

부정정 베어링-축계의 해석 및 볼베어링의 거동예측

김완두* · 한동철**

*한국기계연구원 기계구조그룹, **서울대학교 공과대학 기계설계학과

Analysis of Statically Indeterminate Bearing-Shaft System and Prediction of the Behavior of Ball Bearing

Wan-Doo Kim* and Dong-Chul Han**

*Structural Mechanics Lab, KIMM

**Department of Mech. & Production Engineering, SNU

Abstract—The analysis of statically indeterminate bearing-shaft system was investigated. The moment loads and misalignment angles which were induced in the ball bearings were determined, and the influence of span length of this system on the moment loads and fatigue lives was identified. The sliding and spinning speeds between balls and raceways which affected the performance of ball bearing evaluated. The equation to estimate the cage speed of ball bearing under moment loads was proposed. This equation had been verified by the test results of measuring of cage speed, which was useful to the prediction of ball bearing under moment loads.

1. 서 론

일반적으로 베어링-축계(bearing-shaft system)의 해석에서는 외력이 축의 직각방향으로 작용할 경우 축을 완전한 강체로 간주하여 베어링에 전달되는 하중을 반경방향 하중만으로 국한하여 해석한다. 그러나, 축이 중공축이거나 또는 베어링간의 거리(span length)가 커질 경우에는 축의 변형으로 인하여 베어링-축계의 특성에 큰 영향을 끼치는 모멘트 하중이 발생되게 되며, 베어링에 전달되는 각 반력성분을 구하기 위해서는 기하학적 조건을 고려해야 하는 부정정계(statically indeterminate system) 해석 문제가 된다[1].

모멘트 하중을 받는 볼 베어링의 접촉각은 각 볼 위치에서 각기 다르기 때문에 베어링이 회전할 때 볼은 구름운동, 스핀운동 및 미끄럼운동 등 복합적인 운동을 하게 되어 베어링 구성요소들 사이의 하중 분포와 상대운동이 변하게 되고 베어링의 운전상태 및 피로수명에 큰 영향을 끼치게 된다. 볼베어링의 피로파손은 베어링의 구성 요소인 내외륜, 볼, 케이지(또는 리테이너) 등의 거동에 따라 크게 영향을 받으므로 정확한 수명예측을 위해서는 베어링 내부 구

성요소들 사이의 상호작용이 규명되어야 한다. 볼베어링의 운동해석에 관한 대부분의 연구는 축방향 하중이 작용하거나 하중이 비교적 작으며 회전속도가 높은 경우에 대한 것들이다 [2-7]. 그러나 본 연구에서는 회전속도는 그다지 빠르지 않으나 하중이 매우 크며 모멘트 하중까지 포함된 복합하중 상태에서의 볼베어링에 대한 특성 파악에 관심을 가지고 있으므로 앞서 언급된 해석방법 및 결과를 이용하기에는 어려움이 따른다.

본 연구에서는 모멘트 하중을 무시할 수 없는 베어링-축계의 특성을 평가하기 위해, Jones의 케도륜 제어 가설[2]과 볼과 케도륜의 기하학적 관계, 그리고 실제 측정된 축과 케이지의 회전속도 등을 이용하여 볼 운동을 평가하고, 이로 인한 피로수명에 끼치는 영향을 검토하고자 한다. 이를 위하여 양단이 2개의 볼베어링으로 지지되어 있는 베어링-축계의 중앙에 하중이 작용하는 경우, 베어링 간의 거리와 외력의 변화에 따른 베어링에 전달되는 모멘트 하중과 축경사각(misalignment angle) 등을 부정정계 해석으로부터 구하고, 이를 이용하여 베어링의 기구학적 운동해석의 중요한 변수인 케이지 공전속도를 예측하고 실제 시험을 통하여 결과를 검토하며, 각 경우에 대한

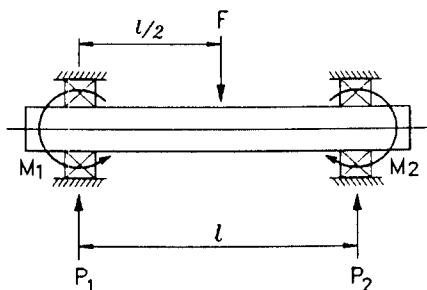


Fig. 1. Statically indeterminate two-bearing shaft system

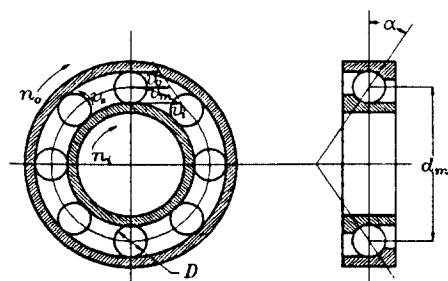


Fig. 2. Rolling speeds and velocities of ball bearing

볼베어링의 피로수명을 예측하고자 한다.

2. 베어링-축계 해석 및 볼베어링 운동 해석

Fig. 1과 같은 축-베어링계의 축 중앙에 하중(F)이 작용할 때, 베어링 한 개에 전달 되는 반경방향 하중(Fr)과 모멘트하중(M)은 다음식으로 부터 구해진다.

$$F_r = P_1 = P_2 = F/2 \quad (1)$$

$$M = M_1 = M_2 = \frac{Fl}{8} - \frac{2El}{l} \theta \quad (2)$$

단, E와 I는 축의 종탄성계수와 단면 2차모멘트, θ 는 축경사각이다. 위식에서 알 수 있는 바와 같이 M과 θ 를 결정하기 위해서는 볼베어링의 복합하중하에서의 하중분포 해석의 반복 계산이 필요하게 된다. 복합하중 하에서의 하중분포 및 변형해석 등은 문헌에 잘 밝혀져 있으므로[1], 상세한 유도 과정은 생략한다.

해석 결과로부터 베어링간의 거리(l)와 외력(F)의 변화에 따른 베어링에 전달되는 모멘트 하중, 축경사각 등을 구할 수 있으며, 각 경우에 대한 동등가 하중 및 수명을 예측할 수 있다.

볼베어링이 고하중하에서 저속으로 회전할 경우는 베어링 각 구성 요소들의 동적 영향을 무시하고 볼과 케이지의 거동을 해석할 수 있다[1]. Fig. 2에 보는 바와같이 접촉각(α)이 일정하고 볼과 내외륵간에 미끄러짐이 없는 경우, 내륵과 외륵의 속도(v, v_o)는 다음식과 같이 주어진다.

$$v_i = \frac{1}{2} \omega_i d_m (1 - \gamma) \quad (3)$$

$$v_o = \frac{1}{2} \omega_o d_m (1 + \gamma) \quad (4)$$

단, ω, ω_o 는 내외륵의 각속도, $\gamma = D \cos \alpha d_m$, D는

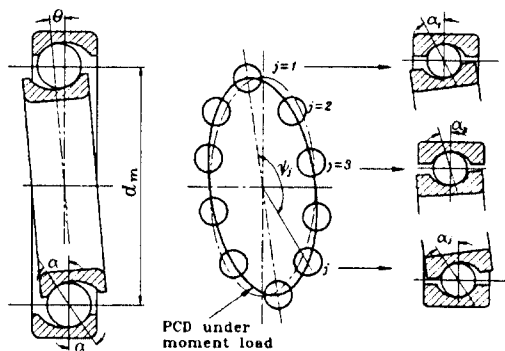


Fig. 3. Contact angles between balls and raceways under moment load

볼의 직경, d_m 은 피치원직경, α 는 접촉각이다. 케드륵 접촉에서 미끄러짐이 없으면 케이지의 속도는 내외륵 속도의 평균이 된다. 즉, 케이지의 속도(v_m)와 회전수(n_m)는 다음식과 같다.

$$v_m = \frac{\pi d_m}{120} [n_i(1 - \gamma) + n_o(1 + \gamma)] \quad (5)$$

$$n_m = \frac{1}{2} [n_i(1 - \gamma) + n_o(1 + \gamma)] \quad (6)$$

단, n_i, n_o 는 내륵과 외륵의 회전수이다. 한편, 볼 중심의 속도(v_B)는 볼과 케이지의 틈새 등을 무시할 경우 케이지의 공전속도(v_m)와 같게 된다. 즉, 내륵만 회전하는 경우 다음식에서와 같이 접촉각의 함수로서 (7)식으로 표현되며, 볼의 구름속도(v_R)는 (8)식으로 계산된다.

$$v_B = \frac{\pi d_m}{120} \cdot (1 - \gamma) n_i \quad (7)$$

$$v_R = \frac{\pi d_m (1 - \gamma^2) n_i}{120} \quad (8)$$

Fig. 3은 축경사에 의한 모멘트 하중이 볼베어링에 작

용할 경우 볼과 케도륜의 접촉상태를 보여주는 그림이다. 그림에서 볼 수 있는 바와같이 접촉각은 볼 위치에서 각기 다르기 때문에 (7)식으로 계산되는 볼의 속도는 각 볼위치에 관계없이 항상 일정한 값을 갖는 실제의 볼 속도와의 차이가 존재하게 된다. 이 속도 차이는 볼의 미끄럼 운동을 초래하게 되며 볼과 케도륜 사이의 마찰력 및 유막두께 등의 변화를 초래하여 피로수명에도 영향을 끼치게 될 것으로 예상된다. 미끄럼속도는 케이지의 공전속도(v_m)와 (7)식으로 계산된 속도와의 차이에서 발생되며, 다음식으로 계산된다.

$$v_{slide} = |v_m - v_B| = \frac{\pi d_m}{120} |2n_{cage} - (1 - \gamma)n_i| \quad (9)$$

$$\text{단, } v_m = \frac{\pi d_m}{60} n_{cage} \quad (10)$$

본 논문에서는 볼베어링이 모멘트 하중을 받아 접촉각이 일정하지 않은 경우의 케이지 공전 속도의 예측을 위하여 (11)과 같은 새로운 식을 제안하였으며, 실제 실험을 통하여 이 제안식에 의한 값을 검토하였다.

$$n_{cage} = \frac{n_i}{2} \left(1 - \frac{D}{d_m} \cos \alpha_m\right) \quad (11)$$

$$\text{단, } \alpha_m = \frac{|\alpha_{max}| + |\alpha_{min}|}{2} \quad (12)$$

여기서, 접촉각 α 는 복합하중 하에서의 볼베어링의 하중분포 및 운동 해석 결과로부터 구해지며, α_{max} 와 α_{min} 은 볼과 케도륜 사이의 접촉각중 가장 큰 값과 가장 작은 값을 나타낸다.

(11)식은 볼과 케도륜 사이의 접촉하중은 접촉각이 큰 볼 위치에서 커지게 되며, 케이지의 공전속도는 접촉하중이 큰 볼 위치의 회전속도에 좌우될 것이라는 가정하에 유도된 제안식이다.

한편, Harris[1]는 볼과 케도륜의 접촉각이 영이 아니면 회전시 볼은 구름운동과 함께 스핀운동이

발생됨을 케도륜 제어이론을 이용한 준정적 해석을 통하여 밝힌 바 있다. 관성모멘트를 무시할 경우 내외륜 접촉에서의 스핀-구름비는 다음식과 같이 주어진다.

$$\left[\frac{\omega_s}{\omega_{roll}} \right]_i = (1 - \gamma'_i) \tan(\alpha_i - \beta) + \gamma'_i \sin \alpha_i \quad (13)$$

$$\left[\frac{\omega_s}{\omega_{roll}} \right]_o = -(1 + \gamma'_o) \tan(\alpha_o - \beta) + \gamma'_o \sin \alpha_o \quad (14)$$

단, 내륜 제어인 경우:

$$\tan \beta = \frac{\sin \alpha_i}{\cos_i - \gamma'} , \left[\frac{\omega_s}{\omega_{roll}} \right]_i = 0 \quad (15)$$

외륜 제어인 경우:

$$\tan \beta = \frac{\sin \alpha_o}{\cos_o - \gamma'} , \left[\frac{\omega_s}{\omega_{roll}} \right]_o = 0 \quad (16)$$

여기서, $\gamma' = D/d_m$ 이다. 한편, 스핀-구름비는 접촉각의 크기에 따라 변하게 되므로, 축경사에 의한 모멘트 하중이 작용할 경우, 각 볼위치에서 ω_s/ω_{roll} 값은 변하게 된다.

3. 결과 및 고찰

Table 1은 베어링-축계의 해석을 위해 필요한 축과 베어링의 제반 치수들을 보여준다. Table 2는 베어링-축계의 해석 결과로서 외력(F)이 8100 N이고 베어링 사이의 거리(l)가 250 mm일 때, 접촉각, 볼 중심속도, 미끄럼속도 및 스핀속도 등을 보여준다. 이때 베어링에 전달되는 반경방향 하중은 4050 N, 모멘트하중은 44.2 Nm, 축경사각은 0.375도 이다.

Figs. 4-6은 Table 2의 해석 결과 중 볼 중심에서의 속도, 미끄럼속도 및 스핀속도비 등을 도식화한 그림으로서, 접촉각이 상대적으로 큰 맨 위와 맨 아래 위치에 있는 볼의 미끄럼속도와 스핀속도가 크게 나타남을 보여준다. Fig. 7은 베어링 사이의 거리를 일

Table 1. Descriptions of two-bearing shaft system

Shaft diameter	25 mm	Bearing PCD	35.5 mm
Young's modulus of shaft	208 GPa	ball diameter	6.35 mm
Span length(l)	variable	number of balls	10
Applied load(F)	variable	inner groove radius	3.21 mm
Bearing (2ea)	6005	outer groove radius	3.37 mm

Table 2. The results of 6005 bearing analysis under radial load of 4,050 N, moment load of 44.2 Nm, and shaft speed of 2,100 rpm

Ball no.	Contact angle(deg)	Ball center speed v_B (m/sec)	Slide speed v_{slide} (m/sec)	Ball rolling speed v_R (m/sec)	Slide-to-roll ratio	Spin-to-roll ratio
1	15.266	1.6149	0.0266	1.9042	0.014	0.1140
2	10.953	1.6090	0.0326	1.9022	0.017	0.0825
3	-1.993	1.6238	0.0388	1.9000	0.020	-0.0152
4	-20.130	1.6239	0.0177	1.9073	0.009	-0.1484
5	-34.405	1.6637	0.0221	1.9199	0.012	-0.2372
6	-39.392	1.6819	0.0403	1.9252	0.021	-0.2635
7	-34.405	1.6637	0.0221	1.9199	0.021	-0.2373
8	-20.130	1.6239	0.0177	1.9073	0.009	-0.1484
9	-1.993	1.6028	0.0388	1.9000	0.020	-0.0152
10	10.953	1.6090	0.0326	1.9022	0.017	-0.0825

$\alpha_{max} = 15.266$ deg. $\alpha_{min} = -39.392$ deg. $v_m = 1.6416$ m/sec. $n_{cage} = 883.2$ rpm ($n_{cage}/n_i = 0.4206$).

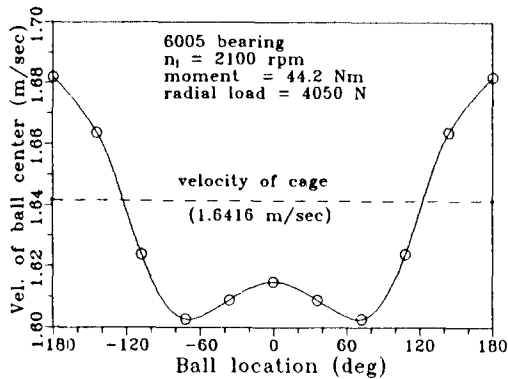


Fig. 4. The velocities of ball center at each ball locations

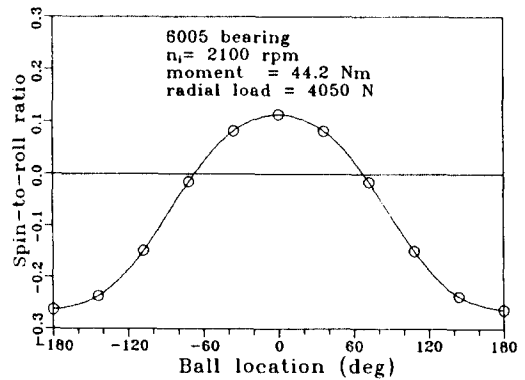


Fig. 6. Spin-to-roll ratio between ball and raceway at each ball locations

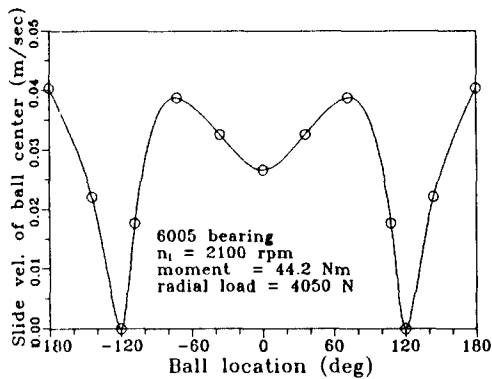


Fig. 5. The sliding speeds of ball at each ball locations

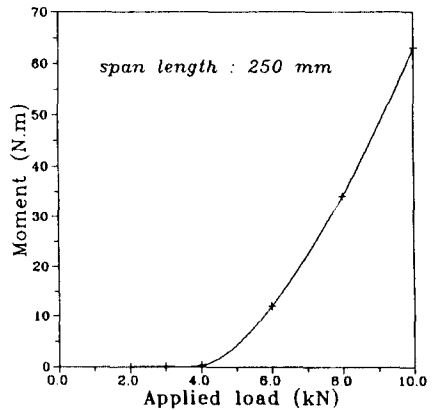


Fig. 7. The relationship between applied load and moment of two-bearing shaft system

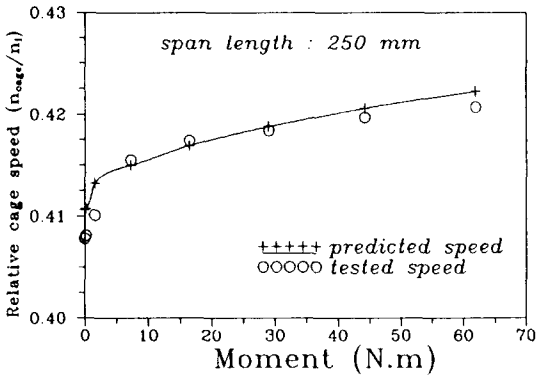


Fig. 8. The relationship between moment and cage speed of two-bearing shaft system

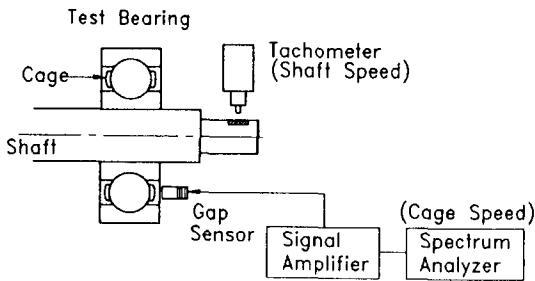


Fig. 9. Schematic of measuring system for shaft speed and cage speed

정하게 유지한 상태에서 외력(F)을 변화시킴으로써 발생하는 모멘트의 크기를 보여주고 있으며, Fig. 8은 발생된 모멘트와 (11)식으로 계산되는 케이지 속도와

의 관계를 나타낸 그림이다. 결과로 부터 외력이 커짐에 따라 모멘트가 커짐을 알 수 있으며, 또한 케이지의 회전속도도 더불어 커짐을 알 수 있다.

Fig. 9는 베어링-축계에서 모멘트 하중을 받는 베어링의 미끄럼운동을 정량화하기 위하여 베어링케이지와 축의 회전속도 측정을 위해 구성된 장치의 개략도이다. 축의 회전속도는 측정범위가 10-20,000 rpm 이고 측정오차가 1 rpm인 비접촉식 회전수측정기로 측정하였다. 케이지의 회전속도는 케이지의 형상이 각 볼 위치에서 볼록한 점을 이용하여 그림에서 보는바와 같이 케이지 가까이에서 갭센서를 설치하여 측정된 신호를 주파수 분석하여 구하였다.

Table 3은 Fig. 9의 실제 시험장치에서 측정된 축 회전 속도와 케이지 회전속도 값을 보여주며, Fig. 8에 그 값을 표시하였다. 시험결과로 부터 외력이 비교적 작은 경우는 예상속도보다 측정된 케이지의 속도가 작게 나타남을 알았으며, 이 경우 볼과 케도륜 사이에 미끄럼이 상당히 존재하며, 베어링 구성 요소들간의 미세한 치수오차 등으로 인하여 볼과 케도륜이 완전하게 접촉되지 않는데에 그 원인이 있는 것으로 추정된다. 한편, 외력이 비교적 커지면 볼과 케도륜이 정상적인 접촉으로 인하여, 예상 속도와 측정속도가 잘 일치함을 알 수 있었다. 그러나 모멘트하중이 상당히 커지면 측정속도는 예상속도보다 작아지게 되며, 그 원인은 모멘트 하중이 어느 정도 이상이 되면 볼과 케도륜 사이의 접촉각이 기하학적 형상으로부터 더 이상 커지지 못하는데 있는 것으로 추정된다.

이상의 결과로 부터 베어링에 모멘트 하중이 작용할

Table 3. Test results of shaft speed and cage speed in two-bearing shaft system

Load F (N)	Moment M (Nm)	Measured Shaft speed		Measured Cage speed		Cage speed Shaft speed	
		RPM	Hz	RPM	Hz	Predicted values by eq. (11)	Measured values
0	0	1431	23.85	583.5	9.725	0.4106	0.4078
830	0.03	1445	24.08	589.5	9.825	0.4106	0.4090
2040	0.17	1437	23.95	586.5	9.775	0.4107	0.4081
3254	1.59	1430	23.83	586.5	9.775	0.4132	0.4101
4466	7.22	1415	23.58	588.0	9.800	0.4150	0.4155
5678	16.46	1405	23.42	586.5	9.775	0.4169	0.4174
6590	29.02	1391	23.18	582.0	9.700	0.4188	0.4184
8100	44.25	1376	22.93	577.5	9.625	0.4206	0.4197
9310	61.94	1362	22.70	573.0	9.550	0.4222	0.4207

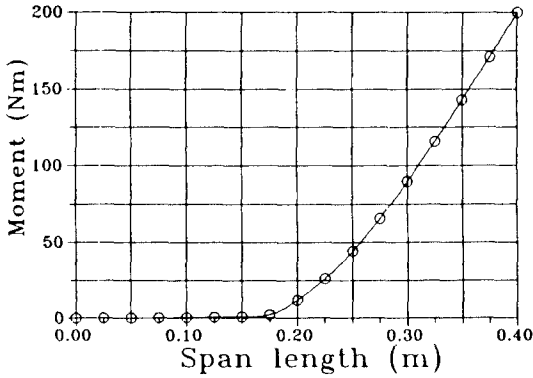


Fig. 10. Span length vs. moment of two-bearing shaft system

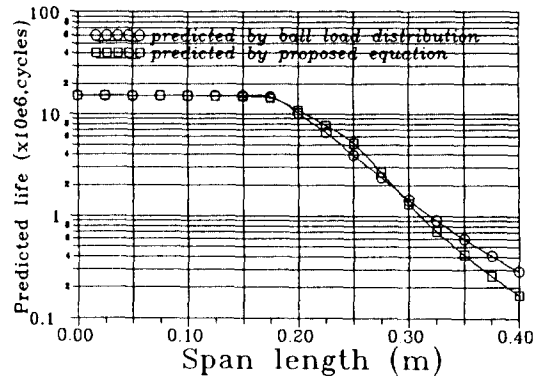


Fig. 13. Span length vs. predicted life of two-bearing shaft system

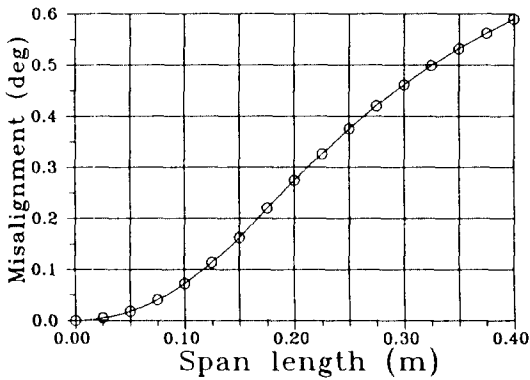


Fig. 11. Span length vs. misalignment of two-bearing shaft system

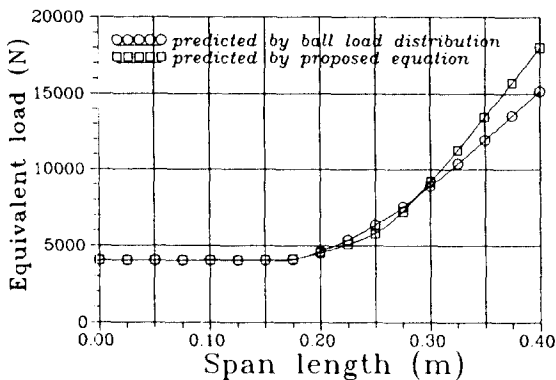


Fig. 12. Span length vs. equivalent dynamic load of two-bearing shaft system

경우 볼의 미끄럼 속도를 정량화 하는데 필요한 중요한 변수인 케이지의 회전속도를 결정하게 되었다.

Fig. 10-13은 베어링-축계의 외력을 8100 N으로 일

정하게 유지한 상태에서 베어링 사이의 거리와 모멘트, 축경사, 동등가하중 및 예상 L_{10} 수명과의 관계를 나타낸 그림이다. 특히 Fig. 12와 13에서는 참고문헌에서 제안된 모멘트하중을 고려한 동등가하중식에 의한 하중값과 예상 수명도 나타내었다[8].

본 베어링 축계의 경우 축경사각이 약 0.25도 정도까지는 피로수명이 크게 변화하지 않았으며, 그 이상이 되면, 즉 베어링 사이의 거리가 약 200 mm 이상이 되면 베어링에 전달되는 모멘트하중이 커지게 되어 피로수명의 감소 현상이 현저함을 알 수 있었다.

4. 결 론

부정정 베어링-축계 해석과 불베어링의 운동해석을 통하여 아래의 결론을 얻었다.

(1) 2베어링-축계의 부정정계 해석을 통하여 베어링간의 거리의 변화에 따라 불베어링에 발생하는 축경사각과 모멘트 값을 결정하였으며, 이 거리가 커짐에 따라 모멘트 값이 급격히 커져 베어링의 피로수명이 급격히 감소하는 현상을 밝혔다.

(2) 불베어링에 모멘트하중이 작용할 때, 케이지 회전속도를 예측할 수 있는 새로운 식을 제안하였으며, 예측된 회전속도는 실제 측정시험 결과와 잘 일치하였다. 제안된 식은 아래와 같다.

$$v_{cage} = \frac{n_i}{2} \left(1 - \frac{D}{d_m} \cos \alpha_m \right)$$

단, n_{cage} 와 n_i 는 케이지와 축의 회전속도, d_m 은 피치원직경, α_m 은 볼과 궤도륜 사이의 접촉각 중 가장 큰 값과 작은 값의 평균값이다.

(3) 볼베어링의 준정적해석을 통하여 볼과 케도를 사이의 접촉응력 및 유막두께 등에 큰 영향을 끼치는 볼의 미끄럼속도와 스핀속도를 정량화하였다.

참 고 문 헌

1. T.A. Harris, *Rolling Bearing Analysis*, 3rd ed., A Wiley-Interscience Pub., 1991.
2. A.B. Jones, "A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings Under Arbitrary Load and Speed Conditions", ASME J. of Basic Engineering, Vol. 82, pp. 309-320, 1960.
3. J.V. Poplawski and J.A. Mauriello, "Skidding in Lightly Loaded High-Speed Ball Thrust Bearings", ASME for presentation at the Lubrication Symposium, San Francisco, June 17-19, 1969.
4. T.A. Harris, "Ball Motion in Thrust-Loaded, Angular Contact Bearings with Coulomb Friction", ASME J. of Lub. Tech., Vol. 93, pp. 32-38, Jan. 1971.
5. C.R. Gentle and R.J. Boness, "Prediction of Ball Motion in High-Speed Thrust-Loaded Ball Bearings", ASME J. of Lub. Tech., Vol. 98, pp. 463-471, July 1976.
6. C.T. Walters, "The Dynamic of Ball Bearings", ASME J. of Lub. Tech., Vol. 93, pp. 1-10, Jan. 1971.
7. P.K. Gupta, "Dynamics of Rolling Element-Bearings Experimental Validation of the DREB and RAPID-REB Computer Programs", ASME J. of Tribology, Vol. 107, pp. 132-137, Jan. 1985.
8. W.D. Kim, The Effect of the Misalignment on the Fatigue Life of Ball Bearing, Ph.D Thesis, Seoul National University, 1993.