

시계열 모형의 적합도 검정에 관한 시뮬레이션 연구¹⁾

이 성 덕, 차 경 엽²⁾

요약

Box-Jenkins 시계열 분석에서 모형검진을 위한 통계량으로 잔차의 자기상관함수를 이용한 Box와 Pierce(1970)의 포트맨토우 검정과 Ljung과 Box(1978)의 변형된 포트맨토우 검정을 Basawa(1987)가 제안한 예측오차를 이용한 모형 검진 방법과 비교, 분석하였다. 시뮬레이션 연구를 수행하여 경험적 평균, 분산 및 유의수준을 비교하여 과대적합의 방법을 이용하여 검정력을 비교하였다.

1 서론

시계열분석에서 널리 사용되고 있는 Box-Jenkins분석에서 취약한 점으로 지적되고 있는 모형검진에 있어서 기존의 두 포트맨토우 검정 방법들과 예측오차를 이용한 적합도 검정 방법을 시뮬레이션 연구를 수행하여 비교하고자 한다. Box와 Jenkins(1976) 시계열 분석 방법은 관찰된 시계열 자료를 하나의 시계열 모집단(모형)으로부터 추출된 표본으로 간주하여 이들이 어떤 확률적 성질을 갖는가를 조사하고, 통계적 추정 및 검정을 통하여 적절한 시계열 모형을 수립하는 것이다. 관찰된 시계열 자료가 어떤 확률적 성질을 가지고 있으며, 어떤 시계열 모형이 적합한가를 찾기 위한 Box-Jenkins방법은 모형식별(model identification), 모수추정(parameter estimation), 그리고 적합성 진단(diagnostic checking)의 세 단계 과정을 거친다.

시계열분석에서의 검진방법으로는 잔차분석(residual analysis), 포트맨토우검정(Portmanteau test), 변형된 포트맨토우검정(modified Portmanteau test), 그리고 최근이론인 예측오차를 이용한 적합도검정(a goodness of fit test using prediction errors)등이 주로 사용되는데 Whittle(1952)이 귀무가설에서의 잔차제곱합과 대립가설하에서의 잔차제곱합의 비율(ψ^2)을 시계열모형의 검진을 위한 검정통계량으로 제안한 이래, Box와 Pierce(1970)는 잔차를 이용한 포트맨토우 검정(Q)을 제안하였고 Ljung과 Box(1978)는 변형된 포트맨토우검정(\tilde{Q})을 제안하였다. 그후 Basawa(1987)는 정상 및 비정상 확률 과정에 대한 예측오차의 극한 분포를 구한바 그 예측오차를 이용한 시계열 모형 검진통계량(T_n)을 제안하고 두 포트맨토우 검정 통계량들과 경험적 유의수준과 검정력을 비교하여 정상성 모형과 비정상성 모형 각각에 대하여 어느 검정 통계량이 적절한가를 제시하고자 한다. 먼저 잔차들의 표본 자기 상관 함수를 기초로 한 Box-Pierce의 포트맨토우 검정과 Ljung-Box의 변형된 포트맨토우 검정을 비교하고 Basawa의 예측오차를 이용한 적합도 검정을 자기회귀 모형에 적용, 제안한다. 시뮬레이션 연구를 수행하여 이들 세 검정통계량들의 경험적 유의수준을 계산, 비교하고 또한 검정력을 같은 시차들 각각에 대하여 구하여 가장 적절한 검정통계량을 제시한다.

1) 이 논문은 1992년도 교육부지원 한국학술진흥재단의 자유공모(지방대학육성)과제 학술연구 조성비에 의하여 연구되었음.

2) (360-763)충북 청주시 개신동 48, 충북대학교 자연과학대학 통계학과

2 모형검진을 위한 통계량

2.1 포트맨토우(Portmanteau Test)

Box와 Pierce(1970)는 다음과 같은 ARMA(p,q)모형을 대상으로 하여 모형검진을 수행하였다.

$$\phi(B)X_t = \theta(B)e_t, \quad t = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

여기서 $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$, $B^k X_t = X_{t-k}$ 이고 $\{e_t\}$ 는 독립적 동일한 정규분포 $N(0, \sigma^2)$ 에 따르는 백색잡음이며, 백색잡음들의 자기 상관 함수는 다음과 같다.

$$\gamma_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n e_t e_{t-k}}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

Box-Pierce(1970)는 만일 모형이 잘 적합되었고 모수가 알려져 있다면 시차 m까지의 백색잡음의 자기 상관 함수의 합이 표본의 크기 n이 클때 자유도 m인 χ^2 분포에 따름을 증명하였다. 즉

$$Q(r) = n \sum_{k=1}^m \gamma_k^2 \longrightarrow \chi_m^2.$$

한편 모수가 알려져 있지 않고 식별된 모형의 (p+q)개의 모수가 추정되었을때 Box와 Pierce(1970)는 γ_k 대신 $\hat{\gamma}_k$ 을 대치하여 다음과 같은 포트맨토우 검정통계량을 제안하였다.

$$Q(\hat{r}) = n \sum_{k=1}^m \hat{\gamma}_k^2. \quad (2.2)$$

그리고 표본 자기상관 함수 $\hat{\gamma}_k$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n \widehat{e}_t \widehat{e}_{t-k}}{\sum_{t=1}^n \widehat{e}_t^2}.$$

여기서 \widehat{e}_t 은 적합된 모형으로부터의 잔차이다. Box와 Pierce는 P차의 표본 자기상관함수 \hat{r} 가 표본의 크기 n과 시차 m이 클 경우에 다음과 같은 근사식이 만족됨을 보였다.

$$\hat{r} \approx (I-Q)r = Ar$$

여기서 $\hat{r}' = (\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_m)$, $r' = (r_1, \dots, r_m)$ 이고 각각의 요소가 a_{ij} 인 행렬 A는 계수(rank)가 $m-p-q$ 인 멱등행렬이다. Box와 Pierce는 $\hat{\gamma}_k$ 의 분산을 $\frac{1}{n}$ 로 점근시켜서 $Q(\hat{\gamma})$ 이 자유도 $m-p-q$ 인 χ^2 분포에 따름을 증명하였다. $Q(\hat{r})$ 의 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E(Q(\gamma)) = n \sum_{k=1}^m E(\gamma_k^2) = \frac{mn}{n+2} \left(1 - \frac{m+1}{2n}\right),$$

$$E(Q(\hat{\gamma})) = (m-1) \left(\frac{n}{n+2} - \frac{m+2}{2(n+2)}\right),$$

$$\text{Var}(Q(\gamma)) = n^2 \sum_{k=1}^m \text{Var}(\gamma_k^2) + 2n^2 \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=k+1}^m \text{Cov}(\gamma_k^2, \gamma_l^2),$$

$$Var(Q(\hat{\gamma})) = n^2 \sum_{k=2}^m Var(\gamma_k^2) + 2n^2 \sum_{k=2}^{m-1} \sum_{l=k+1}^m Cov(\gamma_k^2, \gamma_l^2) .$$

단,

$$Var(\gamma_k^2) = \frac{6(3n-5k)+3(n-k)^2}{n(n+2)(n+4)(n+6)} - \frac{(n-k)^2}{n^2(n+2)^2}, \quad k < \frac{n}{2},$$

$$Cov(\gamma_k^2, \gamma_l^2) = \frac{(n-k)(n-l)+4(n-l)+8(n-k-l)}{n(n+2)(n+4)(9n+6)} - \frac{(n-k)(n-l)}{n^2(n+2)^2}, \quad k < \frac{n}{2} .$$

Chatfield와 Prothero(1973) 그리고 Prothero와 Wallis(1976)는 통계량 $Q(\hat{\gamma})$ 를 모형검진에 사용하기 위해서는 약간의 수정이 필요함을 보였다. 즉 같은 시계열 데이터를 서로 다른 여러 모형을 적용했을 때 통계량 $Q(\hat{\gamma})$ 의 값들이 아주 작은 경우가 발생할 뿐만 아니라 그것의 평균과 분산이 χ^2 분포의 평균 및 분산과 큰 차이를 보일 때가 발생한다는 것이다. 또한 Davies, Triggs와 Newbold(1977)도 시차 m 이 n 과 연관되어 있으므로 $\hat{\gamma}_k$ 의 분산을 $1/n$ 로 하는 것은 부적절하며 따라서 $Q(\hat{\gamma})$ 의 분포가 χ_{m-p-q}^2 분포에 따르지 않는다고 주장하였다.

2.2 변형된 포트맨토우 검정(modified Portmanteau Test)

Ljung과 Box(1978)는 다음과 같은 변형된 포트맨토우 검정통계량(modified Portmanteau statistic)을 제안하였다.

$$\tilde{Q}(\hat{\gamma}) = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\gamma}_k^2}{n-k} . \tag{2.3}$$

그들은 이 통계량 $\tilde{Q}(\hat{\gamma})$ 이 n 이 클 경우 $m-p-q$ 를 자유도로 갖는 χ^2 분포에 따름을 증명하였고 모수가 알려져 있을 때의 기대값과 분산은 다음과 같다.

$$E(\tilde{Q}(\gamma)) = m ,$$

$$Var(\tilde{Q}(\gamma)) = n^2(n+2)^2 \sum_{k=1}^m \frac{Var(\gamma_k^2)}{(n-k)^2} + 2n^2(n+2)^2 \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=k+1}^m \frac{Cov(\gamma_k^2, \gamma_l^2)}{n-k} .$$

만약 모형이 식별되고 $(p+q)$ 개의 모수가 추정되었다면 변형된 포트맨토우 검정 통계량의 이론적인 평균과 분산은 다음과 같다.

$$E(\tilde{Q}(\hat{\gamma})) \geq \sum_{i=1}^m a_{ii}^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m a_{ij}^2 = tr(A^2) = (m-p-q),$$

$$Var(\tilde{Q}(\hat{\gamma})) = n^2(n+2)^2 \sum_{k=2}^m \frac{Var(\gamma_k^2)}{(n-k)^2} + 2n^2(n+2)^2 \sum_{k=2}^{m-1} \sum_{l=k+1}^m \frac{Cov(\gamma_k^2, \gamma_l^2)}{(n-k)(n-l)} .$$

단,

$$Var(\gamma_k^2) = \frac{6(3n-5k)+3(n-k)^2}{n(n+2)(n+4)(n+6)} - \frac{(n-k)^2}{n^2(n+2)^2}, \quad k < \frac{n}{2},$$

$$\text{Cov}(\gamma_k^2, \gamma_l^2) = \frac{(n-k)(n-l)+4(n-l)+8(n-k-l)}{n(n+2)(n+4)(9n+6)} - \frac{(n-k)(n-l)}{n^2(n+2)^2}, k < \frac{n}{2}.$$

여기서 포트맨토우 검정통계량과 변형된 포트맨토우 검정통계량의 점근적인 분산을 비교하면 다음과 같다.

$$\text{Var}(Q(\gamma)) \approx 2m\left(1 + \frac{m-10}{n}\right),$$

$$\text{Var}(\tilde{Q}(\gamma)) \approx 2m\left(1 + \frac{2m-5}{n}\right).$$

윗 식에서 $Q(\gamma)$ 과 $\tilde{Q}(\gamma)$ 의 분산은 점근이론에서 계산된 분산인 $2m$ 을 초과하고 있다. 그러나 $\tilde{Q}(\gamma)$ 에서 위치편의(location bias)를 제거하면 $Q(\gamma)$ 보다 χ_m^2 분포에 매우 근접함을 알 수 있다. 그리고 추정값에 의한 $\tilde{Q}(\hat{\gamma})$ 의 점근적인 기대값은 다음과 같다.

$$E(\tilde{Q}(\hat{\gamma})) \approx E(\tilde{Q}(\gamma)) - p - q = m - p - q.$$

그러므로 $\tilde{Q}(\hat{\gamma})$ 의 분포는 χ_{m-p-q}^2 분포에 따르고 있음을 알 수 있다. 그러나 Davies et. al.(1977)는 $Q(\hat{\gamma})$ 의 분산이 $2(m-p-q)$ 를 초과한다고 주장하는 반면 Ljung과 Box(1978)는 Daavies등이 주장한 분산이 정확한 값이 아니며 과대추정(overestimate)된 분산이라고 주장하며 시뮬레이션 결과로 뒷받침하였다.

2.3 예측오차를 이용한 적합도 검정(A goodness of fit test using prediction errors)

N 개의 관찰치를 가진 표본 $(X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_N)$, $N=n+m$ 을 고려한다. m 은 n 에 비하여 상대적으로 작은 값이라 하고, m 을 고정시키고 n 을 큰 값으로 하여 벡터 $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)'$ 와 벡터 $Y=(X_{n+1}, \dots, X_N)'$ 를 얻는다. 벡터 Y 를 모르는 값처럼 하여 X 를 이용하여 Y 를 예측하면 Y 의 최소 평균제곱오차 예측값과 예측오차벡터는 다음과 같다.

$$\hat{Y}_\theta(m) = E_\theta(Y | X),$$

$$U_n(\theta) = Y - \hat{Y}_\theta(m).$$

여기서 θ 는 $ARMA(p, q)$ 모형에 대해서 $(p+q)$ 개의 모수 벡터이고 $\hat{\theta}$ 를 적합된 $ARMA(p, q)$ 모형의 최소제곱추정량(정규성을 가정했을 때 최우 추정량)이라고하면 예측오차의 추정벡터는 다음과 같다.

$$U_n(\hat{\theta}) = Y - \hat{Y}_{\hat{\theta}}(m).$$

여기서 Taylor 전개를 이용하면 다음과 같은 근사식을 얻는다.

$$U_n(\hat{\theta}) \cong U_n(\theta) + B_n(\theta)(\hat{\theta} - \theta)$$

여기서 $B_n(\theta) = (-\partial \hat{Y}_\theta(m) / \partial \theta)$. Basawa(1987)는 다음과 같은 두 가정하에서 예측오차의 추정량의 점근분포를 구한바,

[가정 1]

$$\begin{pmatrix} U_n(\theta) \\ \sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \end{pmatrix} \longrightarrow N_{2m} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_1(\theta) & 0 \\ 0 & \Sigma_2(\theta) \end{pmatrix} \right).$$

[가정 2]

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_n(\theta) \rightarrow 0.$$

위의 두 가정하에서 예측오차의 추정된 벡터에 대한 점근분포는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_n(\hat{\theta}) &\cong U_n(\theta) + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} B_n(\theta)\right) \sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \\ &\rightarrow N_m(0, \Sigma_1(\theta)). \end{aligned}$$

만약 적합된 모형이 적절하다면 예측오차를 이용한 다음과 같은 검정 통계량 T_n 은 χ^2 분포에 따르게 된다. 즉,

$$\begin{aligned} T_n &= U'_n(\hat{\theta}) \Sigma_1(\hat{\theta})^{-1} U_n(\hat{\theta}) \\ &\rightarrow \chi_m^2. \end{aligned}$$

예를 들어 AR(1) 모형에 대한 분산공분산 행렬 $\Sigma_1(\theta)$ 는 다음과 같다.

$$\Sigma_1(\theta) = \left(\theta^{(j-i)} \left(\frac{\theta^{2i}-1}{\theta^2-1} \right) \right)^{1/2}, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

3. 통계량의 경험분포

AR(1) 모형 $x_t = \phi x_{t-1} + e_t$ 에 따르는 시계열 난수 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 를 1000번 발생시켜서 앞의 세 검정 통계량의 경험적 유의수준, 평균 및 분산을 비교하였다. 정상시계열 모형의 계수 ϕ 는 0.1, 0.5 및 0.9 그리고 비정상 시계열인 $\phi = 1.5$ 각각에 대하여 표본의 크기 n 을 50부터 200까지 증가시키는 한편 시차 m 은 6, 12, 18, 24로 각 조합에 대하여 χ^2 -분포의 상위 5, 10 및 25%를 초과하는 $Q(\hat{r})$, $\hat{Q}(\hat{r})$ 그리고 T_n 비율들과 각 통계량의 경험적 평균, 분산을 구하였다. (부록 표 1-3). 통계량들의 비율을 구하는 방법은 ϕ 의 추정값으로는 근사 최우추정량인 $(n-2)(n-1)^{-1} \sum_{t=2}^n x_t x_{t-1} / \sum_{t=2}^n x_t^2$ 을 이용하였고 (Box와 Jenkins, 1976, P.279) 그것으로부터 잔차

$e_1 = (1-\hat{\phi}^2) x_1, \dots, e_t = x_t - \hat{\phi} x_{t-1} \quad (t=2, \dots, n)$ 들을 얻어 표본 자기상관 함수 $\hat{\gamma}_k$ 들을 구하였고 그것으로부터 각 통계량의 유의수준, 평균 및 분산을 계산하였다. 표에서 보는 바와 같이 각 통계량의 분산은 약간씩 초과하고 있음을 알 수 있다. 기존의 포트맨토우 검정통계량의 평

균은 χ^2 분포의 평균보다 작음을 알 수 있고 경험적인 분산도 χ^2 분포의 분산을 초과하고 있지 않음을 알 수 있다. 특히 시차 (m)가 클 경우, 경험적인 평균은 χ^2 분포의 평균보다 무척 작음을 알 수 있다. 유의확률을 구한 결과 χ^2 분포에 근접하지 않음을 알 수 있다. 특히 유의수준 5%인 경우 χ^2 분포의 기각역보다 작음을 알 수 있어서 모형이 타당하지 않더라도 채택할 확률이 높음을 알 수 있다. 변형된 포트맨토우 검정 통계량의 경험적인 평균은 χ^2 분포의 평균에 근접함을 알 수 있으나, 비정상적인 모형일 경우에는 평균이 작음을 알 수 있다. 그리고 경험적인 분산은 χ^2 분포 분산을 초과하고 있음을 알 수 있다. 유의확률을 구해 본 결과 χ^2 분포에 근접함을 알 수 있다.

특히 유의수준 5%인 정상적인 시계열 모형에서 ϕ 값이 증가할수록 χ^2 분포의 기각역보다 작음을 알 수 있고 비정상적인 시계열 자료에서는 더욱더 작아짐을 알 수 있다. 예측오차를 이용한 검정통계량의 경험적인 평균은 χ^2 분포의 평균에 매우 근접함을 알 수 있고 경험적인 분산은 χ^2 분포 분산을 조금 초과하고 있음을 알 수 있고 비정상적 시계열 자료에서 시차가 큰 경우에는 분산이 초과되고 있음을 알 수 있다. 유의확률을 구한결과 χ^2 분포에 근접함을 알 수 있고 유의수준 5%인 경우 χ^2 분포의 기각역보다 조금 큼을 알 수 있다. 그러나 표본크기가 클 경우 거의 일치함을 알 수 있다. 다음의 그래프는 시계열 난수를 300번 발생시켜 $AR(1)$ 모형에 대하여 세 통계량들이 점근적으로 χ^2 분포에 잘 근접하는지를 알아보기 위한 그림으로 $\hat{Q}(\hat{r})$ 와 Tn 이 χ^2 분포에 잘 따름을 알 수 있다.

4. 검정력 비교

$AR(2)$ 모형의 난수를 100개 발생시켜 $AR(1)$ 모형으로 적합시키는 “과대적합방법”을 이용하여 경험적인 검정력을 비교한다.

$$\text{실제모형} \quad : \quad (1-0.7B)(1-G_2B)X_t = e_t$$

$$\text{적합시킨 모형} \quad : \quad X_t = 0.7X_{t-1} + e_t$$

$$\text{유의수준} \quad : \quad 5\%$$

<표 4-1> 통계량들의 검정력 비교

TEST	m	$G_2 = 0$	$G_2 = 0.1$	$G_2 = 0.3$	$G_2 = 0.5$	$G_2 = 0.7$	$G_2 = 0.9$
$Q(\hat{\gamma})$	6	0.02	0.07	0.37	0.747	0.94	1
	12	0.02	0.05	0.287	0.684	0.968	1
	18	0.05	0.04	0.309	0.705	0.938	1
$\tilde{Q}(\hat{\gamma})$	6	0.05	0.083	0.35	0.771	0.95	1
	12	0.08	0.083	0.315	0.677	0.95	1
	18	0.05	0.074	0.347	0.604	0.86	0.988
$T_n(\hat{\theta})$	6	0.09	0.17	0.469	0.84	0.989	1
	12	0.11	0.19	0.469	0.87	1	1
	18	0.08	0.19	0.471	0.85	1	1

세 검정통계량의 검정력을 비교한 결과, 실제 모형과 적합시킨 모형이 일치하는 경우 ($G_2=0$) 포트맨토우 검정통계량이 기각시킬 확률이 가장 낮음을 알 수 있고 예측오차를 이용한 검정통계량이 가장 높음을 알 수 있다. G_2 값을 증가시키며 과대적합을 시킨결과 예측오차를 이용한 검정통계량의 검정력이 가장 높음을 알 수 있고 다음으로 변형된 포트맨토우 검정통계량이 높음을 알 수 있다. 이것은 앞에서 언급한 유의수준 5%에서의 유의 확률을 구한 결과와 일치함을 알 수 있다.

결국 세 통계량을 비교한 결과 포트맨토우 검정통계량은 χ^2 분포에 근사하고 있지 않음을 알 수 있으나 변형된 포트맨토우 검정통계량과 예측오차를 이용한 검정통계량은 χ^2 분포에 근접함을 알 수 있고 또한 정상적인 시계열 모형으로 식별될 때에는 변형된 포트맨토우 검정 방법과 예측오차를 이용한 검정방법에 별 차이가 없으나 비정상 시계열인 경우, 또는 비정상시계열에 가까운 경우 (예를 들어 $AR(1)$ 모형의 $|\theta|$ 이 1에 가까울 때)는 표에서 보여지는 바와 같이 예측오차를 이용한 검정이 더 좋은 모형 검진 방법임을 알 수 있다.

참고문헌

[1] Anderson, T.W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*, Wiley, New York

[2] Basawa, I.V. (1987). Asymptotic distributions of prediction errors and related tests of fit for nonstationary, *The Annals of Statistics*, 15, 46~58.

[3] Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. (1976). *Time Series Analysis: forecasting and control*, 2nd ed, Holden-Day, San Francisco.

[4] Box, G.E.P. and Pierce, D.A. (1970). Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 65, 1509~1526.

[5] Chatfield, C. and Prothero, D.L. (1973). Box-Jenkins seasonal forecasting: Problems in a case study (with discussion). *J.R. Statist. Soc. A*, 136, 295~336.

[6] Davies, N., Triggs, C.M. and Newbold, P. (1977). Significance levels of the Box-Pierce

- portmanteau statistic in finite sample, *Biometrika*, 64, 517~522.
- [7] Ljung,G.M. and Box,G.E.P.(1978). On a measure of lack of fit in time series model, *Biometrika*, 65, 2, 297~303.
- [8] Prothero,D.L. and Wallis, K.F.(1976). Modelling macroeconomic time series(with discussion). *J.R. Statist. Sco. A*, 39, 408~500.
- [9] Whittle,P.(1952). Tests of fit in time series, *Biometrika*, 39, 309~318.

[표 1] n=50일때의 경험 평균, 분산 및 유의수준

TEST	ϕ	n = 50 m = 6					n = 50 m=12				
		Mean	Var.	5%	10%	25%	Mean	Var.	5%	10%	25%
$Q(\hat{\gamma})$	0.5	4.539	8.811	2.3	7.3	21.1	8.88	12.27	2.3	6.1	17.2
	0.1	4.477	10.26	3.1	7.1	19.1	8.746	18.77	2.2	3.6	11.2
	0.9	4.32	6.69	2.3	5.1	10.9	8.84	15.34	2.3	4.1	12.3
	1.5	4.59	10.75	2.1	5.2	11.3	8.94	22.37	2.4	5.3	16.5
$\tilde{Q}(\hat{\gamma})$	0.5	5.116	11.12	4.8	10.9	28.2	10.61	22.55	5.5	9.5	21.9
	0.1	5.06	13.09	5.6	10.8	24.4	10.65	27.09	4.9	8.1	21.8
	0.9	4.869	8.45	4.1	7.8	21.8	10.7	23.27	5.5	9.6	23.1
	1.5	5.19	13.76	3.2	6.2	12.3	9.94	24.46	4.1	9.4	18.55
$T_n(\hat{\theta})$	0.5	6.34	13.85	5.4	10.8	27.3	12.88	25.67	6.1	12.3	27.8
	0.1	6.05	12.46	4.7	10.2	25.4	12.36	25.17	5.2	10.4	25.8
	0.9	6.72	12.89	6.1	10.9	26.7	12.64	25.51	6.2	11.6	27.8
	1.5	6.51	12.86	5.6	10.5	26.5	13.02	25.44	6.4	13.2	26.9

[표 2] n=100일때의 경험 평균, 분산 및 유의수준

TEST	ϕ	n = 100 m = 6					n = 100 m = 12					n = 100 m = 18				
		Mean	Var	5%	10%	25%	Mean	Var	5%	10%	25%	Mean	Var	5%	10%	25%
$Q(\hat{\gamma})$	0.5	4.699	8.44	3.8	6.6	22.9	8.391	19.32	2.7	6.3	17.1	14.767	25.85	3.8	7.6	21.4
	0.1	4.725	9.138	4.1	7.7	23.1	8.97	21.43	2.4	6.1	16.9	14.2	27.77	3.4	7.3	19.7
	0.9	4.797	9.44	4.0	8.9	24.6	8.937	20.74	3.1	7.5	17.7	15.116	38.724	3.7	7.1	15.1
	1.5	4.648	6.977	2.3	5.3	20.3	10.123	20.66	3.5	7.4	17.9	14.71	30.173	1.8	4.3	13.3
$\tilde{Q}(\hat{\gamma})$	0.5	4.989	9.519	4.6	8.5	25.9	10.349	23.165	4.7	8.9	23.4	16.726	33.44	4.2	8.8	23.1
	0.1	5.01	10.312	4.9	9.4	25.4	10.27	22.441	4.1	9.3	21.4	16.105	36.28	4.3	8.7	23.7
	0.9	5.102	10.73	5.6	12.3	28.4	10.71	26.34	4.6	8.7	21.6	17.122	49.66	7.6	11.3	23.4
	1.5	4.932	7.84	3.5	8.5	22.7	10.08	22.1	4.3	7.2	20.1	15.62	35.78	3.5	7.2	19.7
$T_n(\hat{\theta})$	0.5	6.14	12.63	4.9	9.8	25.9	13.2	25.471	5.3	11.4	26.8	19.12	39.41	5.4	11.2	26.1
	0.1	6.11	12.39	5.3	12.2	26.1	12.04	25.014	5.1	10.3	25.7	18.31	36.192	5.1	10.4	25.2
	0.9	6.32	12.61	5.5	10.8	25.7	12.59	24.771	5.3	10.9	26.1	18.741	37.042	5.2	10.4	25.7
	1.5	6.47	14.791	5.4	12.3	26.1	13.21	25.114	6.4	12.3	26.7	18.91	36.913	5.1	10.7	25.4

[표 3-1] n=200일때의 경험 평균, 분산 및 유의수준

TEST	ϕ	n = 200 m = 6					n = 200 m=12				
		Mean	Var.	5%	10%	25%	Mean	Var.	5%	10%	25%
$Q(\hat{\gamma})$	0.5	4.733	8.7	3.7	8.7	21.6	9.317	21.36	3.2	3.4	17.1
	0.1	4.907	8.816	3.1	9.3	22.1	9.341	23.115	3.1	8.6	17.3
	0.9	4.99	10.08	4.9	10.2	25.3	8.979	21.413	2.9	7.5	16.8
	1.5	4.76	9.48	3.1	6.7	20.2	10.09	20.7	4.1	8.4	20.1
$\tilde{Q}(\hat{\gamma})$	0.5	4.878	9.25	4.9	9.2	23.3	10.81	21.001	3.6	8.2	23.4
	0.1	5.057	9.367	4.5	9.9	24.8	10.875	21.894	4.1	9.1	22.2
	0.9	5.149	10.716	5.4	11.6	26.5	11.215	23.632	4.1	10.4	27.9
	1.5	4.96	11.407	3.9	8.2	21.4	9.751	21.2	3.7	8.2	17.6
$T_n(\hat{\theta})$	0.5	6.27	14.62	4.6	13.1	27.3	14.35	29.32	8.1	13.5	29.8
	0.1	6.14	12.31	5.2	10.9	25.6	12.19	24.81	4.9	10.9	25.8
	0.9	6.27	14.62	6.7	12.7	26.8	12.37	24.4	5.7	10.7	25.9
	1.5	6.73	14.271	5.2	12.1	26.8	12.56	25.07	5.1	10.6	26.1

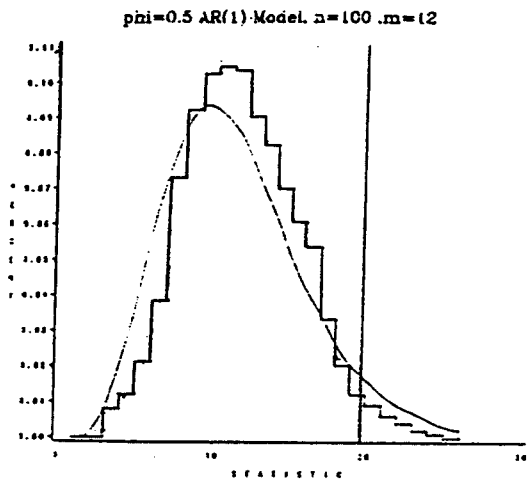
[표 3-2] n=200일때의 경험 평균, 분산 및 유의수준

TEST	ϕ	n = 200 m = 18					n = 200 m=24				
		Mean	Var.	5%	10%	25%	Mean	Var.	5%	10%	25%
$Q(\hat{\gamma})$	0.5	15.32	30.125	3.7	8.6	18.2	21.08	49.26	4.2	6.2	18.4
	0.1	14.924	27.135	3.3	7.9	16.7	20.84	43.29	3.1	6.3	16.8
	0.9	16.03	36.82	4.1	8.6	21.5	20.97	47.94	3.8	6.9	16.9
	1.5	15.25	27.23	3.7	8.3	17.2	21.65	45.92	2.7	6.2	19.7
$\tilde{Q}(\hat{\gamma})$	0.5	16.431	36.26	4.1	8.8	23.8	22.77	57.33	5.5	11.0	25.8
	0.1	16.041	36.791	4.1	8.6	20.6	22.515	50.41	4.1	10.6	23.7
	0.9	17.04	41.53	6.6	11.7	26.36	22.647	56.06	5.4	10.7	23.1
	1.5	15.265	26.99	3.4	7.9	18.2	21.278	47.824	2.9	6.1	19.3
$T_n(\hat{\theta})$	0.5	19.36	39.24	5.7	11.8	11.8	26.47	58.22	6.1	12.6	28.3
	0.1	18.11	36.44	5.1	10.3	10.3	24.19	49.31	5.2	10.1	25.8
	0.9	18.29	35.52	5.7	10.8	10.8	24.42	46.09	5.3	10.7	25.8
	1.5	19.08	37.79	5.3	11.9	11.9	25.49	52.884	5.4	12.2	27.2

시계열 모형의 적합도 검정에 관한 시뮬레이션 연구

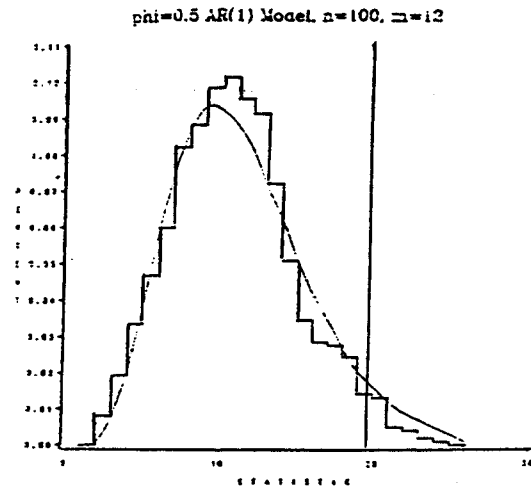
이성덕, 차경엽

아래 그림은 한국통계학회 논문집 제1권 1호에 게재된 논문 "시계열 모형의 적합도 검정에 관한 시뮬레이션 연구"에 추가로 삽입될 그림이다.



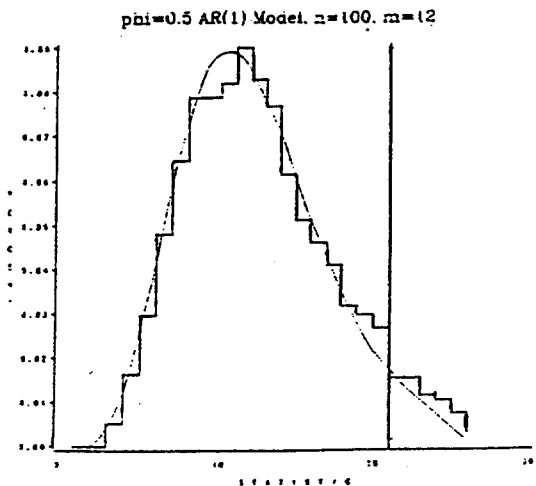
HISTOGRAM Portmanteau Statistic Distribution
SOLID LINE Chi-square Distribution (df=11)

[그림 3-1] 포트먼로우 검정통계량의 분포도



HISTOGRAM Modified Portmanteau Statistic Distribution
SOLID LINE Modified Chi-square Distribution (df=11)

[그림 3-2] 변형된 포트먼로우 검정통계량의 분포도



HISTOGRAM Dist. of Statistic using prediction error
SOLID LINE Chi-square Distribution (df=11)

[그림 3-3] 예측오차를 이용한 검정통계량의 분포도