

剛性比의 變化에 따른 Shell構造의 力學的 舉動

都 鎮 洙*

1. 序 論

Shell구조의 역학적 합리성은 膜應力(Membrane Stress)상태가 어느 정도 지배적인가에 의존하지만, 실제 응력의 분포상태는 상당한 覺亂(Disturbance)현상을 수반하며 그 각란의 정도는 지지조건이나 Shell구조가 가지는 휨강성의 크기에 많은 영향을 받는다.

單層 Lattice Shell 등의 해석에서는, 공간에 있어서의 규칙적인 부재요소의 배치가 많다는 점을 이용하여 연속체近似에 의한 어떤 역학적 특성을 지니는 연속체 Shell로서 해석되는 경우가 있다. 이러한 경우 해석상의 근본적인 차이점은 없으며, 等價剛性의 평가를 통하여 연속체 Shell과의 상호 변환이 가능하지만, Rib부착 Shell의 경우처럼 축강성과 휨강성의 값이 서로 獨立的으로 변화하게 된다.

本稿는 이와 같은 관점에서 축대칭 회전 Shell을 해석모델로 하여, Shell의 축강성에 대한 휨강성의 변화에 따른 구조물의 거동을 중심으로 검토하는 것이다. 여기에 소개되는 결과는 曲線要素(Curved Element)를 이용한 FEM 해석결과이며 연속체이론에 근거하고 있다.

2. 축대칭회전Shell

2.1 要素의 形狀

일반적으로 FEM해석에 이용되는 축대칭 Shell 요소는 子牛曲線의 형상에 따라 직선요소와 곡선요소로 나뉘어진다.

Shell을 원추체(Conical Frustum)요소의 집합체로 假定하면 二重曲率의 Shell의 경우, 直線近似때문에 解의 精度가 떨어지고 휨모멘트의 값에 상당한 誤差가 발생한다. 따라서 本稿에서는 곡선요소⁽¹⁾로 Shell을 近似하고 회전축과 經線이 이루는 각을 ϕ 로 하고 ϕ 를 경선의 길이 s 의 2차식으로 가정한다.

$$\phi(s) = \phi_1 + \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_1^2 \quad (1)$$

$$r(s) = r_1 + \int_0^s \sin\phi \, ds \quad (2)$$

$$\alpha_1 = 6\phi_0 - 4\phi_1 - 2\phi_2 \quad \alpha_2 = -6\phi_0 + 3\phi_1 + 3\phi_2$$

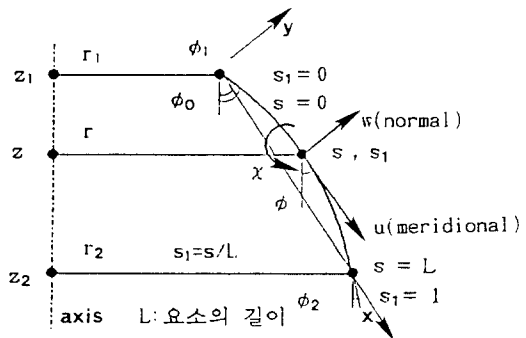


Fig. 1 曲線要素(Curved Element)

* 동아건설산업(주) 기술연구실 선임연구원, 工博

2.2 Strain 成分 및 變位式의 假定

Koiter²는 Thin Shell의 有限變位理論으로 부터 Shell의 중앙면상의 面內Strain 및 휨Strain을 다음과 같이 정의하고 있다.

(단, r : 回轉 Tensor, n : 中央面에서의 法線의 回轉 Vector, a, b : 計量 Tensor)

$$\gamma_{ij} = \zeta_{ij} + [a^{lk}(\zeta_{li} - r_{li})(\zeta_{kj} - r_{kj}) + (n_k + n_j)]\delta \quad (3.1)$$

$$\rho_{ij} = [b_i(\zeta_{ij} - r_{ij}) + b_j(\zeta_{ji} - r_{ji}) + (n_{ij} + n_{ji})]\delta + b_i n_i n^j \delta + n^i [\zeta_{ij} + \zeta_{ji} - \zeta_{ij}] \quad (3.2)$$

$$\zeta_{ij} = (u_{ij} + u_{ji})\delta - w b_{ij} \quad (3.3)$$

$$tR \ll t\rho \ll \text{Min}[R, t, 1/t\rho]$$

위 식중, γ_{ij} 가 線形化되면 ζ_{ij} 가 되고 曲率변화 Tensor ρ_{ij} 가 線形化된 경우는 曲率線좌표를 이용한 때의 Sanders⁽³⁾의 식과 일치한다. 축대칭 회전체 Shell의 해석에 있어서는, 외력(하중) 및 변위를 Shell의 회전방향(θ 방향)으로 級數 전개를 하여 θ 에 대하여 變數分離된 平衡式이 얻어진다.

$$u_n = \sum [A_1 + A_2 s_1 + B_1 s_1 (s_1 - 1) + B_3 s_1^2 (s_1 - 1)] \cos n\theta$$

$$v_n = \sum [A_3 + A_4 s_1 + B_2 s_1 (s_1 - 1) + B_4 s_1^2 (s_1 - 1)] \sin n\theta$$

$$w_n = \sum [A_5 + A_6 s_1 + A_7 s_1^2 + A_8 s_1^3] \cos n\theta \quad (4.1 \sim 4.3)$$

u, v, w 는 要素變位の 직교3성분이며, 각각 經線 방향, 緯線 방향, 法線 방향의 성분을 나타낸다. 요소의 회전각 χ 는 變位 성분으로부터 다음과 같은 식이 된다.

$$\chi_n = [dw_n / ds_1 + u_n d\theta / ds_1] L \quad (5)$$

$B_i (i=1 \sim 4)$ 는 未定係數를 나타내며 $s_1=0, 1$ 에서 변위 u 및 v 와 무관계가 되기 때문에 계수 B_i 는 요소를 구성하기 전에 縮約되어지는 內部自由度이다.

이러한 요소의 未定係數 Vector에 관한 剛性 Matrix는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} [K_{AA}] & [K_{AB}] \\ [K_{BA}] & [K_{BB}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{A\} \\ \{B\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{f_A\} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$\{B\}^T = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ 의 항은 全要素를 조합하기 전에 消去(縮約: Condensation)되어 결과적으로 다음과 같이 표시된다.

$$[[K_{AA}] - [K_{AB}][K_{BB}]^{-1}[K_{BA}]] \{A\} = \{f_A\} \quad (7)$$

이러한 축약은 $B_i (i=1 \sim 4)$ 가 節點變位の 값에 영향을 미치지 않기 때문에 자연적으로 행해지며, 요소의 剛性 Matrix는 일반적인 경우 $[8 \times 8]$ 축대칭 하중의 경우 $[6 \times 6]$ 의 Matrix가 된다. (7)식을 節點變位 Vector 및 等價節點力 Vector로 나타내면 최종적인 要素剛性 Matrix를 구할수 있다.

3. 回轉體 Shell에 있어서의 휨剛性的의 影響

해석에 있어서 회전체 Shell은 두께방향으로 均質이고, 휨중립축이 Shell의 중앙에 있다고 假定한다. 여기서는 Shell의 축강성과 휨강성의 관계를 Parameter化하여 Shell의 축강성에 대하여 휨강성의 값을 獨立的으로 변화시켰을 때 발생하는 Shell의 역학적 거동에 대해 중점적으로 검토한다.

線材의 해석에 있어서의 斷面2次半徑(回轉半徑)의 개념을 連續體 Shell에 적용한 계수 i_0 를 도입하여 축강성과 휨강성의 관계를 "Thinness Ratio"로 표현하여 連續體回轉直交異方性 Shell의 개념으로 해석한다.

$$B_K = \frac{r_0}{(i_0)_K} \sqrt{\frac{12(t_E)_K r_0^2}{(t_B)_K^3}} \quad (8)$$

$$(i_0)_K = \sqrt{(t_B)_K^3 / 12 (t_E)_K}$$

여기서 t_E, t_B 는 각각 축방향 및 휨에 관한 有效 Shell두께, r_0 는 Shell의 저변부의 회전반경을 나타내고 첨자(K=1,2)는 각각 經線방향과 緯線방향으로 변화된다.

$\beta = \infty$ 의 경우는 Shell의 휨강성이 존재하지 않고 面內力만으로 작용하중에 저항하는 膜應力(Membrane Stress)상태가 되며, $t_E = t_B = t^\circ$ 의 경우는 통상의 均質연속체의 Shell로서 해석되어진다. 本稿에서는 Shell의 諸치수에 대해 無次元化를 행하여 응력 해석상의 판단기준을 부여하였다.

3.1 Barrel and Waisted Type

子牛曲線(平面曲線)이 圓弧이고 그 형상이 τ 로 표현되는 等方性的 Shell($\beta_1 = \beta_2 = \beta$)에 대한 해석 결과에 대하여 검토한다.

$$\tau = r_0/R < 1 \quad (9)$$

R=경선방향의 곡률반경

하단부 固定支持의 圓筒型 Shell($\tau=0$)이 $p_n = p \cos n\theta$ 의 하중을 받을 때, Harmonic Num, $n=1,2$ 의 경우의 法線方向變位 w 및 周方向應力(Hoop應力) N_2 의 해석결과를 Fig. 2~Fig. 3에 나타낸다.

$n=1$ 의 경우보다 $n=2$ 일 때 β 의 영향범위가 크게 나타나고 있고, β 의 감소(휨강성의 증가)에 따른 變位 및 應力の 감소상태도 보다 현저해진다. 그리고 β 의 값이 어느 한계 이하가 되면 작용하중

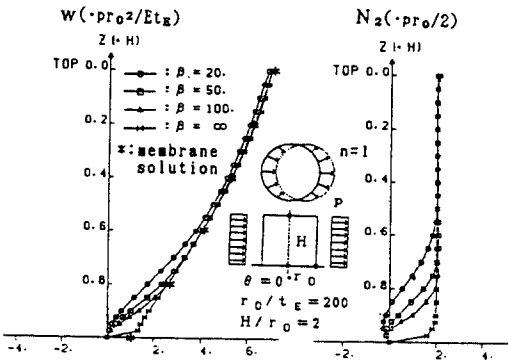


Fig. 2 變位 및 應力の 分布圖($n=1$)

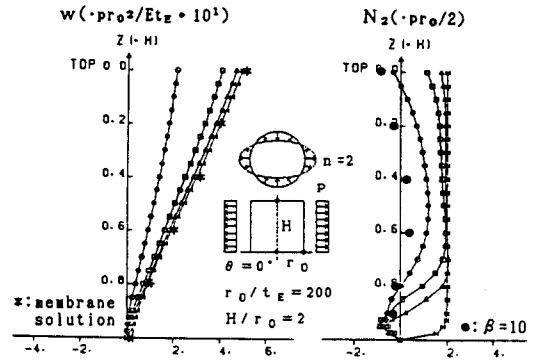


Fig. 3 變位 및 應力の 分布圖($n=2$)

의 분포상태에도 불구하고 경계부 부근의 인장응력이 압축응력으로 변화됨을 알 수 있다.

그리고 $\beta = \infty$ 의 경우의 처짐의 분포상태도 통상의 해석적 膜應力の 값과 거의 일치하고 있다.

$\tau = \pm 0.6$ 과 같이 經線방향에 曲率을 가지는 경우, β 의 변화에 따른 最大變位の 변화 상태를 보면 (Fig. 4), 하단부 固定支持의 경우보다 Roller支持의 경우에서 β 의 영향이 아주 크게 나타나고 있는 것을 알 수 있고, 이러한 경우 Shell에 어느 정도의 휨강성을 부여하는 것이 Shell의 변형의 저감에 아주 효과적이라고 할 수 있다.

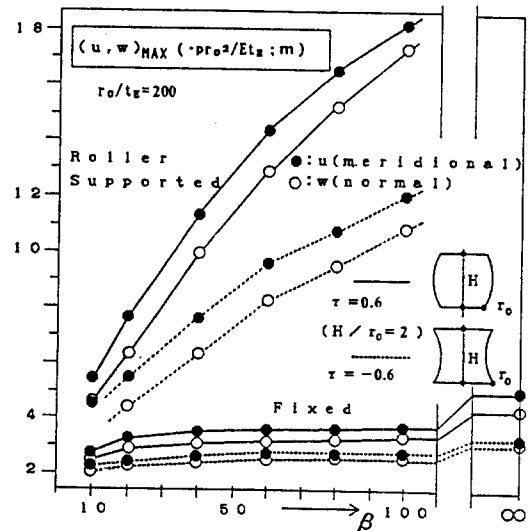


Fig. 4 β 의 變化에 따른 最大變位の 變化

3.2 長圓回轉面(Rotational Ellipsoid)

해석모델로 自重이 작용하는 경계부 固定支持의 長圓回轉面을 채용하고, 그 형상을 離心率 e 로 표현하여 해석한다.

$$e = \sqrt{r_0^2 - H^2}/r_0 \quad (10)$$

$e=0.87$ 의 경우에 있어서의 法線방향의 變位 및 周방향의 應力분포를 Fig. 5에 표시하지만, β 의 감소에 따라 變位 및 應力이 점차 감소하는 경향을 나타내고 있고, 특히 $\beta=20$ 이 되면 Shell의 거의 대부분의 영역에서 압축상태를 형성하는 것을 볼 수 있다.

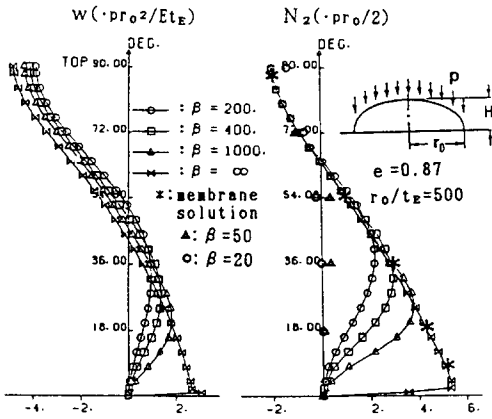


Fig. 5 變位 및 應力の 分布圖(長圓回轉面)

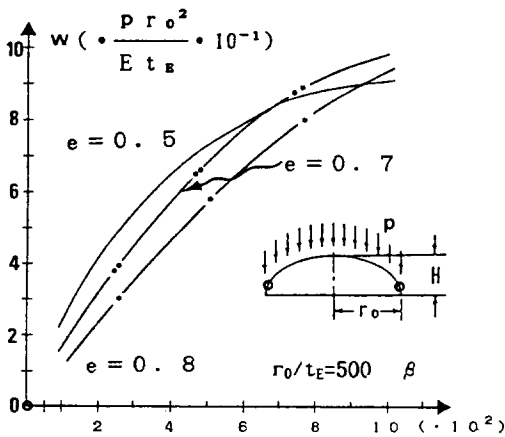


Fig. 6 Shell의 形狀과 β 와의 관계

Fig. 6은 $e=0.5, 0.7, 0.8$ 의 형상에 있어서, β 에 따른 경계부 부근의 特定部位($\phi=8^\circ$)의 變位の 변화상태를 표시하고 있으나 Thinness Ratio β 의 변화가 Shell의 역학적 거동에 크게 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

4. 결 론

이상, 軸對稱回轉 Shell을 해석모델로 선정하여 주로 Shell의 휨剛性이 구조체의 거동에 미치는 영향에 대하여 검토하였다. 어떠한 구조형식이든 外力의 작용하에서 발생하는 應力이 축방향력뿐이라는 것은 상당히 合理的이고 力學的으로도 명쾌한 동시에, 실제 설계상 理想的인 판단기준을 부여하지만, 실제로는 필히 휨상태를 수반하게 된다. 이러한 휨상태는 구성요소의 휨剛性에 크게 의존하고 있고, 구조체에 어느 정도의 휨剛性을 부여하므로써 作用荷重에 대한 저항능력의 증가, 變形 및 應力の 저감에 효과적이라는 것을 알 수 있다.

本稿에서는 等方性 Shell에 대한 線形 解析結果만을 掲載하였으나, 이러한 性狀은 여러가지 影響因子(지지조건, 하중상태等)에 따라 아주 相異하게 나타나기 때문에 세심한 考察이 필요하다고 할 수 있다.

參 考 文 獻

1. Mebane, P.M. & Stricklin, J.A. : Implicit Rigid Body Motion in Curved Finite Elements, AIAA J., Vol.9, No.2, pp.344-345, 1971.
2. Koiter, W.T. : On the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells, Proc., Kon. Ned. Ak. Wet., Amsterdam, B69, 1966.
3. Sanders, J.L. : Nonlinear Theories for Thin Shells, Quart., Appl., Math., Vol.21, No.1, pp. 21-36, 1963.
4. Jin-Soo Do, M.Kawaguchi : Influence of Bending Rigidity in Shell-Like Spatial Structures, Proc., of International IASS Symposium, Copenhagen, Denmark, pp.15-21, 1991.
5. 都 鎮 洙, 川 口 衛 : 空間構造における 曲げ剛性の影響, 日本建築學會論文報告集434號, pp.87-95, 1992.