

UBET를 이용한 리브-웹형 링 단조에 관한 연구

김영호^{*}, 배원병^{**}, 이종현^{***}, 남경훈^{***}

A Study on Rib-Web Shaped Ring Forging Using UBET

Young-Ho Kim^{*}, Won-Byong Bae^{**}, Jong-Heon Lee^{***}, Kyeong-Hoon Nam^{***}

ABSTRACT

An upper bound elemental technique(UBET) is applied to predict variations of neutral plane and optimal position of the initial billet for rib-web shaped ring forging. In the analysis, the neutral plane position and velocity fields are determined by minimizing the total power consumption with respect to chosen parameters. The degree of die-cavity filling by initial billet-position and the variations of neutral plane by friction condition are investigated. Experiments have been carried out with pure plasticine billets at room temperature. The theoretical predictions of the forging load and the flow pattern are in good agreement with the experimental results.

Key Words : Ring forging(링단조), Rib-Web shape(리브-웹형상), UBET(상계요소법), Neutral plane(중립면), Initial billet position(초기 시편위치), Friction factor(마찰정수), Flow pattern(유동패턴), Plasticine(플라스티신)

1. 서 론

산업의 고도화에 따른 제품의 정밀도, 형상 난이도, 경량화 등 단조 제품에 대한 정밀성의 요구가 날로 증가함에 따라 링 형상을 가지는 제품의 수요가 증가하고

있다. 단면이 리브-웹(rib-web)형인 링 제품은 자동차, 철도, 광산장비 및 항공기에 널리 사용되고 있다. 링 형상의 밀폐형 단조에서 접촉면의 마찰 정도에 따라 중립면(neutral plane)이 변하게 되고 소재의 유동에 큰 영향을 주며 다이충만도, 가공하중, 플래시량 등의

* 부산대학교 생산기계공학과, 정밀정형 및 금형가공연구센터

** 부산대학교 기계설계공학과, 정밀정형 및 금형가공연구센터

*** 부산대학교 생산기계공학과 대학원

최적조건을 연구하는데 무엇보다도 중요하다.

이와같이 중립면이 발생하는 소성가공 문제를 연구하는 데는 상계법과 상계요소법(UBET), 유한요소법(FEM) 등의 수치적인 방법이 주로 사용되고 있다. 이 중에서 유한요소법은 방대한 계산량, 현장에서의 실용성, 계산장비나 인적자원에 대한 경제성의 측면에서 나름대로 제약이 있다. 특히 상계요소법은 유동장 내의 소재를 단순한 형상의 여러가지 요소로 분할하여 해석함으로써 상계법에 비해 비교적 복잡한 유동을 해석할 수 있어 많은 연구가 수행되고 있다.

중립면을 포함하는 링 단조에 관한 연구를 살펴보면, 링 업셋 단조(ring-upset forging)에 관한 연구는 Kudo⁽¹⁻²⁾가 단위체적변형 개념을 도입하여 극한 해석을 사용하여 첫번째로 시도하였다. 그 후 상계법에 의한 연구가 활발히 진행되었으며 Avitzur 등⁽³⁾은 링 단조에서 Kudo의 연구를 더 확장시켜 단조 가공시의 유동패턴과 하중 등을 계산하고 안쪽 또는 바깥쪽으로 유동이 양분되는 중립 반경의 개념을 도입하였다. Lee 등⁽⁴⁾과 Nagpal 등⁽⁵⁾, Avitzur 등⁽⁶⁻⁸⁾은 동적가용속도장(kinematically admissible velocity field)에 중립 반경 유동변수를 준독립 변수로 포함시켜 해석하였다. 링 업셋 단조에 관한 많은 연구가 비교적 간단한 속도장을 사용하는 상계법으로 해석되었다. 반면에 최종제품의 한쪽 단면을 원형으로 가공하는 밀폐형 링 단조(closed ring forging)에 관한 연구는 Keife⁽⁹⁾가 상계요소법으로 중립면의 개념을 도입한 적이 있으나 리브-웹브형인 링 단조에 관한 연구는 없다.

그러므로 본 연구에서는 리브-웹브형 링 단조에서 소재의 초기위치에 따른 다이충만도와 마찰조건에 따른 중립면의 변화를 간단하고 경제성이 있는 상계요소법을 이용하여 이론적으로 파악하고자 한다. 또한 상온에서 모델재료인 플라스틱인(Plasticine)을 이용하여 단조 실험을 한 후 소재의 유동형태와 단조하중, 다이충만, 플래시량 등을 파악하여 수치해석 결과와 비교하고자 한다.

2. 이론 해석

UBET는 상계정리를 기초로 하여 더욱 정확한 하중값을 구하는 상계법의 발전된 형태로서 전체 소성변형 영역을 단순한 형태의 삼각형과 사각형 요소 등으로 분

할 해석하는 방법이다. 분할한 각 요소의 동적 가용 속도장을 사용하여 소재 전체의 속도장을 표현하고 속도장에 포함된 준독립 변수(pseudo independent parameter)에 대해 전체 에너지 소비율을 최소화함으로써 소재 전체의 속도장을 결정한다.

본 연구에서는 Fig. 1과 같은 축대칭 리브-웹브형 단면을 가진 링 제품을 모델로 선정하여 이론해석을 행하였다.

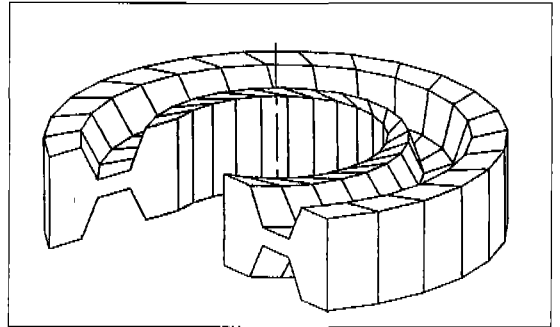


Fig. 1 Analytical model of Axisymmetric ring forging

2.1 동적 가용속도장과 에너지 소비율

분할된 각 요소의 속도장은 다음 조건을 만족함으로써 유도된다.

- (1) 외부 경계에 관한 변위 경계 조건
- (2) 요소간의 경계에 있어서 수직 속도 연속 조건
- (3) 각 요소에 대한 체적 일정 조건

이 때 요소는 모든 표면에서 유동을 허용하며 각 요소는 독립적으로 취급한다. 또한 요소 경계에 있어서 수직 속도 성분들은 모든 표면을 따라 일정하며 균일하다고 가정한다(평행 속도장). 본 연구에서는 축대칭 문제를 해석하기 위하여 Kiuchi 등⁽¹⁰⁻¹¹⁾이 제안한 삼각형과 사각형의 단순한 형상의 요소를 사용하였고 최종제품의 요소분할은 Fig. 2와 같다.

단조가공시 발생하는 전체 에너지소비율은 다음 식과 같다.

$$J = \sum \dot{W}_i + \sum \dot{W}_s + \sum \dot{W}_f \quad (1)$$

위 식에서 \dot{W}_i 는 요소의 내부 변형 에너지 소비율, \dot{W}_s 는 요소와 요소 사이의 전단 변형 에너지 소비율,

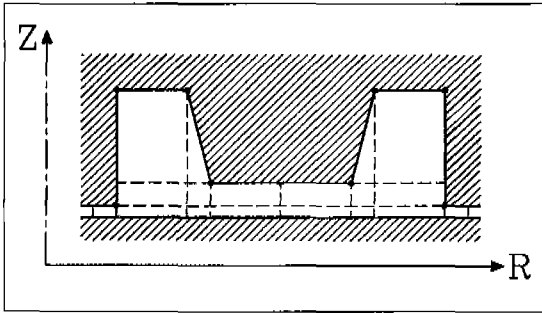


Fig.2 Element division

\dot{W}_f 는 다이와 소재 사이의 접촉면에서 발생하는 마찰에 의한 에너지 소비율이다.

식(1)에서 각각의 항에 관한 관계식은 식(2~4)와 같이 표현된다.

$$\dot{W}_v = \int_v \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}} dV \quad (2)$$

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \left[\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right]^{1/2}$$

$$\dot{W}_s = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \int_s |\Delta v_s| ds \quad (3)$$

$$\dot{W}_f = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \int_{s_f} |\Delta v_f| ds_f \quad (4)$$

여기서, $\bar{\sigma}$ 는 유효응력(effective stress), $\dot{\bar{\epsilon}}$ 는 유효변형률속도(effective strain-rate), $|\Delta v_s|$ 는 전단면의 속도 불연속량, $|\Delta v_f|$ 는 다이와 소재의 마찰면에서의 속도 불연속량, m 은 마찰계수(friction factor)를 나타낸다.

따라서 본 연구에서는 가공이 진행될수록 삼각형과 사각형으로 분할된 소성 변형 영역이 경계 조건에 따라 속도를 알 수 있는 면과 가정해야 하는 면으로 나누어진다. 가정한 면에 포함된 미지 변수(Ni)를 준독립 변수로 하여 전체에너지 소비율, 즉 $J^*=J^*(N_1, N_2, N_3, \dots, N_n)$ 을 최소화하기 위해 FPSM(Flexible Polyhedron Search Method)¹²⁾을 사용하였다. 최소화된 전체 에너지소비율에서 전체 속도장을 결정한다. 이때 상제하중은 다음과 같다.

$$L = \frac{J^*}{V_a} \quad (5)$$

여기서, V_a : 다이 속도

2.2 단계 진행

UBET 해석에서 단조 가공하는 동안 다이 진행에 따른 재료의 층단 상태를 알기 위하여 가공의 전 단계를 여러 단계로 나눈다. 매 변형 단계마다 각 요소의 시간 증분 Δt 이후의 좌표는 다음과 같다.

삼각형 요소:

$$r'_i = r_i + \Delta t \cdot \frac{2 r_{i+1} U_{i+1,j}}{r_i + r_{i+1}} \quad (6)$$

$$r'_{i+1} = r_{i+1} + \Delta t \cdot U_{i+1,j} \quad (7)$$

$$z'_j = z_j + \Delta t \cdot V_{i,j} \quad (8)$$

$$z'_{j+1} = z_{j+1} + \Delta t \cdot \left(V_{i,j} + \frac{z_j - z_{j+1}}{r_i + r_{i+1}} \cdot U_{i+1,j} \right) \quad (9)$$

사각형 요소:

$$r'_i = r_i + \Delta t \cdot U_{i,j} \quad (10)$$

$$r'_{i+1} = r_{i+1} + \Delta t \cdot U_{i+1,j} \quad (11)$$

$$z'_j = z_j + \Delta t \cdot V_{i,j} \quad (12)$$

$$z'_{j+1} = z_{j+1} + \Delta t \cdot V_{i,j+1} \quad (13)$$

여기서 $r'_i, r'_{i+1}, z'_j, z'_{j+1}$ 는 Δt 변형후의 요소절점이다.

변형 수 인접 요소 사이에 미끄럼이 발생하면 접선 속도 불연속이 생기게 되고 요소의 크기와 경계 조건이 바뀌게 되어 인접 요소들 사이의 경계의 불일치(mismatching) 등이 발생한다. 따라서 다음 단계를 진행하기 위하여 수직, 수평 투사에 의한 요소 재구성 방법¹³⁾을 사용하였다.

2.3 중립면 결정

본 연구의 수치해석 프로그램(URF:Ubet Ring-Forge)의 흐름도(flow chart)는 Fig.3과 같다. 중립면은 동적가속속도장의 미지속도와 같이 준독립 변수로 설정하였다. 따라서 URF에서 단조 가공이 진행됨에 따라 각 단계에서의 에너지 소비율은 중립면은 위치와 관련되고 이 중립면은 속도장과 관련하여 최소화하였다. 이때 속도장은 양(+), 0, 음(-)의 값을 가지게 되어 중립면을 기준으로 좌우로 나누어진다.

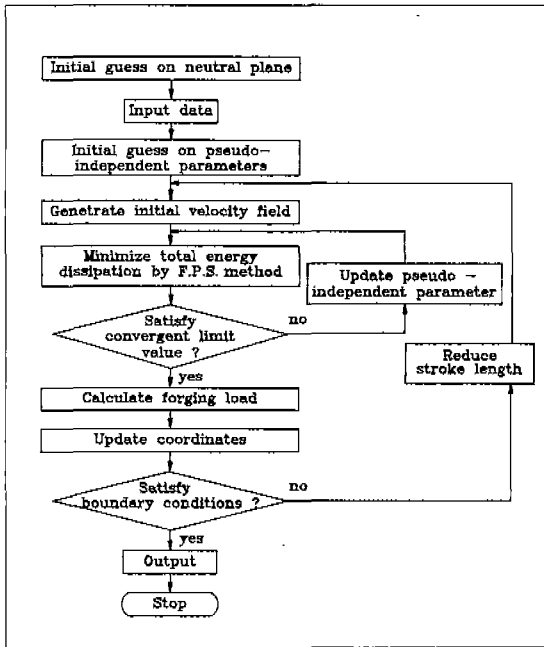


Fig. 3 Flow chart for URF program

3. 실험

3. 1 기초실험

리브-웨브형 링 단조의 실험재료로 Harbutt's Plasticine사 제품인 플라스틱신을 사용하였다.

플라스틱신 시편 제작방법과 윤활제 및 온도에 따른 마찰계수의 변화는 앞서 발표된 저자들의 연구¹⁴⁾에서 상세히 알려져 있다. 여기서 비교적 소재와 다이의 분리가 용이한 윤활제로서 탈크 파우더(talc powder)와 실링페이퍼(sealing paper)가 사용되었다.

재료의 응력과 변형률 특성을 결정하기 위해서 직경 대 높이가 1:1(30mm:30mm)인 실린더 시편으로 압축 실험에서 비교적 벌짐(bulging)현상이 생기지 않는 바셀린(vaseline) 윤활제(m ≃ 0.1)로 상온에서 일정속도(0.5mm/sec)로 압축을 50%까지 압축하였다. 이 결과를 최소자승법(least square method)으로 정리한 응력과 변형률 관계는 Fig. 4와 같다. 재료의 응력과 변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\bar{\sigma} = 0.17797 \bar{\epsilon}^{0.0822} \text{ (MPa)} \quad (14)$$

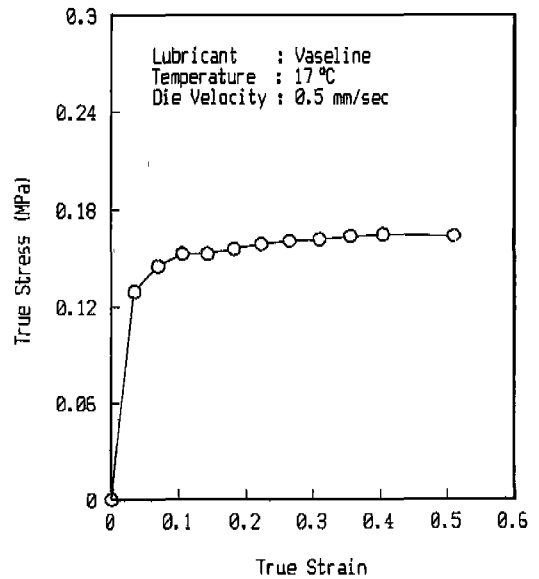


Fig. 4 True stress-strain curve of plasticine

3. 2 리브-웨브형 링 단조 실험

시뮬레이션 결과를 바탕으로 링 단조 소재의 치수를 결정하고, 윤활제는 비교적 소재와 다이의 분리가 용이한 탈크 파우더(m ≃ 0.4)를 사용하였다. 시편은 소재의 유동 형상을 시각적으로 나타내기 위하여 흑, 백색 플라스틱신을 사용하여 각각 충분히 반죽한 뒤에 얇은 링으로 만들고 색을 번갈아 가며 적층하여 초기 소재를 제작하였다. 만든 시편은 상온에서 24시간 정도 유지시킨 후에 사용하였다.

다이(Fig. 5)는 S20C의 소재로 반원형 다이를 제작하여 단조 후 플라스틱신과 다이의 분리를 용이하게 하였다.

플라스틱신은 유지 성분을 포함하고 있으므로 온도에 매우 민감하다. 그러므로 항온 항습기로 실험실의 온도를 상온으로 충분히 유지시킨 뒤 로드 셀(load cell)이 100kN인 MTS에서 다이 속도 0.5mm/sec로 실험하였다. 측정의 정밀도를 높이기 위해서 변위 카드(displacement card)는 ±50mm, 하중 카드(load card)는 ±50kN을 사용하여 실험중 하중과 변위 선도를 X-Y 기록계에 자동 출력하도록 하였다.

4. 결과 및 검토

4.1 초기 소재의 단면의 위치와 다이충만도

밀폐형 단조에서 플래시로 빠져나가는 소재의 손실을 줄이고 작은 하중으로 최종 제품을 얻는 것이 좋다. 일반적인 리브-웹형 축대칭 단조에서는 소재의 중심과 웹의 중심을 일치시켜서 단조를 행한다. Fig. 6은 단조다이와 초기소재의 치수를 나타낸다. Fig. 7은 초기소재의 한쪽 단면단면의 기하학적 중심($R_{bc} = 60.00\text{ mm}$)과 웹 중심($R_{wc} = 60.00\text{ mm}$)이 같은 Fig. 6의 Billet 1을 사용하여 다이속도 0.5 mm/sec 와 마찰정수 0.4 로 다이충만과정을 시뮬레이션한 것이다. 여기서, 다이 진행에 따라 웹 중심에서 바깥쪽 리브 부분으로의 유동이 안쪽보다 상대적으로 빨라 결국 최종 단계에서는 바깥쪽 플래시부에 과도한 플래시가 생겨 안쪽 리브부에는 다이가 다 채워지지 않은 것을 볼 수 있다.

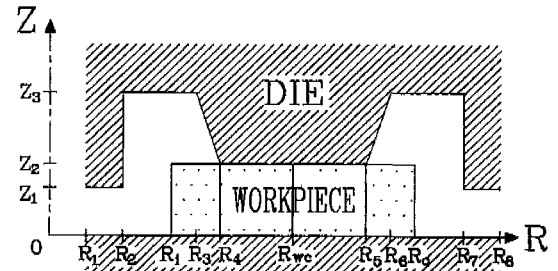


Fig. 5 Separated upper die

Fig. 8은 일정 체적하에 초기 소재의 한쪽 단면의 중심위치를 각기 달리 했을 때 소재의 충만 정도를 나타내고 있다. (a)는 Billet 1의 최종단계를 나타내고, (b~d)는 초기소재의 한쪽 단면의 중심을 웹 중심보다 안쪽으로 조금씩 이동시켜 시뮬레이션한 결과의 최종단계를 나타낸다. (a)와 같이 소재의 한쪽 단면의 중심을 웹 단면의 중심에 놓고 체적일정하에서 축 방향과 반경 방향의 소재 비를 달리하여도 소재의 안쪽 유동보다 바깥쪽 유동이 빨라 바깥쪽으로 과도한 플래시가 생기고, 다이가 다 채워지지 못하였다. (b)는 (a)보다 초기소재의 한쪽 단면의 중심이 웹의 중심보다 안쪽으로 이동한 Billet 2($R_{bc} = 58.75\text{ mm}$)을 사용했을 경우를 나타내고 있으며, (a), (b)와 비교해 다이충만과 적절한 플래시를 만들어 완제품을 만들 수가 있었다. (d)는 Billet 4($R_{bc} = 56.25\text{ mm}$)로 단조하였을 때

이며 이 경우에는 상대적으로 안쪽 유동이 많아 안쪽 플래시가 과도하게 생기면서 바깥쪽 리브를 다 채우지 못하였다. 따라서 소재 중심을 Billet 1에서 Billet 3로 이동함에 따라 향상된 다이충만과 플래시를 얻을 수 있었다.

Fig. 9에서는 Fig. 6의 Billet 3을 이용하여 초기부터 최종단계까지의 다이 진행에 따른 요소 구성과 플래시 생성과정을 시각화한 것이며, Fig. 10은 Billet 3의 초기소재에 격자($15 \times 8\text{ points}$)를 설정해 놓고 식(6-13)에 의하여 새로운 위치로 격자 절점의 좌표를 수정한 단계 진행에 따른 격자 변형 양상을 시뮬레이션한 것이다. 또한 Fig. 11은 초기소재 (Billet 3)를 플라스틱으로 시편을 제작하여 실험한 결과를 보여 주고 있다. Fig. 9~10에서 초기소재의 한쪽 단면의 중심을 안쪽으로 이동하였음에도 불구하고 다이진행에 따라 바깥쪽으로 유동속도가 빨라 Fig. 9(b), Fig. 10(b)와 같이



< Die dimensions > (Unit : mm)

R_1	R_2	R_3	R_4	R_{wc}	R_5	R_6	R_7	R_8	Z_1	Z_2	Z_3
15.0	30.0	43.0	45.0	60.0	75.0	77.0	90.0	105.0	11.5	15.0	27.5

* R_{wc} : Center of web

< Initial billet dimensions > (Unit : mm)

	R_1	R_{bc}	R_c	$H(=Z_2)$
Billet1	35.8	60.00	84.2	15.0
Billet2	34.0	58.75	83.5	15.0
Billet3	31.5	57.00	82.5	15.0
Billet4	30.5	56.25	82.0	15.0

* R_{bc} : Center of billet section

Fig. 6 Dimensions of die and initial billet for axisymmetric ring-forging

양쪽 리브부분의 다이충만도가 유사하며 초기에는 안쪽으로 플래시가 먼저 생기지만 소재 유동이 진행될수록 안쪽의 플래시량 보다 바깥쪽 플래시량이 약간 더 증가하게 됨으로 거의 동시에 양쪽 리브부분의 다이가 채워지게 된다. Fig.10(c)와 Fig.11(d)에서 최종단계의 수치해석과 실험의 유동형상을 비교해 보면, 격자 변형의 양상이 유사하게 나타나고 있으며, 안쪽의 리브부분 보다 바깥쪽 리브부분에서 격자 변화가 조금 심한 것은 바깥쪽으로의 유동 속도가 안쪽보다 상대적으로 빨라 바깥쪽 플래시부의 구속력에 의해 상대적으로 많은 뒤틀림이 발생한 것으로 판단된다.

Fig.12는 Fig.6에 있는 Billet3을 대상으로 한 다이 진행에 따른 단조하중의 변화를 나타낸 것인데 수치해석 값이 전반적으로 조금 높은 편이나 그 경향이 실험 값과 잘 일치하고 있다. 수치해석 결과가 조금 높은 것은 상계요소해석에서 이론적인 속도장과 실제유동에 차이가 있고 불완전한 윤활 등이 그 원인으로 지적될 수 있다.

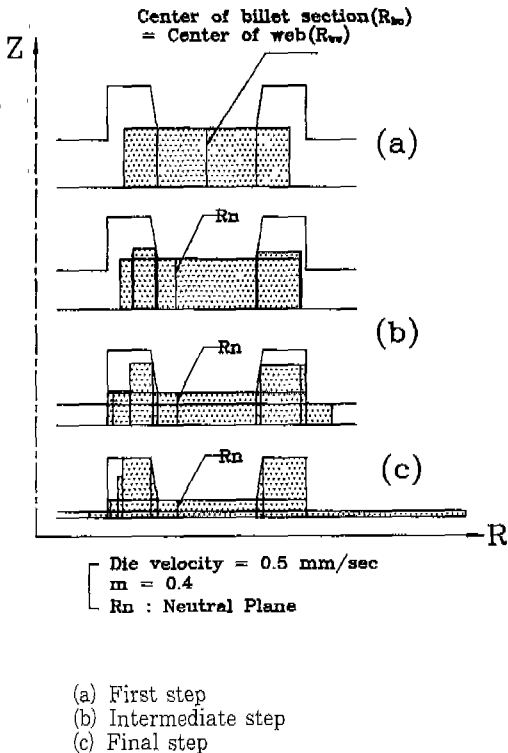
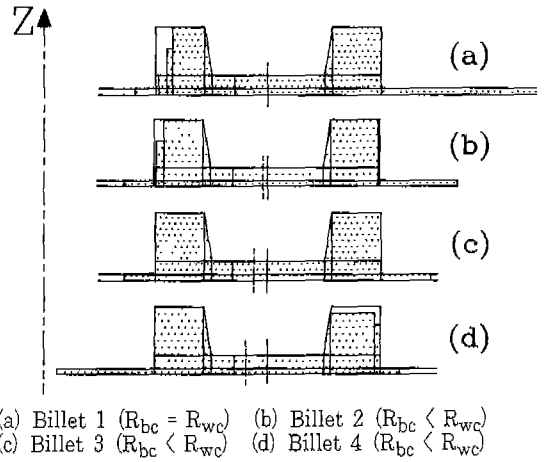
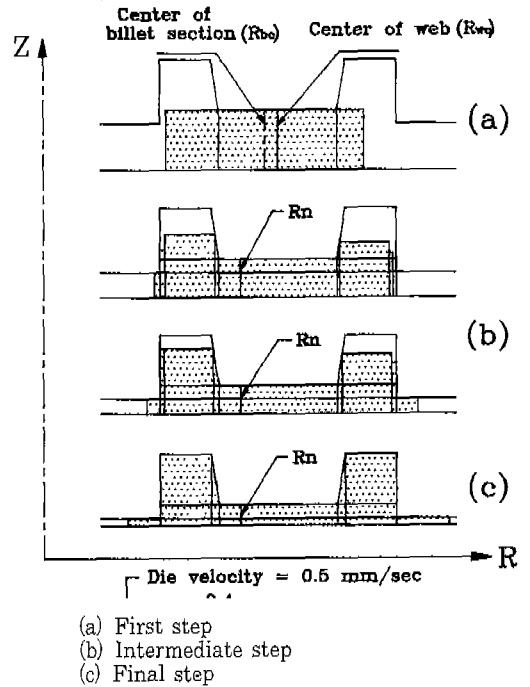


Fig.7 Die-cavity filling process for Billet 1 ($R_{bc} = R_{wc}$)



(a) Billet 1 ($R_{bc} = R_{wc}$) (b) Billet 2 ($R_{bc} < R_{wc}$)
(c) Billet 3 ($R_{bc} < R_{wc}$) (d) Billet 4 ($R_{bc} < R_{wc}$)
Fig.8 Die-cavity filling of final step for various initial billets ($m = 0.4$)



(a) First step
(b) Intermediate step
(c) Final step
Fig.9 Die-cavity filling process for Billet 3 ($R_{bc} < R_{wc}$)

4.2 마찰정수와 중립면 변화

Fig.13은 리브-웹형 링 단조에서 초기소재의 한쪽 단면의 중심을 웹의 중심보다 안쪽으로 이동시킨 초기소재(Fig.6의 Billet3)로 마찰정수에 따른 중립면의 변화를 나타내고 있다. 여기서 마찰정수가 0.01에서

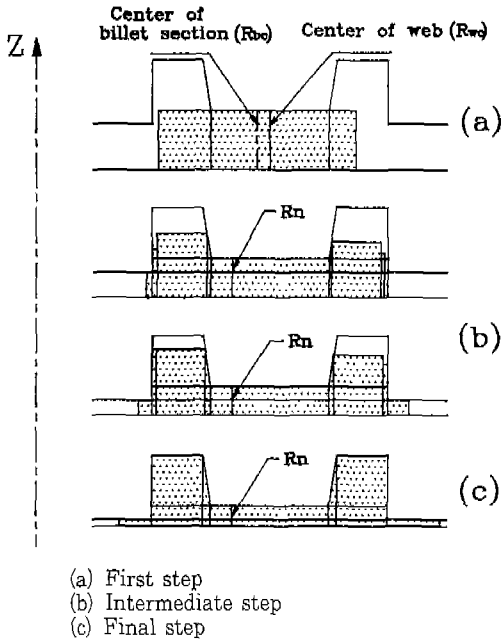


Fig.10 Grid distortion patterns for Billet 3 ($R_{bc} < R_{wc}$)

0.5로 점진적으로 증가함에 따라 소재의 높이감소를 0% 부근에서의 중립면은 45mm에서 52mm 부근으로 점점 증가하고 있다. 이것은 마찰정수가 증가할수록 안쪽보다 바깥쪽 유동이 더 제약을 받아 중립면이 바깥쪽으로 이동하는 것으로 생각된다. 또한 마찰정수에 관계없이 높이감소율이 증가하면 중립면이 점진적으로 바깥쪽으로 이동하고 있으며, 이와같은 경향은 大賀橋¹⁵⁾의 링 압셋에서의 마찰정수에 따른 중립면의 변화에서도 유사한 경향을 보이고 있다. 그리고 마찰정수가 0.5일 때 높이감소를 50%에서 중립면이 초기시편의 한쪽 단면의 중심과 만나게 되고 그 이하의 마찰정수에서는 초기시편의 한쪽 단면의 중심보다 안쪽에 중립면이 존재함을 알 수 있다.

따라서 본 연구에서는 초기소재의 한쪽 단면의 위치와 마찰조건이 중립면의 변화에 크게 영향을 주고 있음을 확인할 수 있었다.

5. 결 론

상계요소법에 의하여 밀폐형 리브-웹브형 링 단조에서 초기소재 단면의 위치와 마찰정수에 따른 다이충만도와 중립면의 변화를 해석하고 실험을 통하여 비교 검

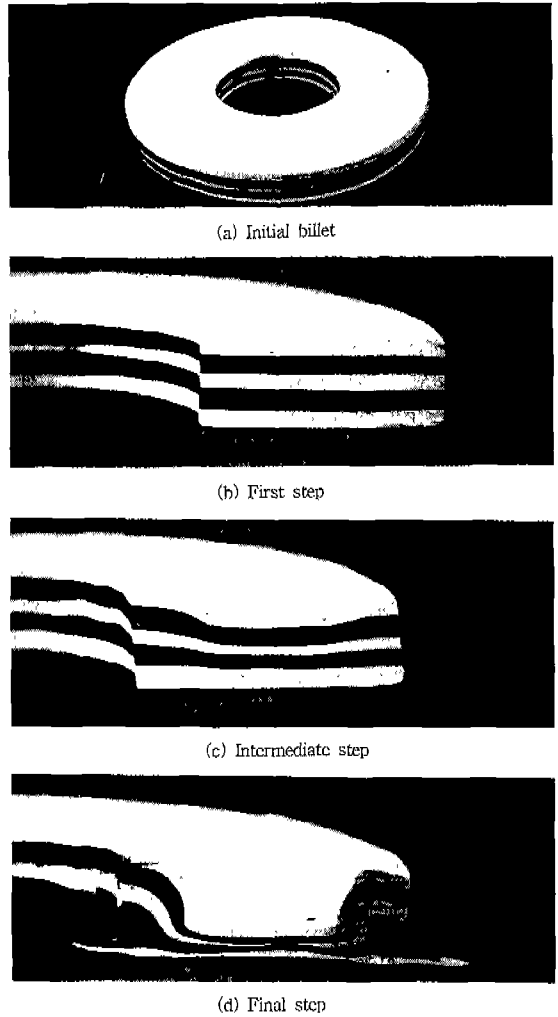


Fig.11 Experimental flow patterns of plasticine for Billet 3 ($R_{bc} < R_{wc}$)

토하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 상계요소법을 이용하여 중립면을 고려한 리브-웹브형 축대칭 링 단조의 수치해석 프로그램을 개발하였다.
- 2) 웨브의 중심과 초기소재의 한쪽 단면의 기하학적 중심을 일치시킨 것보다 초기소재의 한쪽 단면의 중심을 안쪽으로 이동시킨 것이 향상된 다이충만도를 보였고, 플래시부로 빠져 나가는 재료손실도 현저히 줄일 수 있었다.
- 3) 소재유동의 초기단계에서 마찰정수가 증가할수록

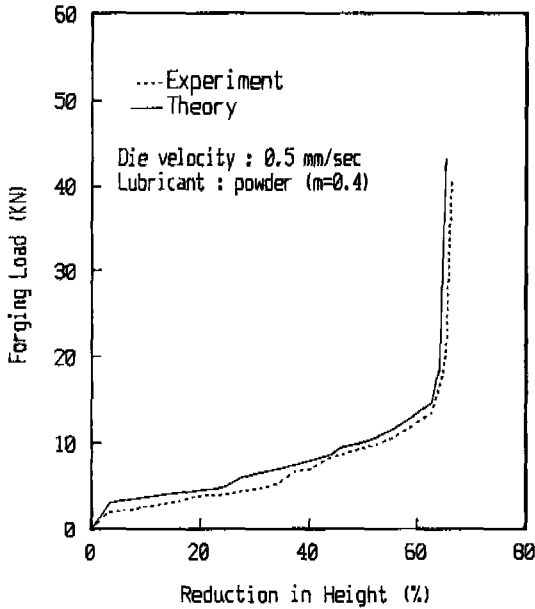


Fig. 12 Comparison between theoretical and experimental forging loads for rib-web shaped ring-forging (Billet3)

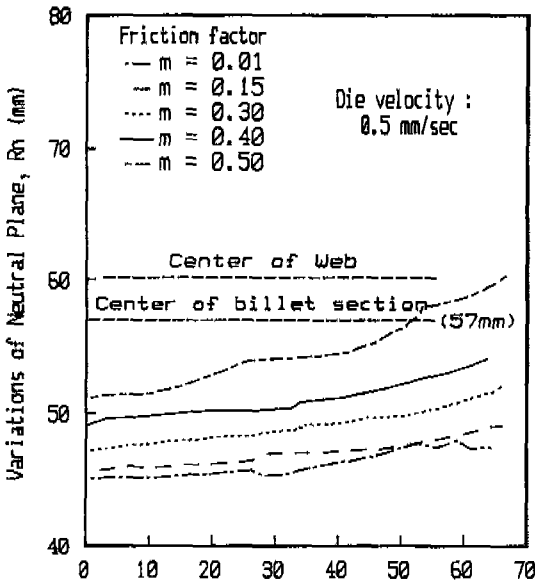


Fig. 13 Variations of neutral plane for various friction factors (Billet 3)

중립면은 더 바깥쪽에 존재하였고, 마찰정수와 관계없이 높이감소를 증가에 따라 중립면은 점진적으로 바깥쪽으로 이동하였다.

4) 소재의 유동양상과 플래시, 단조하중의 이론치는 실험치와 잘 일치하였다.

5) 초기소재의 단면의 위치와 마찰정수에 따른 중립면의 변화는 다이충만도와 플래시량 등에 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 1991년도 한국과학재단의 특정 목적기초 연구의 일부로 수행되었으며, 동 재단의 관계자분께 감사드립니다.

참고문헌

1. H. Kudo, "An Analysis of Plastic Compressive Deformation of Lamella between Rough Plates by Energy Method", Proceedings of the 5th Japan National Congress for Applied Mechanics, pp. 75~78, 1955
2. H. Kudo, "Some Analytical and Experimental Studies of Axi-Symmetric Cold Forging and Extrusion, Part I", Int. J. of Mech. Sci., Vol. 2, pp. 102~127, 1960
3. B. Avitzur, "Forging of Hollow Discs", Israel Journal of Technology, Vol.2, pp.295~304, 1964
4. C. H. Lee and T. Altan, "Influence of Flow Stress and Friction upon Metal Flow in Upset Forging of Rings and Cylinders", J. Eng. Ind. Trans. ASME, pp.775~782, 1972
5. V. Nagpal, G. D. Lahoti and T. Altan, "A Numerical Method for Simultaneous Prediction of Metal Flow and Temperatures in Upset Forging of Rings", J. Eng. Ind., Trans. ASME, Vol. 100, pp. 413~420, 1978
6. B. Avizur and C. J. Van Tyne, "Ring

- Forming : An Upper Bound Approach. Part 1 : Flow Pattern and Calculation of Power", J. Eng. Ind., Trans. ASME, Vol 104, pp. 231~237, 1982
7. B. Avitzur and C. J. Van Tyne, "Ring Forming : An Upper Bound Approach. Part 2 : Process Analysis and Characteristics", J. Eng. Ind., Trans. ASME, Vol. 104, pp. 238~247, 1982
 8. B. Avitzur and C. J. Van Tyne, "Ring Forming : An Upper Bound Approach. Part 3 : constrained Forging and Deep Drawing Applications", J. Eng. Ind., Trans. ASME, Vol 104, pp. 248~252, 1982
 9. H. Keife, "A New Technique for Determination of Preforms in Closed Die Forging of Axi-Symmetric Products", Int. J. Mach. Tool Des. Res., Vol.25, pp. 473~477, 1985
 10. M. Kiuchi and S. Shigeta, "Application of Upper Bound Elemental Technique (UBET) to Axisymmetric Forging Process", J. of JSTP, Vol. 22, No. 251, pp. 1208~1214, 1981
 11. M. Kiuchi and A. Katrato, "Application of UBET to Non-Axisymmetric Forging", Advanced Technology of Plasticity, Vol. I, pp. 967~972, 1984
 12. D. M. Himmelblau, "Applied Nonlinear Programming", 4th NAMRC Conf., pp. 80~86, 1976
 13. A. S. Cramphorn, R. P. McDermott A. N. Bramley, "UBET Related Developments in Forging Analysis", 4th NAMRC Conf., pp. 80~86, 1976
 14. 이종현, 김영호, 배원병, 이원희, "고온 연강 유동 특성을 상사하는 모델재료 개발에 관한 연구", 대한기계학회논문집, 제17권, 제5호, pp. 1161~1171, 1993.
 15. 大賀喬一, "上界接近法による鍛造加工問題の解析" 鑄鍛造と熱處理, その1, pp. 33~41 1988