정이 더 타당한지 학생들과 논의해 볼 수 있을 것이다. (한 심사위원이 지적한 대로) 우리의 전통적인 윷놀이에서도 윷의 둥근 면이 갖는 확률과 평평한 면이 갖는 확률의 계산시 14면 주사위에서와 같은 문제가 생기는데 이를 다른 한 논의의 출발점으로 삼을 수 있을 것이다. 본 연구의 완료후 저자는 우연히 중앙국립박물관에서 모의 14면 주사위를 제작하여 판매하고 있음을 알게 되었다.

참 고 문 헌

[1] 이 초식(1976), "귀납논리학의 학적 기반에 관한 연구 - 확률개념의 의미분석을 중심으로 -" **서울교육대학 논문집**, 제 9권, pp.1-14.

[2] 국립중앙박물관(1980), **안압지**. 서울: 국립중앙박물관.

[3] Barnett, V.(1981), *Comparative Statistical Inference.* Second Edition, Wiley, New York.

[4] Carnap, R.(1966), *An Introduction to the Philosophy of Science.* [카르납**著** · 윤용택**譯** (1993) **과학철학입문**. 서광사]

[5] Fine, T.L.(1973), *Theories of Probability: An Examination of Foundations.* Academic Press, New York.

[6] Spiegel, M.R.(1968), *Mathematical Handbook of Formulas and Tables.* Schaum's Outline Series, McGraw Hill, New York.

A DICE WITH 14 FACES AND ITS PROBABILITY ASSESSMENT

Myung-Hoe Huh [3]

Abstract

Logical and frequency probabilities are computed with discussion on their conceptual difference for the case of '14-faces dice' which was excavated in a Unified Silla period pond *Anap-chi* located at Kyung-ju City, Korea. This wooden dice has eight triangular and six square faces.

3) Dept. of Statistics, Korea Univeristy. Anamdong 5-1, Sungbukku, Seoul, Korea. 136-701