

불확정 구조계 고유치에 관한 민감도 해석

Design Sensitivity Analysis of the Eigenproblems for Random Structural System

임	오	강*
Lim,	O	Kaung
이	병	우**
Lee,	Byung	Woo

.....

요 약

실제 시스템에는 재료의 물성과 기하학적 매개변수, 외부 하중등에 불확정 요인들을 내포하고 있다. 그러므로 제작시나 수학적으로 모델링할 때 이 요인들을 설계에 반영해 주어야 한다. 기울기에 근거를 둔 최적설계 수행시에 변동량을 고려하여 제한식으로 설정하고, 설계 민감도를 구할 수 있는 방법을 제시하였다.

Abstract

Derivatives of eigenvalues and eigenvectors for statistical properties is presented. Dynamic response of random system including uncertainties for the design variable is calculated with the first order perturbation method to original governing equation. In optimal design methods, there is fundamental requirement for design gradients. A method for calculating the sensitivity coefficients is developed using the governing equation and first order perturbed equation.

.....

1. 서 론

고유치 문제는 공학설계에서 많이 사용되고 있다. 고유치는 시스템의 특성방정식에 대한 해로서 진동해석과 좌굴해석에서 각각 고유진동수와 좌굴하중으로 물리적 의미를 가지고 있다. 고유벡터는 변형된 형태를 나타낸다.

실제 시스템에는 재료의 물성과 기하학적 매개변수, 외부 하중등에 불확정 요인들을 내포하고

있다. 그러므로 제작시나 수학적으로 모델링할 때 이 요인들을 설계에 반영해 주어야 한다.

불확정 매개변수를 가지는 시스템에 대한 고유치와 고유벡터의 해석에 많은 연구가 수행되어 왔다. Collins와 Thomson[1], Meirovitch[2], 中桐滋 및 久田俊明[3]들은 섭동법(Perturbation method)을 사용하여 해석하였다.

최적설계 알고리즘 중에는 이동방향을 결정하

* 정회원, 부산대학교 기계공학과, 기계기술연구소 부교수
 ** 정회원, 부산대학교 기계공학과 박사과정, 기계기술연구소 연구원

이 논문에 대한 토론을 1994년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1995년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

는 문제에서 고유치와 고유벡터의 설계민감도를 필요로 한다. 고유치와 고유벡터의 설계 민감도는 동적응답을 유지하거나 구조 개선을 위한 정보를 제공한다. 기계·구조물 시스템에서 고유진동수와 좌굴하중은 설계변수와 동적 응답 변수에 연관되어 있다. 또한 개선된 설계점에서 빠른 재해석을 위해서도 체계화된 민감도 절차가 필요하다.

고유치와 고유벡터 민감도 해석에 대한 연구는 Fox와 Kapoor[4]에 의해 최초로 제안되었다. Rudisill과 Chu[5]는 전체 자유도에 대한 고유치와 고유벡터중 최고차에 해당하는 고유치의 민감도를 계산하는 방법을 제안하였다. 구조 최적설계에서는 상기 제시된 방법을 사용하여 많은 연구[6,7,8]가 수행된 바 있다. 그러나 불확정 요인을 갖는 시스템에 대한 고유치 및 고유벡터의 민감도 해석과 관련해서는 기존의 연구가 수행된 바 없었다.

본 연구에서는 불확정 매개변수를 갖는 시스템의 고유치와 고유벡터를 일차 섭동법으로서 구하고, 섭동해가 고려된 민감도 해석법을 개발하였다. 동적평형 방정식을 확률변수에 대해서 섭동법을 적용해서 고유치와 고유벡터에 대한 변동을 결정 방정식을 구한 후 직접 미분법으로 민감도 계산식을 유도하였다. 수치예제를 통하여 계산결과를 언급하였으며 결과를 검증하기 위해서 확률 유한차분법으로 해를 비교·검토했다.

2. 고유치 및 고유벡터의 일차 변동을 평가

2.1 변동을 결정방정식

고유치를 λ , 고유벡터를 ϕ 라 할 때, 선형 고유치 문제의 일반형은 다음과 같다.

$$(B - \lambda A)\phi = 0 \quad (1)$$

식(1)에서 보통 B는 강성행렬이며, A는 진동해석일 경우에는 질량행렬이며, 좌굴해석시에는 기하강성행렬(geometric stiffness matrix)이다. B와 A행렬은 실수의 대칭행렬이다. 구조문제에서 mode shape인 고유벡터는 정규화하여 사용하므로

$$\phi^T A \phi = 1 \quad (2)$$

확률 구조계에서 B 또는 A행렬이 확률변수 α 를 포함한 경우 다음 일차식으로서 전개될 수 있다고 가정[3]한다. α 는 미소의 값으로서 기대치가 영인 확률변수이다.

$$B = B^0 + \sum_k B_k^I \alpha_k + \dots \quad (3)$$

$$A = A^0 + \sum_k A_k^I \alpha_k + \dots \quad (4)$$

식(3)과 식(4)에서 하첨자 k는 구조물의 총 변수이다. 또한 상첨자 영은 구조계수의 기대치를 의미하며, 상첨자 I는 일차 변동된 값이다. 식(3)과 식(4)중 미지의 λ 와 ϕ 에 대해서 다음 일차 형태로 가정을 한다.

$$\lambda = \lambda^0 + \sum_k \lambda_k^I \alpha_k + \dots \quad (5)$$

$$\phi = \phi^0 + \sum_k \phi_k^I \alpha_k + \dots \quad (6)$$

식(3)에서 식(6)까지를 지배방정식(1)에 대입하고 섭동법을 적용하면 0차항, α_k 항에 대해서 각 계수로 부터 다음의 변동을 결정 방정식을 얻는다.

$$(B^0 - \lambda^0 A^0) \phi^0 = 0 \quad (7.1)$$

$$(B^0 - \lambda^0 A^0) \phi_k^I = - (B_k^I - \lambda_k^I A^0 - \lambda^0 A_k^I) \phi^0 : \forall k \quad (7.2)$$

식(7)에서 $\alpha=0$ 인 경우는 식(7.1)로 기대치에 대한 고유치 λ^0 와 고유벡터 ϕ^0 를 구할 수 있다. 식(7.2)에서 $\forall k$ 는 임의의 변수에 대하여 성립함을 의미한다.

2.2 고유치 및 고유벡터의 일차 변동을 평가

식(7.2)에 ϕ^{0T} 를 前乘한 후 B^0, A^0 가 대칭행렬이므로 전치하면 다음과 같다.

$$\phi_k^{I T} (B^0 - \lambda^0 A^0) \phi^0 = - \phi^{0 T} (B_k^I - \lambda_k^I A^0 - \lambda^0 A_k^I) \phi^0 \quad (8)$$

식(8)에서 좌변은 0이 되므로 우변을 정리하면 제 i차 고유치에 대한 변동을 얻는다.

$$\lambda_k^{li} = \frac{\phi^{0iT} (B_k^l - \lambda^{0i} A_k^l) \phi^{0i}}{\phi^{0iT} A^0 \phi^{0i}} \quad (9)$$

$(B^0 - \lambda^0 A^0)$ 가 특이가 되기에 식(7.2)에서 역행렬을 구하여 ϕ_k^{li} 를 구하는 것이 불가능하다. 그래서 변동성분을 포함한 제i차 고유벡터와 A행렬을 사용하여 정규화하면 ϕ_k^{li} 를 구할 수 있다.

$$\phi^{iT} A \phi = a^i \quad (10)$$

식(10)에 식(4)와 식(6)을 대입해서 섭동법을 적용하면 변동을 결정방정식을 얻을 수 있다. 식(10)에서 a^i 는 상수이다.

$$\phi^{0iT} A^0 \phi^{0i} = a^i \quad (11)$$

$$2\phi^{0iT} A^0 \phi_k^{li} + \phi^{0iT} A_k^l \phi^{0i} = 0 \quad (12)$$

식(12)와 제i차 고유치에 관한 식(7.2)를 조합하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} B^0 - \lambda^{0i} A^0 \\ 2\phi^{0iT} A^0 \end{bmatrix} \phi_k^{li} = - \begin{bmatrix} B_k^l - \lambda_k^{li} A^0 - \lambda^{0i} A_k^l \\ \phi^{0iT} A_k^l \end{bmatrix} \phi^{0i} \quad (13)$$

$(n+1) \times n \quad n \times 1 \quad (n+1) \times n \quad n \times 1$

식(13)에서 n은 구조물의 자유도를 나타낸다. 식(13)의 좌변의 $(n+1) \times n$ 행렬을 C라하고, 우변의 $(n+1) \times n$ 행렬을 D라 놓으면 고유벡터의 1차 변동율은 다음식에 의하여 구해질 수 있다.

$$\phi_k^{li} = (C^T C)^{-1} (-C^T D \phi^{0i}) \quad (14)$$

3. 민감도 해석

3.1 원래 시스템의 고유치와 고유벡터에 대한 민감도 해석

확률변수를 갖는 구조계의 일차 고유치의 설계민감도를 구하기 위해서는 구조계의 기대치에 대한 고유벡터의 민감도를 요구한다. 식(7.1)과 식(11)을 설계변수 벡터 b에 대해서 미분을 하면 기대치에 대한 고유치와 고유벡터의 설계민감도를

구할 수 있다.

$$(B^0 - \lambda^0 A^0) \frac{d\phi^0}{db} - \frac{d\lambda^0}{db} A^0 \phi^0 = - \left(\frac{dB^0}{db} - \lambda^0 \frac{dA^0}{db} \right) \phi^0 \quad (15)$$

$$\phi^{0iT} A^0 \frac{d\phi^0}{db} = - \frac{1}{2} \phi^{0iT} \frac{dA^0}{db} \phi^0 \quad (16)$$

식(15)와 식(16)을 조합하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} (B^0 - \lambda^{0i} A^0) - A^0 \phi^0 \\ -\phi^{0iT} A^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\phi^0}{db} \\ \frac{d\lambda^0}{db} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \left(\frac{dB^0}{db} - \lambda^0 \frac{dA^0}{db} \right) \phi^0 \\ \frac{1}{2} \phi^{0iT} \frac{dA^0}{db} \phi^0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$(n+1) \times (n+1) \quad (n+1) \times 1 \quad (n+1) \times (n+1)$

식(17)에서 우변은 벡터로서 하중의 미분계수 (Force Derivative)이다.

3.2 일차 변동된 고유치와 고유벡터의 설계민감도

일차 변동된 고유치에 대한 식(7.2)를 설계변수에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (B^0 - \lambda^0 A^0) \frac{d\phi_k^{li}}{db} + \left(\frac{dB^0}{db} - \lambda^0 \frac{dA^0}{db} - \frac{d\lambda^0}{db} A^0 \right) \phi_k^{li} \\ = - (B_k^l - \lambda_k^{li} A^0 - \lambda^{0i} A_k^l) \frac{d\phi^0}{db} \\ - \left(\frac{dB_k^l}{db} - \lambda_k^{li} \frac{dA^0}{db} - \frac{d\lambda_k^{li}}{db} A^0 \right) \phi^0 \\ - \lambda^{0i} \frac{dA_k^l}{db} - \frac{d\lambda^0}{db} A_k^l \phi^0 \end{aligned} \quad (18)$$

식(18)에서 밑줄친 부분이 일차 변동된 고유치와 고유벡터의 설계민감도이다.

일차 변동된 고유벡터에 대한 식(12)를 설계변수에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2\phi^{0iT} A^0 \frac{d\phi_k^{li}}{db} + 2\phi_k^{liT} A^0 \frac{d\phi^{0i}}{db} \\ + 2\phi^{0iT} \frac{dA^0}{db} \phi_k^{li} + \end{aligned}$$

$$2\phi^{0iT} A_k^{li} \frac{d\phi^{0i}}{db} + \phi_k^{0iT} \frac{dA_k^{li}}{db} \phi^{0i} = 0 \quad (19)$$

식(18)과 식(19)를 조립하면 최종적으로 일차 변동된 고유치와 고유벡터에 대한 설계민감도를 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} (B^0 - \lambda^0 A^0) - A^0 \phi^0 & \frac{d\phi_k^{li}}{db} \\ -\phi^{0iT} A^0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_k^{li}}{db} \\ \frac{d\phi_k^{li}}{db} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \quad (20)$$

(n+1)x(n+1) (n+1)x1 (n+1)x1

식(20)에서 E와 F는 하중의 미분계수 벡터로서 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{E\} = & -\left(\frac{dB^0}{db} - \lambda^0 \frac{dA^0}{db} - \frac{d\lambda^0}{db} A^0\right) \phi_k^{li} \\ & - \left(\frac{dB_k^l}{db} - \lambda_k^l \frac{dA^0}{db} - \frac{d\lambda^0}{db} A_k^l - \lambda^0 \frac{dA_k^l}{db}\right) \phi^{0i} \\ & - (B_k^l - \lambda_k^l A^0 - \lambda^0 A_k^l) \frac{d\phi^{0i}}{db} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \{F\} = & \phi_k^{liT} A^0 \frac{d\phi^{0i}}{db} + \phi^{0iT} \frac{dA^0}{db} \phi_k^{li} + \phi^{0iT} A_k^l \frac{d\phi^{0i}}{db} \\ & + \frac{1}{2} \phi^{0iT} \frac{dA_k^l}{db} \phi^{0i} \end{aligned} \quad (22)$$

식(20)에서 일차 변동된 고유치나 고유벡터의 설계 민감도는 좌변행렬의 역행렬을 구해서 평가하거나 가우스소거법으로서 해를 구할 수 있다.

일차 변동된 고유치와 고유벡터의 설계민감도가 계산되었으므로 확률변수를 갖는 시스템의 전체 민감도는 기대치에 대한 민감도에 일차 변동된 설계민감도 값을 산술적으로 더해주면 구해진다.

고유치에 대한 전체 설계 민감도는 식(5)를 설계변수에 대해서 미분하면 :

$$\frac{d\lambda}{db} = \frac{d\lambda^0}{db} + \sum_k \frac{d\lambda_k^l}{db} \alpha_k \quad (23)$$

식(23)에서 우변의 첫째항은 식(17)로부터 구해지며, 두번째항은 식(20)으로부터 구해진다.

고유벡터에 대한 전체 설계민감도는 식(6)을 설

계변수에 대해서 미분하면 구해진다.

$$\frac{d\phi}{db} = \frac{d\phi^0}{db} + \sum_k \frac{d\phi_k^l}{db} \alpha_k \quad (24)$$

4. 수치 예제

본 연구에서 개발된 방법의 타당성을 간단한 예제를 통하여 제시하였다. 고유치와 고유벡터의 기대치를 구하고 이론해와 비교하였다. 일차 변동된 구조계의 고유치 및 고유벡터의 변동값은 섭동법으로 구하였다. 기대치 및 일차 변동된 설계민감도의 검증을 위하여 확률 유한차분법과 해를 비교하였다.

스프링·집중질량계로 이루어진 예제[3]가 Fig.1에 나타나 있다. Fig.1에서 감쇠는 없으며 2자유도계로 구성되어 있다. 랜덤변수를 스프링 상수 k_1 과 k_2 로 선정하고, 스프링 상수의 변동율을 α 라 하자. α 는 기대치가 0인 미소 확률변수이다. 설계변수는 k_1 과 k_2 의 기대값인 k_1^0, k_2^0 이다.

$$k_k = k_k^0 (1 + \alpha_k) : k=1, 2 \quad (25)$$

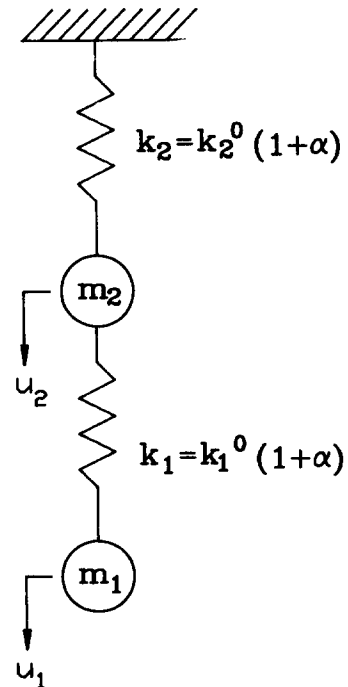


Fig. 1 스프링 상수 k_1, k_2 가 불확정인 2자유도 진동계

문제에 대한 계의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 - k_1 & \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

식(26)의 변위벡터를 주기운동으로 가정을 하면

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \phi e^{i\omega t} \quad (27)$$

식(27)을 식(26)에 대입하고 $\omega^2 = \lambda$ 로 치환하면 다음의 고유치 문제를 얻는다.

$$(K - \lambda M) = 0 \quad (28)$$

식(28)에서 경계조건이 처리된 강성행렬 K와 질량행렬 M은 다음과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 - k_1 & \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1^0 - k_1^0 & \\ -k_1^0 & k_1^0 + k_2^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1^0 - k_1^0 & \\ -k_1^0 & k_1^0 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2^0 \end{bmatrix} \alpha_2$$

$$\equiv K^0 + \sum_{k=1}^2 K_k^1 \alpha_k \quad (29)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

식(29)에서 질량행렬은 확정적이다.

미지수인 λ 와 ϕ 를 각각 일차 섭동해로 가정한 식(5)와 식(6) 및 강성행렬과 질량행렬에 대한 식(29)를 식(28)에 대입하면 기대치에 대한 지배방정식과 일차 변동을 결정식이 얻어진다.

$$(K^0 - \lambda^0 M) \phi^0 = 0 \quad (30.1)$$

$$(K^0 - \lambda^0 M) \phi_k^1 = -(K_k^1 - \lambda_k^1 M) \phi^0 \quad (30.2)$$

4.1 고유치 및 고유벡터의 기대치 및 변동을 평가

식(29)에서 수치해석상 스프링 상수값과 질량값을 1로서 두고, 식(30.1)으로 고유치와 고유벡

Table 1 Original system eigenvalues and eigenvectors

	First mode	Second mode
Eigenvalue	0.3820(λ^{01})	2.6180(λ^{02})
Eigenvectors	0.8507(ϕ^{01})	-0.5257(ϕ^{02})
	0.5257	-8507

터의 기대치를 구하면 Table 1과 같다.

최적설계에서 취급되는 진동문제나 좌굴문제는 고유치의 최저치만 제한조건식으로 사용되므로 일차모드에 대해서 일차 섭동된 고유치와 고유벡터 및 설계민감도 값을 구하였다.

스프링 상수의 변동율을 똑같이 0.1로 주고 식(9)에 의하여 일차 섭동된 고유치를 구하였다. 또한 고유벡터의 일차 변동율은 식(13)에 의해 구하였다. 그에 대한 결과가 Table 2에 나타나 있다.

Table 2 First order perturbed eigenvalues and eigenvectors for the first mode

	Random parameter 1	Random parameter 2
Perturbed eigenvalue	0.0106(λ_1^1)	0.0276(λ_2^1)
Perturbed eigenvectors	-0.0105(ϕ_1^1)	0.0105(ϕ_2^1)
	0.0170	-0.0170

Table 1과 Table 2로 부터 일차 모드에 대한 고유치의 기대치 및 일차 변동값을 식(5)에 대입해서 구해보면 다음과 같다.

$$\lambda = 0.382 + 0.0106 + 0.0276 = 0.4202$$

일차 모드에 대한 고유벡터의 기대치 및 일차 변동값을 식(6)에 대입해서 구해보면 다음과 같다.

$$\phi = \begin{matrix} 0.8507 & -0.0105 & 0.0105 & 0.8507 \\ + & + & = & \\ 0.5257 & 0.0170 & -0.0170 & 0.5257 \end{matrix}$$

식(29)와 식(30.2)로 부터 설계변수인 스프링 상수에 대해 각각 0.1의 변동율을 주고 구한 결과를 정리해 보면 다음과 같다. 고유치는 기대값에 비해 1.1% 높게 나타났다. 고유벡터는 변동이 없었다.

상기에서 구한 고유치를 이론해와 비교하였다. 스프링 상수와 집중질량을 1로 두면 특성방정식은

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha_1-\lambda & -1-\alpha_1 \\ -1-\alpha_1 & 2+\alpha_1+\alpha_2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

식(31)은 행렬식은 다음과 같다.

$$\lambda^2 - (3+2\alpha_1+\alpha_2)\lambda + 1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2 = 0$$

상기 방정식의 근은

$$\lambda^1, \lambda^2 = \frac{3+\alpha_1+\alpha_2}{2} \mp \frac{1}{2} (5+8\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

식(32)에 α_1, α_2 를 0.1로 주고 일차모드에 대한 계산을 하면 다음과 같다.

$$\lambda_1 = 0.420$$

그러므로 일차 섭동법으로 구한 고유치 값이 잘 일치한다.

4.2 민감도 해석결과

확정적인 구조계의 일차모드에 대한 고유치 및 고유벡터에 대한 설계 민감도를 식(17)에 의하여 구하였다. 결과가 Table 3에 제시되어 있다.

Table 3 Design sensitivity calculation for the first mode

	Design variable 1	Design variable 2
eigenvalue derivative	0.1056($\frac{d\lambda_{01}}{db_1}$)	0.2764($\frac{d\lambda_{01}}{db_2}$)
eigenvectors	-0.1051($\frac{d\phi_{01}}{db_1}$)	0.1051($\frac{d\phi_{01}}{db_2}$)
derivative	0.1701	-0.1701

Table 3의 결과로부터 다음을 예측할 수 있다. 2자유도로 이루어진 스프링·집중질량계에 대해서 고유치를 높일 경우에 설계변수 k_2^0 를 증가시키는 것이 좋다.

일차 변동된 시스템의 고유치와 고유벡터의 설계 민감도를 식(20)으로 구하였는데 결과가 Table 4에 나타나 있다.

Table 4 Design sensitivity calculation for perturbed first mode

	Random parameter 1		Random parameter 2	
	Design variable 1	Design variable 2	Design variable 1	Design variable 2
perturbed eigenvalue	-0.0073	0.0179	0.0179	0.0098
eigenvectors	0.0029	-0.0029	-0.0029	0.0029
derivative	-0.0123	0.0123	0.0123	-0.0123

Table 4의 결과로부터 다음의 결론을 유출할 수 있다. 일차 변동된 고유치에 대한 설계 민감도는 랜덤변수 k_1 을 설계변수 k_1^0 과 k_2^0 에 대한 편미분 값을 더하면 0.0106값이 계산되었다. 랜덤변수 k_2 에 대한 일차 변동된 고유치 설계민감도는 0.0277로 계산되었다. 그래서 변동이 있는 경우에서도 두번째 설계변수를 높이는 것이 고유진동수를 증가시킬 수 있다.

4.3 확률 유한차분법과의 비교

前節에서 구한 설계 민감도 값의 정확성을 검증하기 위하여 확률 유한차분법으로 해를 비교하였다. 섭동 차분법은 설계변수에 5%의 증분을 주어서 다음식으로 구하였다.

$$\Delta\psi_i = \frac{\psi_i(b+\delta b) - \psi_i(b)}{\Delta b} \quad (33)$$

식(33)에서 ψ_i 는 고유치 및 고유벡터의 값이다.

우선 확정적인 구조계의 일차모드에 대해서 계산된 민감도 값을 확률 유한차분법과 비교하였다. 결과가 Table 5에 나타나 있다. Table 5에서 ψ_1^1 는 원래 설계변수값으로 계산된 값이고, ψ_1^2 는 5%의 증분을 주어서 구한 값이다. $\Delta\psi_1$ 는 ψ_1^2 에서 ψ_1^1 을 감

Table 5 Comparison of Sensitivity Calculation ($\alpha=0$)

	ψ_1^1	ψ_1^2	$\Delta\psi_1 = \psi_1^2 - \psi_1^1$	ψ_1	$(\psi_1 / \Delta\psi_1 \times 100)\%$
$\lambda_{01 b_1}^1$	7.64	7.74	0.1	0.1056	105.6
$\lambda_{01 b_2}^1$	7.64	7.912	0.272	0.2764	101.6
$\phi_{01 b_1}^1$	17.014	16.912	-0.102	-0.1051	103.1
	10.514	10.678	0.164	0.1701	103.7
$\phi_{01 b_2}^1$	17.014	17.116	0.102	0.1051	103.0
	10.514	10.346	-0.168	-0.1701	101.3

한 값이고, ψ_i 는 Table 3 과 Table 4의 값으로서 계산에 의해 산출된 값이다. $\lambda^{01}|_{b_1}$ 는 일차모드에 대한 고유치를 첫번째 설계변수로 미분한 값을 의미한다. $\Delta\psi_i$ 와 ψ_i 의 정확도의 비교는 100배로 하여 비교하였다.

Table 5의 결과로부터 두 값이 잘 일치하고 있으므로 민감도 계산의 타당성을 확보할 수 있다.

마찬가지 방법으로 일차 변동된 고유치와 고유벡터의 설계 민감도 값을 비교하였다. Table 6에 결과가 나타나 있다. Table 6에서 $\lambda^{01}|_{b_1}$ 은 일차 변동된 일차모드의 고유치를 첫번째 설계변수로 미분한 값이다.

$$\frac{d\phi}{db_1} = \begin{bmatrix} -0.1051 \\ 0.1701 \end{bmatrix}_{\phi^{01}} + \begin{bmatrix} 0.0029 \\ -0.0123 \end{bmatrix}_{\phi^{11}} + \begin{bmatrix} -0.0029 \\ 0.0123 \end{bmatrix}_{\phi^{21}} = \begin{bmatrix} -0.1051 \\ 0.1701 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\phi}{db_2} = \begin{bmatrix} -0.1051 \\ -0.1701 \end{bmatrix}_{\phi^{01}} + \begin{bmatrix} -0.0029 \\ 0.0123 \end{bmatrix}_{\phi^{11}} + \begin{bmatrix} 0.0029 \\ -0.0123 \end{bmatrix}_{\phi^{21}} = \begin{bmatrix} 0.1051 \\ -0.1701 \end{bmatrix}$$

전체 고유치에 대한 설계 민감도 값은 확정적 구조계의 고유치에 비해서 1.1% 높게 나타났다. 고유벡터의 설계 민감도 값은 확정적 구조에 대한 값과 동일하였다.

Table 6 Comparison of First order Sensitivity Calculation ($\alpha=0.1$)

	ψ_1	ψ_2	$\Delta\psi_i = \psi_2 - \psi_1$	ψ_i	$(\psi_i / \Delta\psi_i \times 100)\%$
$\lambda^{01} _{b_1}$	0.212	0.204	-0.008	-0.0073	105.6
$\lambda^{01} _{b_2}$	0.552	0.562	0.010	0.0098	98.0
$\phi^{11} _{b_1}$	-0.210	-0.208	0.002	0.0029	145.0
	0.340	0.328	-0.012	-0.0123	102.5
$\phi^{11} _{b_2}$	0.210	0.212	0.002	0.0029	145.0
	-0.340	-0.352	-0.012	-0.0123	102.5

Table 6에서 대부분 값이 잘 일치하고 있다. 그러나 고유벡터의 일차모드에 대한 변동율의 설계 민감도 값에서 차이를 보이고 있다. 이 차이는 확률 유한차분법에서 5%의 증분양을 주었기에 다소 크게 나타났다. 차이가 크지만 Table 2에서 섭동된 고유벡터의 값이 0.0105로 작기에 별로 문제가 되지 않는다.

그러므로 설계변수에 변동이 포함된 스프링 · 집중질량계의 전체 설계 민감도는 식(23)과 식(24)로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{d\lambda}{db_1} = 0.1056|_{\lambda^{01}} - 0.0073|_{\lambda^{11}} + 0.0179|_{\lambda^{21}}$$

$$= 0.1162$$

$$\frac{d\lambda}{db_2} = 0.2764|_{\lambda^{01}} + 0.0179|_{\lambda^{11}} + 0.0098|_{\lambda^{21}}$$

$$= 0.3041$$

5. 결 론

실제 시스템에는 재료정수나 경계조건 및 외부 하중등에 결정론적으로 사용할 수 없는 불확정량을 내포하고 있다. 고유치 문제는 진동해석이나 좌굴해석에 많이 적용되고 있다. 그래서 고유치 해석 수행시에 변동량을 설계에 반영해 주어야 한다. 최적설계 알고리즘 중에는 제한 조건식의 설계 민감도를 요한다.

본 연구에서는 일차 섭동법을 사용하여 고유치와 고유벡터의 변동값을 구하고, 최적설계 수행시에 효율적으로 적용할 수 있는 민감도 해석법을 개발하였다.

스프링 · 집중질량계로 이루어진 간단한 시스템에 대해서 스프링 상수를 랜덤변수로 두고, 스프링 상수의 평균값을 설계변수로 설정하였다. 수치예에 대해서 다음과 같은 결론을 지을 수 있다.

- 1) 불확정계의 고유치 값은 이론해와 비교할 때 변동된 값을 고려해야 한다. 본 예제에서는 일차 변동값이 기대치에 비해 1.1% 증가하였다.
- 2) 개발된 민감도 해석법과 확률 유한차분법으로 설계 민감도 값을 비교한 결과 잘 일치하였다.
- 3) 변동을 포함하는 전체 시스템의 고유치에 대한 설계 민감도 값은 확정적인 경우에 비해 1.1% 증가하였다.

- 4) 제시된 방법으로 최적설계를 수행한다면 신뢰성이 있는 설계를 할 수 있다.

참 고 문 헌

1. J.D. Collins and W.T. Thomson, "The Eigenvalue Problem for Structural System with Statistical Properties", AIAA JOURNAL, VOL.7, NO.4, pp.642-648, 1969.
2. L. Meirovitch, Computational Methods in Structural Dynamics, SIJTHOFF & NOORDHOFF, 1980.
3. 中桐滋, 久田俊明, 確率有限要素法人門, 培風館, 1990.
4. R.L. Fox and M.P. Kapoor, "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors", AIAA JOURNAL, VOL.6, NO.12, pp.2426-2429, 1968.
5. C.A. Rudisill and Y.Y. Chu, "Numerical Methods for Evaluating the Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectos", AIAA JOURNAL, VOL.13, NO.6, 1975.
6. E.J. Haug, K.K. Choi, V. Komkov, Design Sensitivity Analysis of Structural Systems, ACADEMIC PRESS, 1986.
7. R.B. Nelson, "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives", AIAA JOURNAL, VOL.14, NO.9, PP.1201-1205, 1976.
8. R.T. Haftka, Z. Gürdal and M.P. Kamat, Elements of Structural Optimization KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 1990.

(접수일자 : 1994. 3. 17)