

<논문> SAE NO. 943745

구속된 다물체 시스템을 위한 기하학적 운동구속론

A Geometric Kinematic Analysis of Constrained Multibody System

김재용,* 배대성,** 한창수,** 이상호,***
J. Y. Kim, D. S. Bae, C. S. Han, S. H. Lee,

ABSTRACT

Basic constraint equations derived from orthogonality conditions between a pair of body-fixed vectors and a body-fixed vector or a vector between two bodies are reformulated by using relative coordinate kinematics between two adjacent reference frames. Arithmetic numbers of operations required to compute derivatives of the constraint equations are drastically reduced. A mixed formulation of relative and cartesian coordinates is developed to further simplify derivatives of the constraints. Advantages and disadvantages of the new formulation are discussed. Possible singularity problem of parallelism constraints is resolved by introducing an extra generalized coordinate. Kinematic analysis of a McPherson strut suspension system are carried out to illustrate use and efficiency of the new formulation.

주요기술용어 : Constraint Equation(구속조건식), Orthogonality Condition(수직조건), Kinematic Analysis(기구해석), Relative Coordinate(상대좌표)

1. 서론

강체의 운동을 표시하는 방법은 크게 2가지로 구분된다. 첫번째는 직교 좌표를 사용하는 것이며, 이를 채택하는 상용 해석 프로그램으로는 DADS, ADAMS, OMEGA^(3,6,7) 등이 있다. 이 방법은 기구학적 운동 조건식이 각 조인트마다 형성된다. 구속조건식은 각 조인트의 특성에 따라 직교성 혹은 평행성에 의해 결정된다.

두번째는 상대 좌표를 사용하는 것이며, 각

조인트의 자유도에 따라 일반 좌표를 설정함으로써 조인트 구속조건식을 생성하지 않는 방법이다.⁽⁴⁾ 따라서, 개회로 시스템(open loop system)의 경우 운동 구속조건식을 갖지 않으며 각 조인트에 대한 기구학적 관계식은 상대 좌표로만 표시가 가능하다. 그러나, 폐회로 시스템(closed loop system)의 경우에는 각 조인트의 자유도에 따라 정의된 일반 좌표들은 폐쇄 회로 내부에서 서로 관계식을 맺으며, 이 관계식을 유도하는 방법중의 하나는 조인트를 절단(cut-joint)하는

* 국방과학연구소
** 한양대 정밀기계공학과
*** 한양대 정밀기계공학과 대학원

것이다. 절단된 조인트에 대한 구속방정식은 먼저, 직교 좌표로 표시되고 상대 좌표와 직교 좌표의 변환 행렬(transformation matrix)을 곱하여 상대좌표계로 전환된다.

본 연구의 목적은 현재, 컴퓨터 기술의 발전에 힘입어 활발히 연구되고 있는 구속된 다물체 시스템의 기구학 해석을 위하여 조인트의 기하학적인 조건을 이용하여 보다 효율적인 운동 구속방정식을 구하는 것이다. 이것은 현가장치, 조향장치 등 자동차의 주행 역학적 해석 및 동적인 시스템의 설계에 있어서 필수적인 요소라 할 수 있다. 이 구속방정식은 직교 좌표계(Cartesian coordinate)를 이용하는 해석법에 직접 응용될 수 있으며, 상대 좌표계(relative coordinate)를 사용하는 경우는 절단 조인트의 구속방정식 형성에 응용될 수 있다.

2. 강체 운동론

2.1 한개 강체의 기구학

절대 좌표계(global reference frame)는 물체 운동의 기준이 되는 영원 불변의 좌표계로 정의되며, Fig.1에서는 X-Y-Z로 표시된다. 그리고

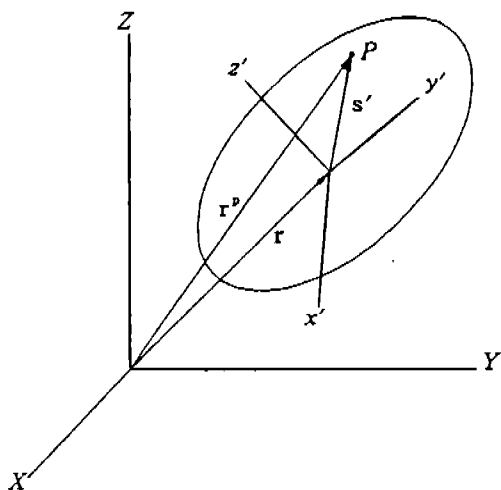


Fig.1 Two reference frames and a point fixed in x'-y'-z' frame.

강체위에 고정된 x'-y'-z' 좌표계는 강체 부착 기준 좌표계(body-fixed reference frame)라고 한다. 강체위의 임의의 점은 이 좌표계로부터 일정한 위치 벡터 r과 x'-y'-z' 좌표계가 X-Y-Z 좌표계에 대해서 상대적으로 회전한 회전 변환행렬(rotation transformation matrix), A로서 정의된다.

절대 좌표계에서 표시된 벡터 s는 강체 좌표계에서 표시한 s'과 다음과 같은 관계가 있다.

$$s = As' \tag{1}$$

주어진 시스템을 묘사할 수 있는 좌표계를 일반 좌표(generalized coordinates), q라 정의하고 다음과 같이 표현한다.

$$q = [q^T_1, q^T_2, \dots, q^T_{nbd}]^T \tag{2}$$

여기서, nbd는 강체의 총 갯수이다.

본 연구에서의 일반 좌표를 다음과 같이 정의한다.

$$q = [r, p]^T \tag{3}$$

여기서, r은 병진 좌표, p는 회전 좌표를 나타내는 오일러 매개변수(Euler parameters)이다. 오일러 매개변수는 다음의 4개의 변수로 구성된 자세에 관한 일반 좌표이다.

$$p = [e_0, e^T]^T = [e_0, e_1, e_2, e_3]^T \tag{4}$$

3차원 공간에서 하나의 강체는 오직 3개의 회전 자유도만을 갖게되므로 오일러 매개변수 서로간에는 독립적이지 않다. 따라서, 다음의 오일러 매개변수 구속방정식(Euler parameters normalization constraint equation)을 만족해야 한다.

$$P^T P = e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \tag{5}$$

그리고 위치 해석에서 쓰이는 가상 변위(virtual displacement)는 다음과 같이 정의한다.

$$\delta\Pi = \begin{bmatrix} \delta r \\ \delta\pi' \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서, δr 은 병진 가상 변위, $\delta\pi'$ 은 회전에 대한 가상 변위이다.

그리고, 속도와 가속도 해석에서 쓰이는 일반 속도(generalized velocity), v 와 일반 가속도(generalized acceleration), \ddot{v} 은 다음과 같이 정의된다.

$$v = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\omega}' \end{bmatrix}$$

$$\ddot{v} = \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\omega}' \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.2 기구학적 구속 조건

3차원 공간상에서 연결된 두 강체 사이에는 6개의 상대 자유도를 가지는데, 3개의 상대 병진과 3개의 상대 회전 자유도로 되어있다. 이 6개의 자유도는 조인트에 종류에 따라 연결된 2개의 강체는(6-구속조건식 수)만큼의 상대 자유도가 생긴다.

인접한 두 개 강체의 상대 위치와 자세에 관한 기구학적 구속조건은 두 강체위에 고정된 임의의 벡터들 사이의 직교성(orthogonality)과 평행성(parallelism) 조건들에 의하여 표시되어 있다.

강체의 운동은 크게 위치, 속도 그리고 가속도 해석이 수행되며, 이 해석에는 기구학적 구속조건식, 자코비안 행렬, 속도 구속조건식, 가속도 구속조건식들이 필요하므로 아래의 절에서 이것들을 기술한다.

2.2.1 조인트 기준 좌표계

Fig.2는 공간상에서 임의의 강체 i 의 위치와 자세를 나타내는 강체 부착 $x_i'-y_i'-z_i'$ 좌표계에서 원점이 P_i 인 $x_i''-y_i''-z_i''$ 조인트 기준 좌표계(joint definition frame)를 표시하였다. 또한, 조인트 기준 좌표계의 x_i'' 축위의 임의의 점을 Q_i 라 하고, y_i'' 축 위의 임의의 점을 R_i 라고 정의한다. 조인트 좌표계의 자세를 나타내기 위하여 P_i 점에서 연결한 벡터, $\overline{P_iQ_i}$ 와 $\overline{P_iR_i}$ 의 단위 벡터를 f_i, g_i 라 각각 정의하고 이 두 벡터들에 직교하는 벡터를 h_i 라 정의한다.

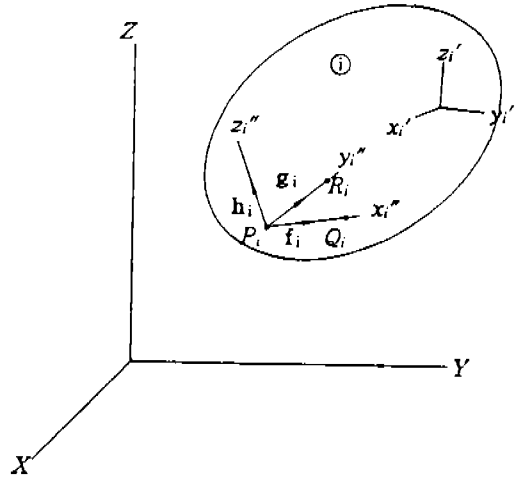


Fig.2 Joint definition frame.

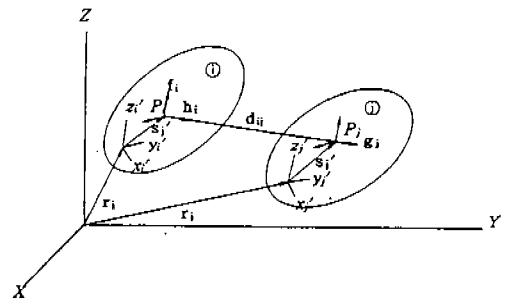


Fig.3 Vectors fixed in and between bodies.

2.2.2 Dot 10 구속조건

Dot 10 구속조건은 Fig.3에서와 같이 두 개 강체위의 고정된 임의의 벡터, f_i 와 g_j 이 서로 수직한 경우에 생기는 구속조건이다. 수직의 구속조건은 두 벡터의 스칼라 곱이 영이면 만족된다.

$$\Phi^{d10}(f_i, g_j) = f_i \cdot g_j = f_i^T A_i^T A_j g_j = 0 \quad (8)$$

여기서, $f_i = A_i f_i'$, $g_j = A_j g_j'$ 이다. 그리고 f_i', g_j' 은 강체에 부착된 일정 벡터이고 A_i, A_j 는 회전 변환행렬이다.

Dot 10 구속조건은 두 강체 사이의 한개의 상대 회전을 구속한다. 강체의 운동 방정식을 구하기

위해선 구속조건식의 변분(variation)형태가 필요하다. (8)의 변분을 취하면 자코비안을 구할 수 있다. 먼저 dot 10의 변분은,

$$\begin{aligned} \delta\Phi^{10}(f_i, g_j) &= g_j^T \delta f_i + f_i^T \delta g_j \\ &= -g_j^T A_i^T A_i \tilde{f}_i \delta\pi_i' - f_i^T A_j \tilde{g}_j \delta\pi_j' \end{aligned} \quad (9)$$

이다. 여기서, $\tilde{f}_i = A_i \tilde{f}_i A_i^T$, $\tilde{g}_j = A_j \tilde{g}_j A_j^T$ 이다. 따라서, 자코비안은 다음과 같다.

$$\Phi_{\pi}^{10} = [0, -g_j^T A_i^T A_i \tilde{f}_i, 0, -f_i^T A_j \tilde{g}_j A_j^T] \quad (10)$$

속도와 가속도 구속방정식은 식 (8)을 시간에 대해 1차, 2차 미분하여 얻는다.

$$\dot{\Phi}^{10} = -g_j^T A_i^T A_i \tilde{f}_i \dot{\omega}_i' - f_i^T A_j \tilde{g}_j \dot{\omega}_j' \quad (11)$$

$$\ddot{\Phi}^{10} = -f_i^T A_j \tilde{g}_j \dot{\omega}_j' - \dot{g}_j^T A_i^T A_i \tilde{f}_i \dot{\omega}_i' - \gamma^{10} \quad (12)$$

여기서, $\gamma^{10} = -\dot{g}_j^T [A_j^T A_i \tilde{\omega}_i' + \tilde{\omega}_j' \dot{\omega}_j' A_j^T A_i] f_i' + 2\dot{\omega}_j^T A_j^T A_i \tilde{f}_i \dot{\omega}_i'$

또한, $\delta A_j = A_j \delta\pi_j'$, $\delta A_i = A_i \delta\pi_i'$, $\dot{A}_j = A_j \dot{\omega}_j'$, $A_i = A_i \dot{\omega}_i'$ 이 사용되어졌다.⁽⁹⁾

2.2.3 Dot 11 구속조건

어떤 조인트-예를들면, 회전 조인트-에서는 두개의 dot 10 구속조건이 동시에 존재하는 경우가 있다. 이때에 앞의 식 (10)~(12)는 Fig4에서와 같은 기하학적 형상을 이용하여 간략화될 수 있다. 구속조건을 다음과 같이 표시한다.

$$\Phi^{11} = \begin{bmatrix} g_i^T h_j \\ f_i^T h_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_i^T (A_i^T A_j) h_j' \\ f_i^T (A_i^T A_j) h_j' \end{bmatrix} = 0 \quad (13)$$

여기서, $g_i = A_i g_i'$, $h_j = A_j h_j'$ 이 사용되었다.

식 (13)은 두 강체의 회전축이 일치하는 구속조건을 국부 좌표계로 나타낸 2개의 스칼라 식

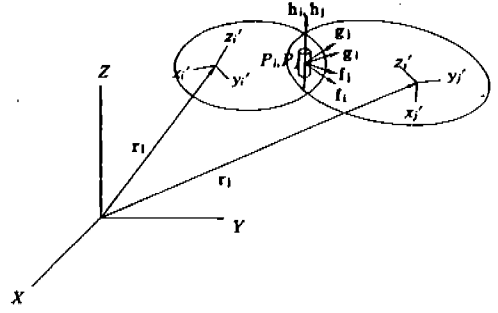


Fig.4 Two parallel vectors h_i and h_j .

이다. 자코비안을 구하기 위해 식 (13)의 변분을 취하여 기하학적 조건을 대입하면 다음의 식으로 된다.

$$\Phi_{\pi}^{11} = \begin{bmatrix} 0, f_i^T, 0, -f_i^T (A_i^T A_j) \\ 0, -g_i^T, 0, g_i^T (A_i^T A_j) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Dot 10 구속조건에서와 마찬가지로 식 (13)의 시간 미분을 취하여 속도 및 가속도 구속방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\dot{\Phi}^{11} = \begin{bmatrix} f_i^T \dot{\omega}_i' - f_i^T (A_i^T A_j) \dot{\omega}_j' \\ -g_i^T \dot{\omega}_i' + g_i^T (A_i^T A_j) \dot{\omega}_j' \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\ddot{\Phi}^{11} = \begin{bmatrix} -f_i^T \dot{\omega}_i' - f_i^T A_i^T A_j \dot{\omega}_j' - (\dot{\omega}_i' f_i)^T A_i^T A_j \dot{\omega}_j' \\ -g_i^T \dot{\omega}_i' - g_i^T A_i^T A_j \dot{\omega}_j' - (\dot{\omega}_i' g_i)^T A_i^T A_j \dot{\omega}_j' \end{bmatrix} \quad (16)$$

식 (14)~(16)에서 볼 수 있듯이 2개의 dot 10 구속조건에 상응하는 dot 11 구속조건은 식 (10)~(12)와 비교해 볼 때 계산상으로 상당히 간략화됨을 관찰할 수 있다. 자세한 비교는 Table 1에 정리하였다.

2.2.4 Dot 12 구속조건

Dot 12는 구속조건은 dot 10 구속조건에 또 다른 특별한 경우이다. Dot 12 구속조건은 dot 10 구속조건이 동시에 3개가 존재하는 구속조건으로 정의하며 이때 두 강체 사이의 상대 회전은 허용하지 않는다.(병진 조인트, Fig5) 따라서, 다음과 같은 3개의 스칼라 식으로 표시할 수 있다.

$$\Phi = \begin{bmatrix} g_i^T h_j \\ h_i^T f_j \\ f_i^T g_j \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

여기서, 3×3 nonsingular 단위 직교행렬(orthonormal matrix), B_i 를 정의한다.

$$B_i = [f_i, g_i, h_i] \quad (18)$$

여기서, 각 열(row)은 조인트 기준 좌표계의 단위 벡터이다.

B_i 는 단위 직교행렬이므로 $B_i^T B_i = I$ 이 성립한다.

정리 1.¹⁾
임의의 nonsingular 행렬 B_i 에 대하여 $B_i \Phi = 0$ 이 성립할 필요 충분조건은 $\Phi = 0$ 이다.

정리 1에 의하여 식 (17)이 일반성을 잃지 않고 dot 12 구속조건식이 성립하게 되는 필요 충분 조건을 다음과 같이 표현한다.

$$\Phi^{dot 12} = [B_i] \begin{bmatrix} g_i^T h_j \\ h_i^T f_j \\ f_i^T g_j \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

식 (19)의 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\delta \Phi^{dot 12} = [B_i] \begin{bmatrix} h_i^T \delta g_j + g_i^T \delta h_j \\ f_i^T \delta h_j + h_i^T \delta f_j \\ g_i^T \delta f_j + f_i^T \delta g_j \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} [B_i] \begin{bmatrix} g_i^T h_j \\ h_i^T f_j \\ f_i^T g_j \end{bmatrix} \quad (20)$$

이 식의 오른쪽 식의 두번째 항은 영이므로 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} \delta \Phi^{dot 12} &= [f_i, g_i, h_i] \begin{bmatrix} f_i^T (\delta \pi_i - \delta \pi_j) \\ g_i^T (\delta \pi_i - \delta \pi_j) \\ h_i^T (\delta \pi_i - \delta \pi_j) \end{bmatrix} \\ &= \delta \pi_i' - (A_i^T A_j) \delta \pi_j' \end{aligned} \quad (21)$$

이다. 여기에서 $\frac{d}{dt}(A_i^T A_j) = 0$ 이 사용되었다.

강체 i 와 j 는 서로 상대 회전을 할 수 없기 때문에 $A_i^T A_j$ 는 항상 일정하다. 따라서, $A_i^T A_j$ 는 동적 거동 해석시 초기에 한번만 계산하여 끝까지 쓸 수 있다. 식 (19)의 자코비안, 속도 및 가속도 구속조건식을 구하여 앞의 dot 10, 11 구속조건식과 Table 1에서 비교하였다.

2.2.5 Dot 20 구속조건

Fig.3에서 i 강체에 부착된 임의의 벡터를 f_i , 그리고 강체 i 위의 점 P_i 와 강체 j 위의 점 P_j 간의

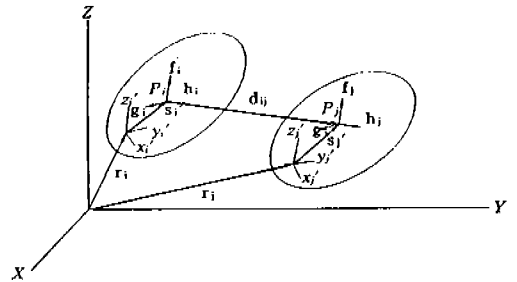


Fig.5 No relative rotational joint.

Table 1 The comparison of dot 10, 11 and 12 basic constraints

| | Dot 10 constraint | Dot 11 constraint | Dot 12 constraint |
|-------------------|---|---|-------------------------------------|
| Jacobian | $0, -g_i^T A_j^T A_j \tilde{f}_i, 0, -f_i^T A_j^T A_j \tilde{g}_j'$ | $0, f_i^T, 0, -f_i^T (A_i^T A_j)$ $0, -g_i^T, 0, g_i^T (A_i^T A_j)$ | $0, I, 0, -A_i^T A_j$ |
| Velocity equation | $-g_i^T A_j^T A_j \tilde{f}_i, \omega_i, -f_i^T A_j^T A_j \tilde{g}_j' \omega_j$ | $f_i^T \omega_i - f_i^T (A_i^T A_j) \omega_j$ $-g_i^T \omega_i + g_i^T (A_i^T A_j) \omega_j$ | $\omega_i - (A_i^T A_j) \omega_j$ |
| Accel. equation | $-f_i^T A_j^T A_j \tilde{g}_j' \omega_j - g_i^T A_j^T A_j \tilde{f}_i' \omega_i - \gamma$ | $f_i^T \omega_i' - f_i^T A_j^T A_j \omega_j' - (\omega_j^T)^T A_i^T A_j \omega_j'$ $-g_i^T \omega_i' + g_i^T A_j^T A_j \omega_j' - (\omega_j^T)^T A_i^T A_j \omega_j'$ | $\omega_i' - (A_i^T A_j) \omega_j'$ |

여기서, $\gamma^{20} = -g_j^T [A_j^T A_i \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_i^T + \tilde{\omega}_j^T \tilde{\omega}_j^T A_i^T A_i] \tilde{f}_i + 2 \tilde{\omega}_j^T A_j^T A_i \tilde{f}_i \tilde{\omega}_i^T$

벡터 d_{ij} 가 서로 수직인 구속조건으로 정의한다. 따라서, 두 벡터의 스칼라 곱은 영이 된다.

$$\begin{aligned} \Phi^{20} &= f_i^T d_{ij} = f_i^T (r_j + A_j s_j^p - r_i - A_i s_i^p) \\ &= f_i^T A_i^T (r_j + A_j s_j^p - r_i) - f_i^T s_i^p = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

여기서, $d_{ij} = r_j + A_j s_j^p - r_i - A_i s_i^p$ 이다.

그리고, dot 20 구속조건식의 변분을 구하여 자코비안, 속도 및 가속도 구속조건식이 Table 2에 나타나 있다.

2.2.6 Dot 21 구속조건

Dot 21 구속조건은 dot 20 구속조건을 2개 사용하는 경우이다. Fig.3에서 상대 회전이 없는 두 강체 사이에 상대 병진 운동이 일어나는 특수한 경우를 dot 21 구속조건으로 정의한다. 이 구속

벡터를 d_{ij} 라고 표시하였다. Dot 20 구속조건은 한 강체에 고정된 임의의 벡터 f_i 와 두 강체 사이의 조건은 점 P_i 에 원점을 둔 조인트 기준 좌표계상의 단위벡터, f_i 와 g_i 는 병진 운동이 일어나는 축(d_{ij})과 직교하게 된다. 따라서, 이 조건은 f_i , g_i 와 d_{ij} 벡터의 스칼라 곱이 영이면 된다.

$$\begin{aligned} \Phi^{21} &= \begin{bmatrix} f_i^T d_{ij} \\ g_i^T d_{ij} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (r_j - r_i)^T A_i f_i + f_i^T A_i^T A_j s_j^p - f_i^T s_i^p \\ (r_j - r_i)^T A_i g_i + g_i^T A_i^T A_j s_j^p - g_i^T s_i^p \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)에서 상대회전이 없으므로 $A_i^T A_j$ 는 일정하며, 이의 시간에 대한 미분항은 상수가 된다. 변분 형태를 취하여 자코비안, 속도 가속도 구속조건식을 구하여 Table 2에서 dot 20 구속조건과 비교하였다. Dot 20 구속조건에 비해 상당히 간단한 형태로 유도됨을 알 수 있다.

Table 2 The comparison of dot 20, 21 basic constraints

| | Dot 20 Constraint | Dot 21 Constraint |
|-------------------|--|--|
| Jacobian | $-f_i^T A_i^T, f_i^T \tilde{s}_i^p - d_{ij}^T A_i \tilde{f}_i, f_i^T A_i^T, -f_i^T A_i^T A_j \tilde{s}_j^p$ | $-f_i^T A_i^T, -(r_j - r_i)^T A_i \tilde{f}_i, f_i^T, f_i^T A_i^T, 0$ $-g_i^T A_i^T, -(r_j - r_i)^T A_i \tilde{g}_i, g_i^T A_i^T, 0$ |
| Velocity Equation | $f_i^T A_i^T \tilde{r}_j - f_i^T A_i^T \tilde{r}_i - f_i^T A_i^T A_j \tilde{s}_j^p \tilde{\omega}_j^T + (f_i^T \tilde{s}_i^p - d_{ij}^T A_i \tilde{f}_i) \tilde{\omega}_i^T$ | $(r_j - r_i)^T A_i \tilde{f}_i - (r_j - r_i)^T A_i \tilde{f}_i \tilde{\omega}_i^T$ $(r_j - r_i)^T A_i \tilde{g}_i - (r_j - r_i)^T A_i \tilde{g}_i \tilde{\omega}_i^T$ |
| Accel. Equation | $f_i^T A_i^T \tilde{r}_j - f_i^T A_i^T \tilde{r}_i - f_i^T A_i^T A_j \tilde{s}_j^p \tilde{\omega}_j^T + (f_i^T \tilde{s}_i^p - d_{ij}^T A_i \tilde{f}_i) \tilde{\omega}_i^T + \gamma^{20}$ | $(\tilde{r}_j - \tilde{r}_i)^T A_i \tilde{f}_i - (r_j - r_i)^T A_i \tilde{f}_i \tilde{\omega}_i^T + \gamma^{21}$ |

여기서, $\gamma^{20} = 2\tilde{\omega}_j^T A_j^T (\tilde{r}_i - \tilde{r}_j) + 2s_j^{pT} \tilde{\omega}_j^T A_j^T A_i \tilde{\omega}_i^T$

$$-s_j^{pT} \tilde{\omega}_j^T \tilde{\omega}_i^T \tilde{f}_i - s_j^{pT} \tilde{\omega}_j^T \tilde{\omega}_i^T A_i^T A_i f_i d_{ij}^T A_i$$

$$\gamma^{21} = 2(\tilde{r}_j - \tilde{r}_i)^T A_i \tilde{f}_i \tilde{\omega}_i^T + (r_j - r_i)^T A_i \tilde{\omega}_i^T$$

$$\tilde{f}_i \tilde{\omega}_i^T$$

2.2.7 Spherical 구속조건

Spherical 구속조건은 Fig.6에서 강체 i 위의 점 P_i 와 강체 j 위의 점 P_j 가 일치하는 경우에 생기는 구속조건이다.

$$\Phi^s(P_i, P_j) = r_j + A_j s_j^p - r_i - A_i s_i^p = 0 \quad (24)$$

여기서, s_i^p, s_j^p 은 각 강체의 기준 좌표계에서 조인트 기준 좌표계까지의 벡터이다.

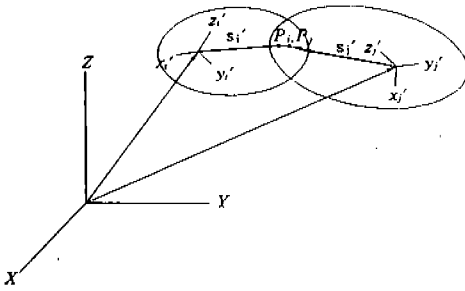


Fig.6 Spherical constraint.

식 (24)은 3개 스칼라 식을 나타내는데 이는 두 개 강체의 3개의 상대 병진 좌표를 구속한다. 따라서, 이 구속조건을 갖는 두 개 강체의 운동은 전체 6개의 상대 자유도 가운데 3개의 상대 회전만을 가지게 된다.

2.2.8 기본 구속조건식의 비교

2.2.2~2.2.7까지 연결된 두 강체의 기본적인 구속조건식을 유도하였다. Table.3에서 각 구속조건식의 자코비안과 속도, 가속도 구속조건식에

Table 3 Number of arithmetic operations for Jacobian, Φ , $\dot{\Phi}$

| Constraint function | Φ_i | $\Phi_{m'}$ | Φ_r | $\Phi_{m'}$ | No.of opn. for Φ_{Π} | No.of opn. for Φ | No.of opn. for $\dot{\Phi}$ |
|---------------------|----------------|--|---------------|---------------------------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------------|
| Φ^{d10} | 0 | $-g_i^T A_j^T A_i \tilde{r}_i'$ | 0 | $-f_i^T A_j^T A_i \tilde{g}_j'$ | 150 | -159 | 277 |
| Φ^{d11} | 0 | f_i^T | 0 | $-f_k^T (A_i^T A_j)$ | 48 | 57 | 137 |
| Φ^{d12} | 0 | I | 0 | $C_{ij} = -A_i^T A_j$ | 0 | 5 | 5 |
| Φ^{d20} | $-f_i^T A_i^T$ | $f_i^T \tilde{s}_i' - d_{ij}^T A_i \tilde{r}_i'$ | $f_i^T A_i^T$ | $-f_i^T A_i^T A_j \tilde{s}_j'$ | 144 | 167 | 398 |
| Φ^{d21} | $-f_i^T A_i^T$ | $-(r_j - r_i)^T A_i \tilde{r}_i'$ | $f_i^T A_i^T$ | 0 | 36 | 66 | 18 |

대한 총 연산수를 나타내었는데 Φ^{d10} 보다 Φ^{d11} , Φ^{d12} 이 총 연산수에서 많은 양이 감소됨을 알 수 있다. Φ^{d12} 의 연산수가 영인 이유는 $C_{ij} = A_i^T A_j$ 이 일정하기 때문이며, Φ^{d20} 보다 Φ^{d21} , Φ^{d22} 역시 총 연산수에서 많이 감소됨을 알 수 있다. 여기서 총 연산수만 행렬식의 연산에서 곱과 합을 각각 나타낸다.

따라서, 본 연구에서는 조인트 기구학 해석시 연산이 많이 필요한 Φ^{d10} , Φ^{d20} 과 함께 Φ^{d11} , Φ^{d12} , Φ^{d21} 을 공식화하여 프로그램 시뮬레이션에 적용하였다. 또한 기본 구속조건식들이 기존의 방법과 비교하여 간단한 수식이므로 round-off error면에서 효율적이라 생각된다.

2.3 조인트

2.3.1 구면 조인트(Spherical joint)

구면 조인트는 강체 i 위의 점 P_i 와 강체 j 위의 점 P_j 가 일치하는 조건으로 정의함으로써 간단히 나타낼 수 있다.

$$\Phi^s(P_i, P_j) = 0 \tag{25}$$

이 식은 점 P_i 와 P_j 가 일치하므로 상대 위치 좌표만을 구속하므로 3개의 상대 회전 자유도만이 남게 된다.

2.3.2 회전 조인트(Revolute joint)

회전 조인트는 두 강체의 공통축으로 상대 회전을 허용하고 이 회전축으로의 상대 병진을 허용하지 않는 조인트로 정의한다. Fig.4에서 강체 i와 j의 조인트 중심점을 P_i 와 P_j 그리고 공통 회전축은 h_i, h_j 로 표시한다. 따라서, 회전 조인트는 P_i 와 P_j 가 일치하는 구면 구속조건과 회전축에 대한 상대 회전을 허용하는 dot 11 구속조건으로 해석적으로 나타낼 수 있다.

$$\Phi^{rr} = \begin{bmatrix} \Phi^s(P_i, P_j) \\ \Phi^{d11} \end{bmatrix} = 0 \tag{26}$$

식 (26)은 5개의 스칼라 구속조건식을 나타내며, 두 강체는 상대 회전만을 하므로 오직 하나의 상대 자유도만을 갖는다.

2.3.3 병진 조인트(Translational joint)

병진 조인트는 두 강체의 공통축으로 상대 병진만을 허용하고 이 축으로는 상대 회전을 허용

하지 않는 조인트로 정의한다. 따라서, 병진 조인트의 구속 조건식은 병진축으로는 상대 회전을 허용하지 않는 dot 12 구속조건식과 두 강체사이에 병진축으로만의 상대 병진 운동을 나타내는 dot 21 구속조건식으로 쓸 수 있다.

$$\Phi^{bmn} = \begin{bmatrix} \Phi^{d12} \\ \Phi^{d21} \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

식 (27)은 5개의 스칼라 구속조건식을 나타내 주므로 병진 조인트는 하나의 상대 병진 자유도를 갖는다.

3. 위치, 속도, 가속도 해석

3차원 시스템의 기구 해석을 수행하기 위해서는 먼저, 시스템의 초기 조건을 정의한다. 주어진 초기 조건에 따라 일반 좌표에 대한 위치 해석을 한다. 구해진 위치 일반 좌표로 속도 해석을 하여 속도 좌표를 구한다. 다음으로 각 강체의 가속도 좌표를 가속도 해석에서 계산하게 된다. 정해진 종료 시간까지 주어진 시간 간격만큼 진행하게 된다. 다음은 각 해석 단계를 모듈별로 설명한 것이다.

3.1 위치 해석

위치 해석을 위한 구속조건식은 2.1과 2.2에서 유도한 기하학적 구속조건과 구동 구속조건(dri-ving constraints)으로 이루어져 있다. 따라서, 시스템의 위치와 자세를 규정하는 혼합된 구속조건은 다음과 같이 표시된다.

$$\Phi(q, t) = \begin{bmatrix} \Phi^d(q) \\ \Phi^p(q, t) \end{bmatrix} = 0 \quad (28)$$

식 (28)은 비선형 연립 방정식이므로 Newton-Raphson 법으로 해를 구할 수 있다. Newton-Raphson 법에 따라 식 (28)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi_n \Delta\pi = -\Phi(q, t)$$

$$q_{i+1} = q_i + \Delta q \quad (29)$$

여기서, 회전에 대한 변분좌표는 $\Delta p = \frac{1}{2} G^* \Delta\pi$ 의 관계식으로 $\Delta\pi$ 를 Δq 로 변환하게 된다. 식 (29)에서 개선된 해를 가지고 수렴할 때까지 반복적으로 계산을 한다.

3.2 속도 해석

위치 해석을 수행한 후, 각 강체의 속도 좌표를 계산한다. 먼저, 기하학적 구속조건과 구동 구속조건을 시간 미분을 취하여, 속도 방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\dot{\Phi}(q, t) = \Phi_n v + \Phi_t = 0 \quad (30)$$

식 (30)은 선형 방정식이지만 수치적인 효율성을 얻기위해 LU 분해법을 사용하지 않고 일정 계수행렬(Φ_n)를 갖는 quasi-Newton 법으로 해를 얻는다. 식 (30)을 Newton-Raphson 법으로 공식화하면 다음과 같다.

$$\Phi_n \cdot \Delta v = \Phi_{II} \Delta v = -\dot{\Phi}$$

$$v_{i+1} = v_i + \Delta v \quad (31)$$

여기서, $\dot{\Phi}_n = \frac{\partial \Phi / \partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \pi} \Phi_n$ 이다.

3.3 가속도 해석

위치와 속도가 결정되면, 가속도 해석으로 각 강체의 가속도를 계산한다. 식 (30)를 시간 미분을 취하여 가속도 방정식을 구한다.

$$\ddot{\Phi} = \Phi_{III} \dot{v} - \gamma = 0 \quad (32)$$

위치, 속도 해석과 마찬가지로, Newton-Raphson 법으로 공식화하여 반복해를 구한다.

$$\Phi_{III} \Delta \dot{v} = -\ddot{\Phi}$$

$$\dot{v}_{i+1} = \dot{v}_i + \Delta \dot{v} \quad (32)$$

4. 시뮬레이션

맥퍼슨식 현가장치(McPherson strut suspension)

본 절에서는 앞서 고찰한 기본적인 기구학적 구속조건식을 사용하여 전산화 한 것을 현재 상용차의 전륜 현가장치(front suspension)로 널리 보급된 맥퍼슨식 현가장치를 기구학적 해석(kinematic analysis)을 위해 모델링하였다. 맥퍼슨식 현가장치의 전체적인 구성도가 Fig.7에 나타나 있다. 이것은 크게 Chassis, Lower control arm, Knuckle, Strut, Rack등 5개의 강체로 구성되어 있다.

본 모델은 차체와 랙을 고정시키고 랙과 너클의 연결부분인 tie rod는 거리 구속조건(distance constraint)으로 간략화하였다. 차체와 Lower control arm은 회전조인트로 연결되고, L.C.A과 너클은 구면조인트, 너클과 Strut는 병진조인트, Strut와 차체는 구면조인트로 연결되어 있다. 해석의 초기조건으로 각 강체에 대한 초기위치와 자세를 Table.4와 같이 설정하였으며, Table.5에서처럼 1 자유도의 모델로 정의된다. 자세는 오일러 매개 변수로써 정의하였다.

해석 결과는 본 프로그램과 상용 동역학 해석 패키지인 DADS와 비교하여 검증하였다. 먼저,

Table 4 Position & orientation estimates(e_1, e_2, e_3 =Euler parameters)

| BODY | x(m) | y(m) | z(m) | e_1 | e_2 | e_3 |
|-------------------|-------|-------|--------|-------|---------|-------|
| Chassis | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Lower control arm | 1.17 | 0.353 | 0.005 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| Knuckle | 0.975 | 0.715 | 0.101 | 0.0 | -0.0265 | 0.0 |
| strut | 1.0 | 0.55 | 0.6 | 0.0 | -0.0265 | 0.0 |
| Rack | 1.14 | 0.0 | 0.1455 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Table 5 1 D.O.F of McPherson strut suspension model

| | |
|---|------------|
| Bodies | |
| Five bodies | ngc=5×7=35 |
| Constraints | |
| Revolute Joint : | 5 |
| Spherical Joint : | 3 |
| Spherical Joint : | 3 |
| Translational Joint : | 5 |
| Distance Constraint : | 1 |
| Ground Constraint : Chassis | 6 |
| Ground Constraint : Rack | 6 |
| Euler parameter normalization constraints : | 5 |
| nh=34 | |
| D.O.F=35-34=1 | |

where, ngc=Number of generalized coordinates
ncn=Number of constraint equations

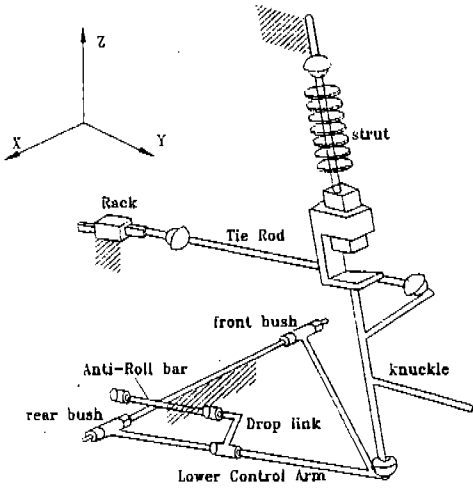


Fig.7 McPherson strut suspension schematic

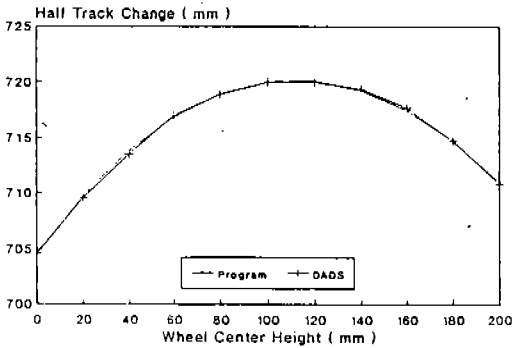


Fig.8 Half track change

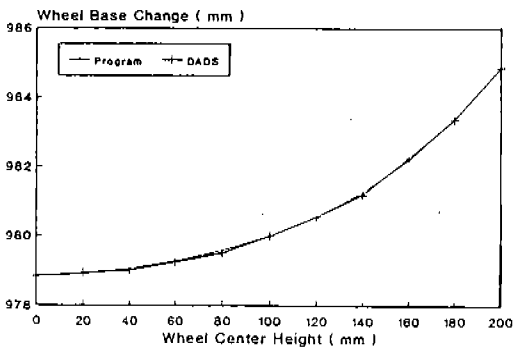


Fig.9 Wheel base change

Knuckle의 wheel center를 거리 구속 구속조건(simple z driving constraint)을 부여하여 rebound에서 jounce까지 구동시킨다. Fig.8, 9에서 해석결과를 나타내었다. Fig.8에서는 wheel center의 현가장치의 수직방향 변위로 인한 반 차륜거리(half wheel track) 즉, 좌우 양 차바퀴의 타이어 중심간의 반거리의 변화를 나타내었다. Fig.9에서는 wheel center의 현가장치의 수직방향 변위로 인한 반축거리(half wheel base) 즉, 차축중심간의 반수평거리의 변화를 나타내었다. 그림에서 보는 바와 같이 해석 종류시간까지 두 결과는 잘 일치하며 이를 통해 본 프로그램의 타당성을 알 수 있었다.

5. 결 론

본 연구에서의 연구 결과로는, 먼저 조인트로 연결된 두 강체의 운동학적 구속조건을 조인트의 기하학적 형상을 이용하여 구속조건식을 간단히 유도함으로써 기존의 방법보다 더 효율적이고 정확하게 공식화하였다. 그리고 본 논문에서 유도한 기구학적 운동 구속조건을 일반적인 목적의 프로그램(general purpose program)으로 코딩하여 맥퍼슨식 현가장치에 적용하여 기구학 해석 패키지인 DADS와 시뮬레이션 비교함으로써 검증하였다. 또한, 구속조건식의 round-off 에러면에서 더 효율적임을 알 수 있었다.

그리고 상대좌표 공식화(relative coordinate formulation)를 통하여 본 연구에서 유도한 운동 구속조건을 적용함으로써 시뮬레이션 시간을 훨씬 단축시킬 수 있을 것이다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소의 기초 연구비 지원에 의해 수행중인 연구의 일부이며 이에 감사의 뜻을 표합니다.과제번호(ADD-90-5-009)

참 고 문 헌

1. G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*,

- 2nd Edition, Academic Press, New York, 1980.
2. K.E. Atkinson, *An Introduction to Numerical Analysis*, Wiley, New York, Wiley, New York, 1988.
 3. E.J. Haug, *Computer Aided Kinematics and Dynamics, Vol. I : Basic Methods*, Allyn and Bacon, Boston, 1989.
 4. D.S. Bae and E.J. Haug, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics : Part I , II, III," *Mechanics of Structures and Mechines*, 1987-1988.
 5. DADS User's manual, CADSI, P.O.Box 203, Oakdale, Iowa, 52319.
 6. Orlandea, N., Chace, M.A. and Calahan, D.A., "A sparsity-Oriented Approach to the Dynamic Analysis and Design of Mechanical Systems Part I , II," *Journal of Engineering for Industry*, Vol.99, pp.773-784, 1977.
 7. Nikavesh, P.E., *Computer-Aided Analysis of Mechanical System*, Prentice-Hall, Inc., 1988.