

베인 선단부의 탄성유체윤활

정석훈* · 정재연**

*전북대학교 대학원 정밀기계공학과

**전북대학교 공과대학 정밀기계공학과

Elastohydrodynamic Lubrication on the Vane Tip of Vane Pump

Seok-Hoon Jung* and Jae-Youn Jung**

*Department of Precision Mechanical Engineering, Graduate School, Chonbuk National University

**Department of Precision Mechanical Engineering, Chonbuk National University

Abstract—The regimes of elastohydrodynamic lubrication at the points where line contacts occur between the vane tip and camring in an oil hydraulic vane pump is studied. A study of the contact conditions in vane pump provided most of the early interest in the possibility of fluid film lubrication in highly loaded contacts. The variation of viscosity with pressure and the elastic deformation associated with the high pressures generated in the contact region are the major causes of the complexity attributed to lubrication behavior. Therefore a numerical solutions to the problem of elastohydrodynamic lubrication of line contact are obtained by using a finite-difference formulation.

1. 서 론

유압 베인펌프는 캠링, 로터, 베인에 의하여 둘러싸인 체적이 로터의 회전과 함께 변화하면서 펌핑작용을 한다. 즉 체적이 증가하는 동안은 유압이 저압으로 되어 흡입구에서 작동유를 흡입하고 베인이 전환점을 지나면 체적이 감소하여 작동유는 고압으로 된다.

이 때 베인은 관성력과 점성력 그리고 작동유의 압력에 의한 힘으로 베인 선단이 캠링의 내면에 밀착되어 회전 하도록 되어있다. 또한 이부분에서는 유막이 형성되어 있는데, 베인배압부에 작용하는 압력이 낮으면 베인에 의해서 시일되어 있는 고압의 펌프 토출부의 작동유가 저압 흡입부분으로 흘러 들어가기 때문에 용적효율이 저하될 것이다. 반면 베인 배압부에 작용하는 압력이 높으면 용적효율은 증가하나 베인선단과 캠링 내면간에서 마찰이 일어나 기계효율이 저하한다.

특히 흡입영역의 베인에 작용하는 반경 방향의 작용력은 역학적으로 가장 큰 불평형을 이루기 때문에 베인을 캠링 내면에 강하게 밀어 붙여 마모가 크게 된다. 이러한 문제들을 해결하기 위해서는 고하중이

예상되는 베인 선단부에서의 탄성변형을 고려한 윤활 상태를 규명하지 않으면 안된다.

한편 윤활제의 점성-압력 특성에 대해서 고압 물리학자인 Barus[1]가 1893년에, 액체의 점도는 압력이 증대됨에 따라 증가한다고 발표하였다. 그후 윤활에 있어서 탄성 변형량을 계산하여 유막 두께를 평가하기 시작한 것은 Peppler(1938), Ertel (1939), Meldahl(1941) 등이었으며, 이의 결과 강체로 가정했던 Martin의 해석결과는 유막 계산에 있어 과소평 가 되었다는 사실이 밝혀졌다. 그러나 이경우 역시 유막두께가 표면 거칠기 정도보다 적게되어 아직 충분한 밀반침이 될 수 없었다. 이후 근사이론이진하였으나 Reynolds의 고전 윤활이론에 탄성변형과 점도-압력관계를 동시에 고려한 해석에 최초로 성공한 것은 Grubin[2]의 논문(1949)이었다. 이 경우 Martin이 해석한 유막 두께보다도 약 50~100배 정도가 큰 것이었으며 이로써 집중하중을 받는 점선접촉 하에서의 유체윤활이 가능하다는 것을 이론적으로 뒷받침하게 되었다. 한편 Petrusevich[3] (1951)는 탄성변형과 압력에 의한 점도변화를 고려한 수치해석에서 발생압력중 Hertz 영역 끝부분에 압력 스파이크가 발생하는 것을 처음으로 발표하였으며, We-

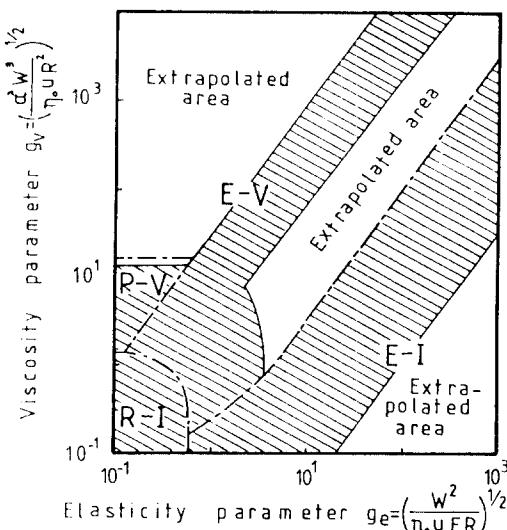


Fig. 1. A map of the regimes of elastohydrodynamic lubrication.

ber와 Saalfeld[4] (1954)가 해석적으로 해를 얻었는데 탄성변형이 극히 작은 경우에 한정되었다. 이후 Dowson과 Higginson[5] (1959)은 Reynolds방정식에 점성·압력 관계식과 탄성변형식을 연립시키고 Hertz의 압력분포를 초기치로 주어 유익형상을 결정하는 방법을 이용하여 계산상 수렴성을 확보하는데 성공했다. 이것들은 Crook[6] (1958)이 정전용량법을 이용하여 실험적으로 측정한 값과 거의 일치함을 보여졌다. 이후 접접촉 및 선접촉 등에 대한 EHL계산을 Archard, Cowking, Cheng 등이 계속하여 많은 보고를 해왔다. 그러나 Fig. 1[14]에서 보인 바와 같이 빛금친 부분의 일부 한정된 영역에 대하여 수치해가 얻어졌으며 아직도 EHL의 많은 영역이 외삼, 내삼에 의하여 추정되고 있는 실정이다. 본 연구에서 다루고자 하는 유압베인 펌프의 베인 선단에서 윤활영역의 탄성 파라메터값이 적고 접성 파라메터값이 비교적 큰 soft EHL 영역에 있어(Fig. 2[13]) 아직 계산이 거의 이루어지지 않고 있는 탄성유체윤활 영역이라고 할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 이영역의 윤활 특성을 해석하는데 있어서 비선형성이 강한 EHL의 고압력 영역에서 수렴성이 좋은 Newton-Raphson Method를 통한 수치해를 구하였다. 아울러 종전의 연구들은 단순히 포괄적인 윤활의 개념적인 면에서의 윤활상태의 규명이 이루어진데 반하여 본 연구에서는 구체적인 적

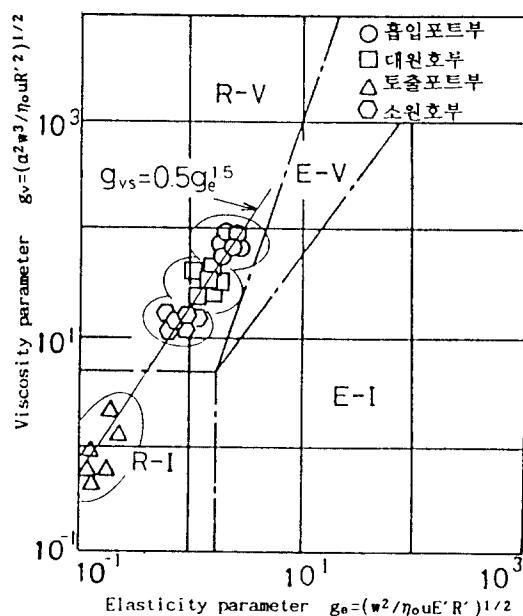


Fig. 2. A map of the regimes of EHL of the vane pump.

용으로써 유압베인 펌프의 베인선단과 캠링간의 윤활 조건을 대상으로 수치적인 해석의 적용을 시도한 것이라 하겠다. 그리하여 베인펌프의 베인선단부의 윤활 상태가 정확히 규명됨에 따라 펌프의 설계에 있어서 고효율화의 실현을 위한 초석이 될 수 있을 것으로 사료된다.

2. 지배방정식

Fig. 3은 본 연구에서 해석 대상으로 한 유압 베인 펌프의 로터 회전중 베인실의 위치관계를 보여주고 있는데, 토출포트, 흡입포트가 각각 두군데 쪽으로 1회전당 2회의 펌핑작용을 하게 되는 압력평형형 베인펌프임을 보여준다. 그림에서 A구간은 흡입포트부로서 베인 전 후실의 압력과 베인 저면의 압력이 거의 대기압 상태와 같은 흡입압력이고, 당시 토출압이 걸리는 인트라베인실의 압력만이 베인이 캠링쪽으로 밀어붙이는 힘으로 작용한다. B구간은 베인실의 대원호부로서 베인의 후방실과 저면부의 압력이 흡입 압력이므로 인트라베인실과 베인 전방실의 압력이 서로 상반된 방향으로 작용한다. C구간은 토출포트부로서 베인 저면부와 인트라베인실의 압력이 캠링 쪽으로, 베인 전방실과 후방실 압력이 로터중심쪽으로 각각 작용하게 된다. D구간은 베인실의 소원호부로서

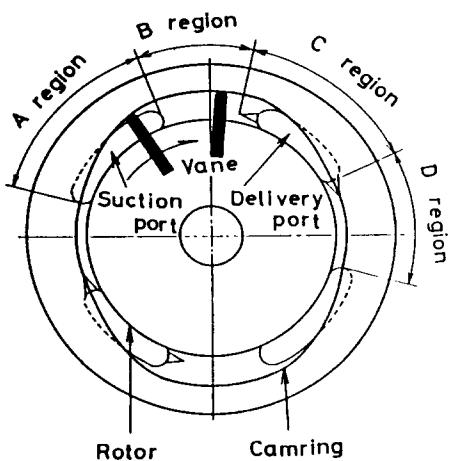


Fig. 3. Position of pressure chamber.

베인 전방실의 압력만이 흡입압력이며 나머지 3개소의 압력이 베인의 수직방향의 작용력으로 관계된다. 이러한 작용력 거동을 볼때 캠링에 대한 베인의 수직작용력이 가장 크게 작용되는 구간은 흡입포트부가 될 것임을 추정할 수 있다. 해석 대상인 펌프의 제원은 회전로터의 반경이 48 mm이고, 캠링의 동경으로써, 소원호반경 49 mm로부터 대원호반경 52.5 mm까지 변화하는 2차곡선으로 되어 있으며 펌프 1회전당의 배출용적은 97.6 cm^3 이다. 베인의 경우 폭 46.4 mm, 두께 3.9 mm, 높이 22.6 mm, 선단의 회전반경은 1.2 mm이며 베인의 수는 10매였으며 자체 질량은 25g이다.

또한 해석을 위한 운전 조건으로는, 펌프의 토출 압력 1~14 MPa, 회전속도 800~2000 rpm으로 하였으며, 작동유의 점도값은 각각 20 cSt, 30 cSt, 40 cSt로 하였다. 그리하여 Fig. 4에서 보는 바와 같이 속도 U_1 을 가지고 있는 반무한체 캠곡선상을 원주 속도 U_2 , 반경 R 의 베인이 상대운동하는 것과 같은 2차원 흐름으로 생각할 수 있다. 따라서 10매의 베인중 1매의 베인이 캠링의 4개 구간에 걸쳐 상대운동을 할 때의 각 구간에서 변동하는 하중값에 대한 유막의 두께를 수치적으로 산출할 수가 있게 된다. 여기서 변동하는 하중조건을 주기 위해 앞에서 기술한 베인의 작용력 거동 관계에 따른 베인선단과 캠링간의 윤활막 압력과 캠링의 형상에 따른 베인의 관성력을 초기상태로부터 반복계산이 진행되어짐에 따라 베인의 각 위치에 따른 하중값이 산출되도록 한다. 해석에 있어서 전제로 하는 가정은 다음과 같다.

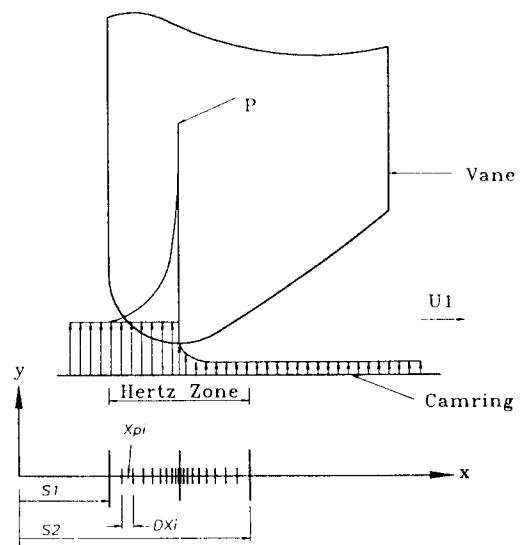


Fig. 4. The model of an EHL contact.

- (1) 탄성체의 접촉폭은 미소하므로 윤활유체의 원통 축방향으로의 흐름은 무시한다.
 - (2) 탄성체의 변형은 반무한체의 평면 조건으로 한다.
 - (3) 윤활유체는 비압축성이다.
 - (4) 윤활유체의 점성 및 탄성체에 대한 온도의 영향은 무시한다.
 - (5) 윤활유체의 점성은 압력의 지수 계수로써 표현된다.
- 윤활 유체중의 압력 P 에 관한 기초식으로써 Reynolds방정식은

$$h^3 \frac{dp}{dx} = 12 u \eta (h - h_m^3) \quad (1)$$

으로 나타낸다. 여기서 $u = (u_1 + u_2)/2$ 가 되는데, 이때 캠링은 고정되고 베인만이 로터와 함께 회전하게 되므로 원주속도 U_2 는 0이고 평균속도 u 는 베인의 원주속도의 1/2배가 되는 것이다. η 는 윤활유체의 점성계수, η_0 는 대기압상태에서의 점성계수, a 는 피에조 점성효과에 의한 압력-점도지수, h 는 윤활막 두께를 표시하며, h_m 은 적분상수이다. 점성계수 η 는 가정 (5)에 의해서

$$\eta = \eta_0 \exp(\alpha \cdot p) \quad (2)$$

로 표시되며, 이것은 베인선단과 캠링사이의 윤활막

압력이 증가함에 따른 점도의 변화를 고려한 식이다. 또한 윤활막 두께 h 및 탄성체의 변형량 v 는 다음식과 같이 표시할 수 있는데, 여기서 유막두께 h 는 베인 선단과 캠링간의 기하학적 형상과 더불어 선접촉 집 중하중시 탄성변형을 고려한 형태의 유막두께라 할 수 있다.

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2R} + v \quad (3)$$

$$v = -\frac{2}{\pi E} \int_{s_1}^{s_2} p(s) \ln(x-s)^2 ds + C_0 \quad (4)$$

여기서 h_0 는 $x=0$ 에서 윤활막 두께, C_0 는 적분상수, E 는 탄성계수, s_1 과 s_2 는 각각 유막압력이 발생하는 x 범위를 나타낸다. 식 (4)을 식 (3)식에 대입하면 식 (3)에는 $h_0 + C_0$ 라는 미지의 상수가 남게된다. 이 상수의 값을 결정하기 위하여 다른 부하력의 조건을 고려했다. 베인의 단위 길이당 부하력을 w 로 하면, w 는 다음식과 같다.

$$w = \int_{s_1}^{s_2} p(x) dx \quad (5)$$

미끄럼 속도 u 가 0이고 Wedge 효과가 없는 경우에는 베인과 캠링은 Hertz 접촉상태로 된다. Hertz 접촉 상태에 있어서 압력분포 p 및 접촉폭 b 는 각각 식 (6) 및 (7)로 나타낼 수 있다.

$$p = \frac{2w}{\pi b} [1 - (x/b)^2]^{1/2} \quad (6)$$

$$b = \left[\frac{8wR}{\pi E} \right]^{1/2} \quad (7)$$

다음에 식 (2)를 풀기 위해서는 경계조건이 필요하므로 다음과 같은 경계조건을 고려했다.

경계조건: $x=s_1$ 에서 $p=0$, $x=s_2$ 에서 $p=0$,
 $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

3. 수치해석

본 논문에서는 D.Dowson과 G.R. Higginson의 "Elastohydrodynamic Lubrication"에 따라 무차원 표시를 행했다. 변수 및 상태량을 각각

$$X = x/b, H = h/R, H_m = h_m/R \\ H_o = h_o/R, V = v/R, P = p/E' \quad (8)$$

로 무차원화 하고, 또 무차원 parameter

$$U = \frac{\eta_0 u}{E'R}, W = \frac{w}{E'R}, G = \alpha E' \quad (9)$$

(속도 parameter) (하중 parameter) (재료 parameter) 을 이용하였다.

계산 범위로 설정한 X방향 분할에 있어서는 Fig. 4의 하단에 보인 바와 같이 X방향을 윤활영역으로 할 때, 탄성변형이 예상되는 유출단을 촘촘히 하고 그밖의 영역에서는 성기계 하는 방식의 M개의 부등분 할을 행하고, 그 표준점의 좌표를 X_i ($i=1, 2, 3, \dots, M, M+1$)로 하였다. $X_1=X_{L1}$, $X_{M+1}=X_{L2}$ 로 할 때 X_{L2} 가 미지수이므로 $X_{L2} < X_{M+1}$ 로 되는 것과 같이 설정해 놓았다. x 변위의 증가폭을 DX_i 및 $XP_i = \frac{x_1 + x_{i+1}}{2}$ 로 할 때, Reynolds 방정식을 무차원화하여 XP_i 의 위치에서 차분화하고 정리하면

$$f_i(P_i) = H_{i+1/2}^3 (P_{i+1} - P_i) - DX_i \cdot C_3 \cdot \eta_{i+1/2} \\ (H_{i+1/2} - H_m) \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (10)$$

으로 된다. 여기서 첨자 $i+1/2$ 은 XP_i 의 위치에 있어서 상태량을 의미한다. 식 (10)에서 i 값의 최대치는 유출단 위치에 상당하므로 경계조건에 의해서 다르게 된다. 다음에 식 (3)~(5)을 무차원화하고 이산화하면 각각 다음과 같이 된다.

$$\eta_i = \exp(G \cdot P_i) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

$$H_i = H_0 + C_1 X_i^2 + V_i \quad (i=1, 2, \dots, M+1) \quad (12)$$

$$V_i = C_2 \sum_{j=1}^N P_{j+1/2} \cdot \ln(X_i - XP_j)^2 DX_j + C_0 \\ (i=1, 2, \dots, M+1) \quad (13)$$

$$C_5 = \sum_{j=1}^N P_{j+1/2} \cdot DX_j \quad (14)$$

여기서 C_5 는 베인의 단위길이당 부하력을 나타내며, 식 (13)을 식 (12)에 대입하면

$$H_i = H_0 + C_1 X_i^2 + C_2 \sum_{j=1}^N P_{j+1/2} \cdot \\ \ln(X_i - XP_j)^2 DX_j \quad (15)$$

로 된다. 여기서 $H_0 = H_o + C_o$ 이다. 경계조건을 이용하면

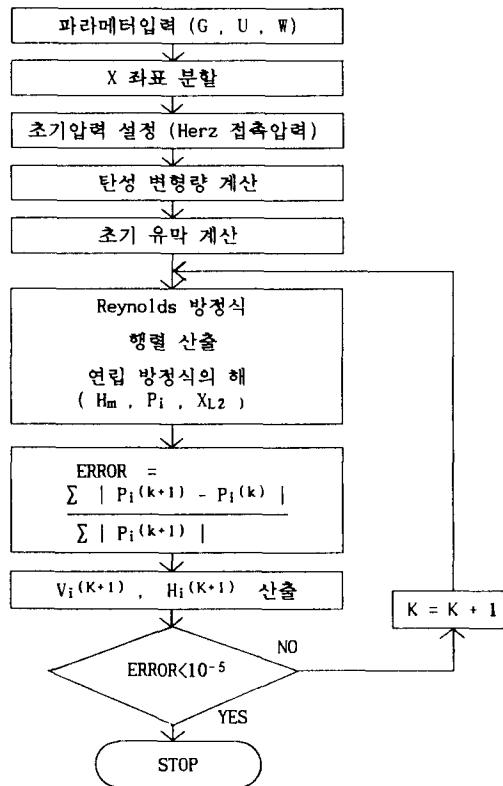


Fig. 5. Flow diagram.

$$H_m = H_{N+1/2} = H_{co} + C_1 X_{L2}^2 + C_2 \sum_{j=1}^N P_{j+1/2} \cdot \ln(X_{L2} - X P_j)^2 D X_j \quad (16)$$

가 얻어진다. 여기에서 H_{co} 을 구한식 (15)에 대입하면 H_i 는 미지수 H_m , P_2 , P_3, \dots , P_{N-1} 및 X_{L2} 의 계수로서 표시된다. 식 (17)은 식(11)과 Reynolds 방정식 (10)의 조건식이고, 한편 식 (14)의 미지수보다 1개 적은 부하력의 조건식이다.

$$H_i \left\{ H_m - C_1 X_{L2}^2 - C_2 \sum_{j=1}^N P_{j+1/2} \cdot \ln(X_{L2} - X P_j)^2 D X_j \right\} + C_1 X_i^2 + C_2 \sum_{j=1}^N P_{j+1/2} \cdot \ln(X_i - X P_j)^2 D X_j \quad (17)$$

EHL에 있어서 차분화한 Reynolds 방정식 (10)은 윤활막 두께 H 가 압력 P 의 1차계수이고, 또 점성 η 가 압력 P 의 지수계수로 되고 있으므로 비선형 대수 방정식이다. 특히 점성 η 의 지수에 넣고 있는 G 의 값이 일반적으로 크게 되므로 비선형성이 현저하다.

이와 같은 강한 비선형을 표시한 윤활기구의 수치해석에 최근 이용하는 것들은 Newton-Raphson 축차근사법이다. Newton-Raphson 축차근사법에 의하면 일반적으로 미지수 $P_i (i=1, 2, \dots, N)$ 을 가지는 비선형 대수방정식 $f_i(P_i) = 0$ 을 축차근사법에서 풀 경우, K번 째의 근사해를 $P_i^{(k)}$ 라 하면 K+1번째의 근사해 $P_i^{(k+1)}$ 은 다음식으로 고려된다.

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial P_j} \rightarrow P_i^{(k+1)} - P_i^{(k)} \sim + f_i = 0 \quad (18)$$

축차근사법에서 초기조건의 선정이 얼마나 잘 되었는가에 따라 수속성여부가 달려있다는 것은 일반적으로 잘 알려져 있다. 따라서 본 프로그램에서는 초기압력을 Hertz 접촉상태에 있는 것으로 간주하고 다음과 같은 Hertz 압력분포식으로 주었다.

$$P_i = C_4 / (1 - X_i^2)^{1/2} \quad (|X_i| \leq 1) \\ = 0 \quad (|X_i| > 1) \\ C_4 = (W/2\pi)^{1/2} \quad (19)$$

H_m 및 H_{co} 의 초기치는 Grubin의 이론식을 이용했으며, X_{L2} 의 초기치는 Hertz 접촉에 있어서 후단 즉 $X_{L2} = 1.1$ 으로 설정하였으며, 수속성의 판정은 K번째와 K+1번째의 압력분포의 차

$$\text{ERROR} = \frac{\sum_{i=1}^N |P_i^{(k+1)} - P_i^{(k)}|}{\sum_{i=1}^N |P_i^{(k+1)}|} \quad (20)$$

이 거의 0에 가까운 값이 되는 $\text{ERROR} < 10^{-5}$ 을 수속성의 판정조건으로 하였다. 이상 위에서 열거한 내용들을 프로그램화하기 위한 flow diagram을 Fig. 5에서 간략히 보여주고 있다.

4. 해석결과

Fig. 6 및 7은 $W = 3 \times 10^5$, $G = 2500$ 의 경우 압력 및 윤활막 두께분포를 보여주고 있다. Fig. 6에서 보면 속도 파라메터 U 가 작게 되면 D. Dowson의 문헌에 나타나 있는 것과 같은 압력파형이 나타나고 있으며, 특히 유출단 부근에서 EHL 접촉상태임을 나타내는 특유의 현저한 압력 피크가 보여지고 있다. 아울러 $U = 10^9$ 일 때의 압력파형은 유체윤활상태의 전형적인 형태를 보여주고 있다.

Fig. 7을 보면 속도 U 가 작게 되었을 때 마찬가지로

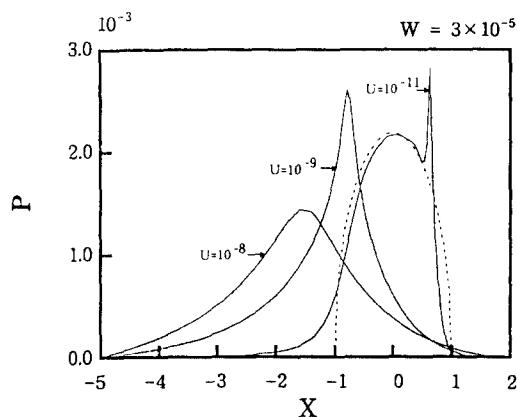


Fig. 6. Pressure distribution. (Influence of rotating speed)

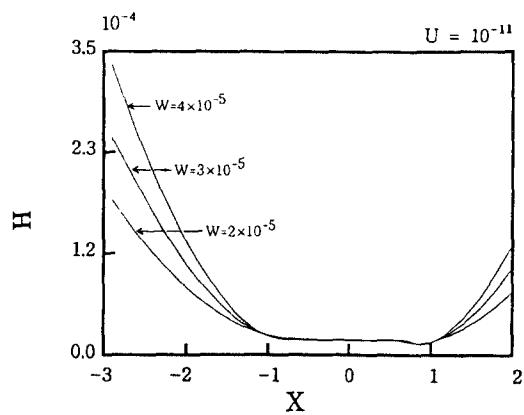


Fig. 9. The oil film thickness. (Influence of load)

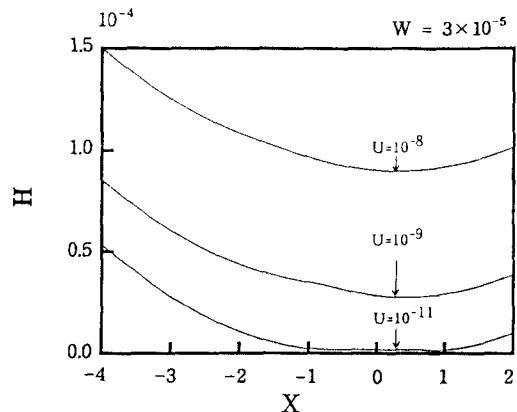


Fig. 7. The oil film thickness. (Influence of rotating speed)

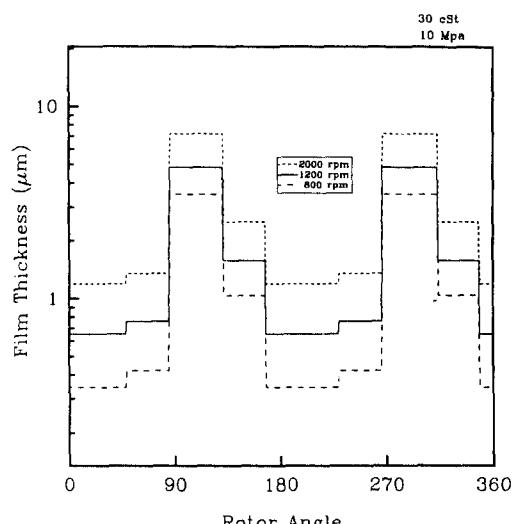


Fig. 10. Change of film thickness around the cycle. (Influence of rotating speed)

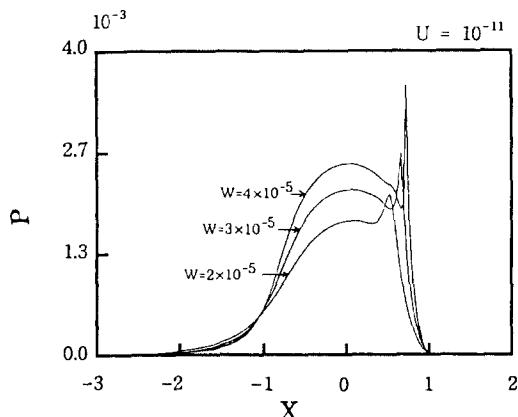


Fig. 8. Pressure distribution. (Influence of load)

유출단에서 EHL 특유의 힘몰 현상이 나타남을 알 수 있다. Fig. 6에서 알 수 있는 바와 같이 속도 U 가 적은값일 때 EHL 상태의 압력분포가 정확히 형성되고 있으며, 또한 Fig. 7에서는 U 가 빠름에 따라 윤활 막의 두께가 증가함을 알 수 있는데 이것은 속도가 어느 이상 빨라지면 유체윤활의 상태로 됨이 추정된다. Fig. 8은 하중 파라메터 W 가 증가함에 따라서 베인과 캠링 사이에 작용하는 압력변화는 점점 증가함을 보여주고 있으며, Fig. 9에서는 하중이 증가해도

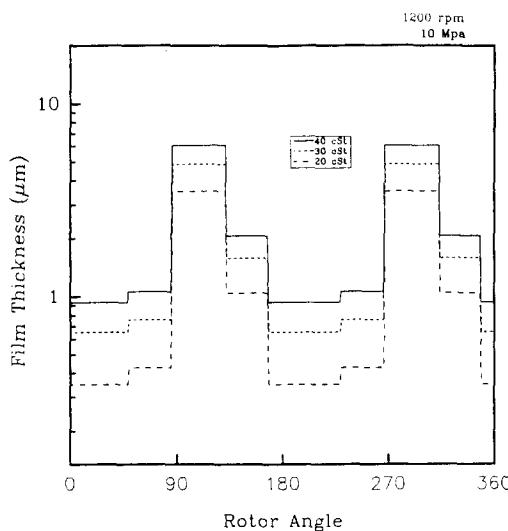


Fig. 11. Change of film thickness around the cycle. (Influence of viscosity)

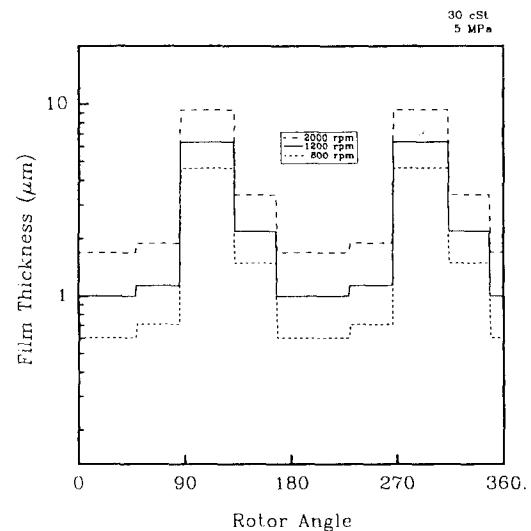


Fig. 12. Change of film thickness around the cycle. (Influence of rotating speed)

윤활막의 두께에는 변화가 거의 없음을 보여준다.

한편 펌프가 1회전을 하는 동안에 전구간에 걸친 유막의 두께를 구하기위해 위에서 기술한 방법을 각 구간별로 반복하여 실시한 결과 Fig. 10에서 로터와 함께 회전하는 베인이 1회전할 때의 로터의 회전각도에 따른 각 구간별 최소유막두께를 보여주고 있다. 여기에서 베인선단 꼭률반경은 1.2 mm로 설정하였으며, 운전조건으로는 토출압력을 10 Mpa, 점성계수를 30 cSt로 하여 각각 회전수 800 rpm, 1200 rpm, 2000 rpm일 때의 유막두께를 동시에 비교해 나타냈다.

그림에서 보면 흡입포트 구간의 경우 회전수가 800 rpm, 1200 rpm, 2000 rpm일 때 최소유막두께가 각각 0.34 μm, 0.65 μm, 1.19 μm를 나타내며, 대원호부에서는 각 회전수에 따라 각각 0.42 μm, 0.76 μm, 1.35 μm를 나타냈다.

한편 토출포트 구간에서는 각각 3.49 μm, 4.83 μm, 7.19 μm으로 다른 구간에 비하면 현저하게 그값이 크게 나타나고 있다.

또한 소원호부에서는 각각 1.04 μm, 1.57 μm, 2.51 μm를 보여준다.

Fig. 11은 토출압력 10 Mpa, 회전수 1200 rpm의 조건에서 점도를 각각 20 cSt, 30 cSt, 40 cSt로 변화시켰을 때의 유막두께를 보여주고 있는데, 점도가 증가함에 따라 유막에 있어서도 상당한 증가를 보이고 있어 집중하중을 받는 베인선단 접촉면에서의 압력에

의한 점도변화도 반드시 고려해야 함을 확인할 수 있었다.

Fig. 12는 토출압력 5 Mpa, 점성계수를 30 cSt로 운전할 때의 회전수 변화에 따른 유막두께를 보여주고 있는데, 토출압력이 10 Mpa의 경우보다 전체적으로 유막두께가 증가한 상태를 보여주고 있다.

이상의 내용으로 판단하여 볼 때 1회전 동안의 전 구간에서 충분한 윤활막 두께를 확보할 수 있음을 확인하였으며, 오히려 토출포트 구간에서 베인이 캠링으로부터 이탈되는 위험성을 갖고 있음을 지적할 수 있다.

5. 결 론

(1) 유압 베인펌프의 베인 선단에서의 윤활막 두께에 가장 크게 영향을 주는 인자가 로터의 회전속도임을 확인하였다.

(2) 베인에 작용하는 단위폭당 하중이 증가할수록 유막압력은 증가하지만 유막 두께에 미치는 영향은 극히 작음을 확인하였다.

(3) 유압 베인펌프에 있어 정격 운전조건(1200 rpm, 토출압력 10 MPa)에서 캠링과 베인 사이에 작용하는 유막의 압력이 유출단 부근에서 순간적으로 급격히 상승함을 보여 탄성유체윤활 영역에 있음을 확인하였다.

(4) 펌프정격 운전조건(1200 rpm, 토출압력 10 MPa)에서 베인선단과 캠링의 안내면 사이에 최소유막 두께가 0.34 μm 정도로 나타나 1회전중 윤활 조건이 가장 가혹한 흡입 구간에서도 윤활 공학적으로 신뢰성이 확보될 수 있는 조건임을 확인하였다.

참 고 문 헌

1. C. Barus, Amer. J. Sci., Vol. 45(3), 87 (1893).
2. A.N. Grubin, Cent. Sci. Res. Inst. For Tech. and Mech. Eng. (Moscow), (in Russian), Book on 30.
3. A.I. Petrushevich, Iz. Akad. Nauk. SSSR(OTN), Vol. 2, 209 (1951).
4. C. Weber & K. Saalfeld, Zeit. Anger. Math.& Mech., Vol. 34, 54-64 (1954).
5. D. Dowson & G.R. Higginson, J. Mech. Eng. Sci., Vol. 1, 6 (1959).
6. A.W. Crook, Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. A250 (1958).
7. D. Dowson & G.R. Higginson, Elasto-Hydrodynamic Lubrication, Pergamon (1966).
8. B.J. Hamrock & D. Dowson, Trans. ASME, F, 98, 4, 223 (1976).
9. Evans, H.P. & Snidle, R.W., Proc. R. Soc. Lond., Vol. A382 (1982).
10. Okamura, H., Proc. 9th Leeds-Lyon Sympo. on Tribology, p. 313 (1982).
11. T.F. Conry & C. Cusano, Trans. ASME, Vol. 109 (1987).
12. D.W. Glander & E.J. Bissett, ASME Journal of Tribology, Vol. 110 (1988).
13. 정재연, 박사학위 논문(동경공업대학).
14. 정재연, 양정구, 이봉구, 제 13회 한국윤활학회 강연 논문 초록집, 55 (1991).
15. 野西利次, 寺内喜男, 日本機械學會論文集(C編), 59卷, 559號 (1993).