

〈論 文〉

# Eulerian-Lagrangian 방법을 이용한 1차원 종확산방정식의 수치모형 Numerical Modeling of One-Dimensional Longitudinal Dispersion Equation using Eulerian-Lagrangian Method

서 일 원\* 김 대 근\*\*  
SEO Il Won and KIM Dae Geun

**Abstract** □ Various Eulerian-Lagrangian numerical models for the one-dimensional longitudinal dispersion equation are studied comparatively. In the models studied, the transport equation is decoupled into two component parts by the operator-splitting approach ; one part governing advection and the other dispersion. The advection equation has been solved using the method of characteristics following fluid particles along the characteristic line and the results are interpolated onto an Eulerian grid on which the dispersion equation is solved by Crank-Nicholson type finite difference method. In solving the advection equation, various interpolation schemes are tested. Among those, Hermite interpolation polynomials are superior to Lagrange interpolation polynomials in reducing dissipation and dispersion errors in the simulation.

**요 지 :** Eulerian-Lagrangian 방법을 이용하여 1차원 종확산방정식의 수치모형을 비교·분석하였다. 본 연구에서 비교·분석한 모형은 지배방정식을 연산자 분리방법에 의해서 이송만을 지배하는 이송방정식과 확산만을 지배하는 확산방정식으로 분리한다. 이송방정식은 특성곡선을 따라서 유체입자를 추적하는 특성곡선법을 사용하여 해를 구하고, 그 결과를 고정된 Eulerian 격자상에 보간하였고, 확산방정식은 상기 고정격자상에서 Crank-Nicholson 유한차분법을 사용하여 해를 구하였다. 이송방정식의 풀이에서 다양한 보간방법이 적용되었는데, 일반적으로 Hermite 보간다항식을 사용한 경우가 Lagrange 보간다항식을 사용한 경우보다 수치확산 및 수치진동등의 오차를 최소화할 수 있어서 더욱 우수한 것으로 밝혀졌다.

## 1. 서 론

하천에서의 오염물질의 이동(transport)을 지배하는 방정식은 1차원 종확산방정식(longitudinal dispersion equation)이다. 종확산방정식의 수치해를 구하기 위하여 다양한 Eulerian 방법(Leonard, 1979 ; 강주환과 이길성, 1987 ; Abott와 Basco, 1989)들이 제안되었으나, 이러한 수치방법들은 고정된 계산격자점들을 이용하므로써 이송·확산방정식의 이송과정을 묘사하는 쌍곡선성(hyperbolicity)을 제대로 반영하지 못하여, 특히 이송이 지

배적이어서 물리적인 확산계수가 작은 경우에는 수치진동(numerical oscillation) 및 수치확산(numerical dissipation)이 크게 되어서 실제의 물리적인 현상을 제대로 예측하지 못하게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 방법으로 흐름을 따라 움직이며 변형되는 좌표축을 설정하고 결과적으로 확산항만을 수치적으로 풀어내는 방법인 Lagrangian-type 방법이 사용되기도 하지만, 이 방법은 흐름장이 급격히 변화하거나 복잡한 지형에서는 격자를 형성하기가 매우 어려울 뿐만 아니라 과도한 수치오차를 수반하는 경우가 많다(Noye, 1987).

상기한 문제점을 해결하기 위하여 Eulerian-

\* 서울대학교 공과대학 토목공학과 조교수

\*\* 서울대학교 대학원 토목공학과 석사과정

type 방법과 Lagrangian-type 방법의 각각의 장점을 이용하는 Eulerian-Lagrangian Method(이하 ELM이라 명함)에 대한 연구가 활발하게 수행되고 있다(Holly와 Preissmann, 1977; Baptista 등, 1979; Jinn과 Euan, 1991; 서일원과 김대근, 1993). ELM에서는 수치계산의 편리함을 도모하기 위하여 고정격자를 그대로 이용하면서 과도한 수치오차를 제어하기 위하여 이송만을 나타내는 방정식을 특성곡선법으로 해를 구하여 유체입자를 추적하므로써 특성곡선의 정보전달의 방향성을 정확하게 고려해주는 것이다.

이송방정식(advection equation)의 시간에 대한 전미분을 차별화하면 특성곡선이 통과하는 임의의 점에서의 농도값을 결정하여야 한다. 이 점에서의 농도값은 특성곡선이 통과하는 점의 양 편의 격자점의 정보를 이용하여 보간(interpolation)하여 결정하게 되며 ELM의 정확도는 여기에 사용되는 보간기법의 특성에 크게 의존한다. Lagrange 보간다항식을 이용하여 보간할 때에 가장 간단한 보간기법은 두점의 농도를 이용하여 1차의 정도를 가지도록 보간하는 방법이다. 이 방법은 수치확산이 심하게 일어나므로 대개의 경우 2차 이상의 정도를 가지는 Lagrange 보간다항식이 많이 이용되고 있다(Baptista 등, 1979; Cheng 등, 1984). Lagrange 보간다항식을 이용하는 경우는 보간다항식의 차수를 높일수록 정도를 높일 수는 있으나 많은 격자점정보를 필요로 하므로 경계의 처리가 복잡하고 수치확산은 감소하는 반면에 수치진동이 심해지는 단점이 있다.

이러한 Lagrange 보간법의 단점을 보완하기 위하여 Holly와 Preissmann(1977)은 두점에서의 농도 및 농도의 도함수를 이용하는 Hermite 보간다항식을 이용하여 Lagrange 보간다항식을 이용하는 경우보다 더 나은 해의 거동을 보인다는 사실을 보였으며, Holly와 Polatera(1984)는 2차원 이송방정식의 풀이에 Hermite 보간다항식을 적용한 바 있다. Toda와 Holly(1986)는 이송방정식과 확산방정식을 분리하여 계산하는 방법(연산자 분리방법)을 사용하지 않고 한꺼번에 계산하면서도 특성곡선의 방향성을 고려해주는 방법을 제안하였고, Jinn과 Euan(1991)은 Holly와 Preissmann

방법의 연장으로 여러시간 단계를 가로지르는 특성곡선을 이용하여, 보간 횟수를 줄임으로써 해의 정도를 향상시키고자 하였다. 국내의 연구로는 전경수와 이길성(1993, 1994)이 Hermite 5차 보간다항식과 Crank-Nicholson 방법을 이용하여 1차원 종확산방정식에 ELM을 적용하였으며, 그 결과 다른 Eulerian-type 방법보다 ELM의 계산결과가 월등함을 보였다. 서승원(1993)은 연안해역의 장기적인 확산해석에 2차원 ELM을 적용한 바 있다.

본 연구에서는 ELM의 적용성을 보다 증대시키기 위해 ELM에 의한 해의 거동에 가장 민감한 영향을 주는 특성방정식의 보간법으로서 Lagrange 3, 4, 5차 및 Hermite 3, 5차 보간다항식을 이용하여 이송방정식을 수치모형화하고 확산방정식은 Crank-Nicholson 방법을 이용하여 수치모형화하여 이들 방법에 의한 해의 거동을 체계적으로 비교하였다. 또한 본 연구에서 사용한 보간법중에서 Lagrange 5차 보간다항식을 이용한 경우와 Hermite 3차 보간다항식을 이용한 경우의 이송방정식에 대한 오차해석(error analysis)을 실시하였다.

## 2. 수학적 모형

### 2.1 지배방정식의 분리

일정한 단면을 가지는 수로에서의 Taylor(1953)가 유도한 1차원 종확산방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1)$$

식 (1)에서  $x$ ,  $t$ 는 각각 위치와 시간,  $C$ 는 농도,  $u$ ,  $K$ 는 각각 단면평균유속 및 종확산계수로서 본 연구에서는 일정한 상수로 가정하였다. 식 (1)은 선형식이므로 다음과 같이 이송과 확산과정을 분리하여 2개의 식으로 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad \text{단, } n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \text{단, } f\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t \quad (3)$$

식 (2)와 (3)을 시간에 대해 차분화하면 다음과 같다.

$$\frac{C^f - C^n}{\Delta t} = u \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{C^{n+1} - C^f}{\Delta t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (5)$$

식 (4)와 (5)에서  $C^f$ 는 순수하게 이송만이 일어난다고 했을 경우의 농도이고  $C^n$  및  $C^{n+1}$ 은 각각 현시간 단계 및 다음시간 단계의 농도가 되며  $\Delta t$ 는 시간중분이다.

### 2.2 이송모형

이송방정식 (4)는 특성곡선을 따라 농도값이 일정하다는 것을 의미한다. 즉, 농도의 시간에 대한 전미분이 0이라는 의미이며 다음식과 같이 표시할 수 있다.

$$\frac{dC}{dt} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dx}{dt} = u \quad (7)$$

식 (6)과 (7)의 해는 그림 1을 참조하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$C^f_R = C^n_P \quad (8)$$

$$\frac{x_P - x_P}{\Delta t} = u \quad (9)$$

식 (8)과 (9)는 시간단계  $n$ 에서의 농도가  $\Delta t$ 동안 농도의 변화가 전혀 없이 단지  $u\Delta t$ 만큼 이송된다는 것을 의미한다. 따라서  $P$ 점에서의 농도를 산정하는 보간기법에 따라 본 특성곡선법에 의한 해의 정도가 좌우된다.

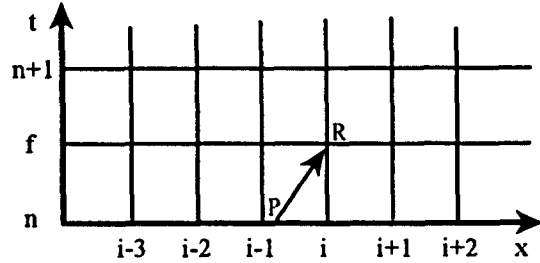


그림 1. 1 차원 모형의 계산격자

#### 2.2.1 Lagrange 보간다항식

일반적인 Lagrange 보간다항식은 다음과 같다.

$$C(x) = \sum_{i=1}^n C_i \phi_i(x) \quad (10)$$

여기서  $C_i$ 는 각 절점(node)에서의 농도이고,

$$\phi_i(x) = \prod_{k=1, k \neq i}^n \left( \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

이며,  $n$ 이 2, 3, 4, ...가 됨에 따라 1차, 2차, 3차, ... Lagrange 보간다항식이 얻어진다. 본 연구에서는 3차, 4차, 5차의 Lagrange 보간다항식을 이용하여 이송방정식의 해를 구하였다. 3차 Lagrange 보간다항식을 이용하는 경우의 이송모형은 다음과 같다.

$$C^f_P = C^n_P = L_1 C^n_{i-2} + L_2 C^n_{i-1} + L_3 C^n_i + L_4 C^n_{i+1} \quad (11)$$

여기서,

$$L_1 = \frac{(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)}{6}, \quad L_2 = \frac{(2-\alpha)\alpha(1+\alpha)}{2}$$

$$L_3 = \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)(1+\alpha)}{2}, \quad L_4 = \frac{(\alpha-2)(1-\alpha)\alpha}{2}$$

이다.  $\alpha = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$ 로서 Courant 수(Cr)로 정의된다.

4차 Lagrange 보간다항식을 이용하는 경우는 다음과 같다.

$$C^f_P = C^n_P = M_1 C^n_{i-2} + M_2 C^n_{i-1} + M_3 C^n_i + M_4 C^n_{i+1}$$

$$+M_5C_{i+2}^n \quad (12)$$

여기서,

$$M_1 = \frac{(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{24},$$

$$M_2 = \frac{(2-\alpha)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6},$$

$$M_3 = \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)(1+\alpha)(2+\alpha)}{4},$$

$$M_4 = \frac{(\alpha-2)(1-\alpha)\alpha(\alpha+2)}{6},$$

$$M_5 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha-2)}{24}$$

이다. 5차 Lagrange 보간다항식을 이용하는 경우는 다음과 같다.

$$C_i^t = C_i^n = H_1C_{i-3}^n + H_2C_{i-2}^n + H_3C_{i-1}^n + H_4C_i^n + H_5C_{i+1}^n + H_6C_{i+2}^n \quad (13)$$

여기서,

$$H_1 = \frac{(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{120},$$

$$H_2 = \frac{(3-\alpha)(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{24},$$

$$H_3 = \frac{(3-\alpha)(2-\alpha)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{12},$$

$$H_4 = \frac{(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha)(\alpha+1)(\alpha+2)}{12},$$

$$H_5 = \frac{(3-\alpha)(2-\alpha)(\alpha-1)\alpha(\alpha+2)}{24},$$

$$H_6 = \frac{(\alpha-3)(\alpha-2)(1-\alpha)\alpha(\alpha+1)}{120}$$

이다.

### 2.2.2 Hermite 보간다항식

Hermite 보간법에서는 특성곡선 양쪽의 2점의 농도 및 농도의 도함수들을 이용하여 보간기법의 차수를 높여서 이송방정식의 근사해를 구한다. 3차의 정도를 가지는 보간기법은 2점의 농도 및 농

도의 1차도함수를 이용하여 미지의 농도를 보간한다. 즉,

$$C_i^t(\alpha) = A_1\alpha^3 + A_2\alpha^2 + A_3\alpha + A_4 \quad (14)$$

식 (14)의 계수는 다음과 같은 정보를 이용하여 구한다.

$$C_i^t(0) = C_i^n, \quad C_i^t(1) = C_{i-1}^n$$

$$CX_i^t(0) = CX_i^n, \quad CX_i^t(1) = CX_{i-1}^n \quad (15)$$

여기서,  $CX = \frac{\partial C}{\partial x}$ 로서 1차도함수이다.

식 (15)를 이용하여 식 (14)의 계수를 구하여 차분식을 구성하면 다음과 같다.

$$C_i^t = a_1C_{i-1}^n + a_2C_i^n + a_3CX_{i-1}^n + a_4CX_i^n \quad (16)$$

여기서,

$$a_1 = a^2(3-2a), \quad a_2 = 1-a_1$$

$$a_3 = a^2(1-a)\Delta x, \quad a_4 = -a(1-a)^2\Delta x$$

이다. 1차도함수에 관한 이송방정식의 해는 다음과 같이 식 (17)을 이용하면 구할수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad (17)$$

$$CX_i^t(\alpha) = -\frac{1}{\Delta x}(3A_1\alpha^2 + 2A_2\alpha + A_3) \quad (18)$$

식 (18)에 식 (15)를 이용하여 구한 계수를 대입하여 정리하면 다음과 같은 차분식을 얻을수 있다.

$$CX_i^t = b_1C_{i-1}^n + b_2C_i^n + b_3CX_{i-1}^n + b_4CX_i^n \quad (19)$$

여기서,

$$b_1 = 6\alpha(\alpha-1)/\Delta x, \quad b_2 = -b_1$$

$$b_3 = a(3a - 2), \quad b_4 = (a - 1)(3a - 1)$$

이다. 이상이 한 시간단계에 있어서의 3차의 정도를 가지는 농도 및 농도의 1차도함수의 이송방정식의 해를 구하는 방법이다. 위와 마찬가지로 5차의 정도를 가지도록 특성곡선 양측의 농도(C), 농도의 1차도함수(CX) 및 농도의 2차도함수(CXX)를 이용하면 다음과 같은 차분식을 얻을 수 있다.

$$C'_i = c_1 C_{i-1}^n + c_2 C_i^n + c_3 C_{i+1}^n + c_4 C_{i+2}^n + c_5 C_{i+3}^n + c_6 C_{i+4}^n \quad (20)$$

$$CX'_i = d_1 C_{i-1}^n + d_2 C_i^n + d_3 C_{i+1}^n + d_4 C_{i+2}^n + d_5 C_{i+3}^n + d_6 C_{i+4}^n \quad (21)$$

$$CXX'_i = e_1 C_{i-1}^n + e_2 C_i^n + e_3 C_{i+1}^n + e_4 C_{i+2}^n + e_5 C_{i+3}^n + e_6 C_{i+4}^n \quad (22)$$

여기서,

$$\begin{aligned} c_1 &= a^3(10 - 15a + 6a^2), & c_2 &= 1 - c_1 \\ c_3 &= a^3(1 - a)(4 - 3a)\Delta x, & c_4 &= -a(1 - a)^3(1 + 3a)\Delta x \\ c_5 &= a^3(1 - a)^2\Delta x^2/2, & c_6 &= a^2(1 - a)^3\Delta x^2/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= -30a^2(1 - a)^2/\Delta x, & d_2 &= -d_1 \\ d_3 &= -a^2(2 - 3a)(6 - 5a), & d_4 &= (1 - a)^2(1 - 3a)(1 + 5a) \\ d_5 &= -a^2(1 - a)(3 - 5a)\Delta x/2, & d_6 &= -a(1 - a)^2(2 - 5a)\Delta x/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 &= 60a(1 - 3a + 2a^2)/\Delta x^2, & e_2 &= -e_1 \\ e_3 &= 12a(1 - a)(2 - 5a)/\Delta x, & e_4 &= 12a(1 - a)(3 - 5a)/\Delta x \\ e_5 &= a(3 - 12a + 10a^2), & e_6 &= (1 - a)(1 - 8a + 10a^2) \end{aligned}$$

이다.

### 2.3 이송방정식의 오차해석

본 연구에서는 Lagrange 보간다항식중에서 해

의 정도가 가장 우수한 Lagrange 5차 보간다항식을 이용하여 이송방정식을 근사하는 경우와 Hermite 3차 보간다항식을 이용한 경우에 대하여 진폭오차(amplitude error)와 위상오차(celerity error)를 Fourier 해석을 이용하여 구하였다. Fourier 해석의 기본가정은 “이송방정식은 선형(linear)이어야 하며 임의의 해에 대해 중첩의 원리가 성립해야한다“이다.

#### 2.3.1 Lagrange 5차 보간다항식

Fourier에 의한 오차해석을 하기 위하여 식 (13)의  $C^n$ 에  $\overline{C}^n \exp(j\sigma i)$ 을 대입하여 정리하면,

$$\overline{C}' = G \overline{C}^n \quad (23)$$

여기서,  $\overline{C}^n$ 은 임의의 n시간단계에서의 진폭이고  $j = \sqrt{-1}$ 이다. 증폭계수(amplification factor) G는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G &= H_1 \cos 3\sigma + (H_2 + H_6) \cos 2\sigma + (H_3 + H_5) \cdot \\ &\quad \cos \sigma + H_4 - j(H_1 \sin 3\sigma + (H_2 - H_6) \sin 2\sigma \\ &\quad + (H_3 - H_5) \sin \sigma) \end{aligned} \quad (24)$$

여기서,  $\sigma = 2\pi \Delta x / L$ , L=특정한 Fourier sine 곡선의 파장 이다. 그림 2는 식 (24)를 이용하여 구한 진폭오차도(amplitude portraits)와 위상오차도(celerity portraits)이다. 진폭오차와 위상오차는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{증폭오차} = \text{mod}(G) \quad (25)$$

$$\text{위상오차} = -\frac{\arctan\left(\frac{\text{Imag } G}{\text{Real } G}\right)}{\sigma} \quad (26)$$

그림 2의 (a)를 통해 Courant 수가 0.5일 때 가장 큰 수치확산을 보이고 있음을 알 수 있다. 하지만 (b)를 보면 Courant 수가 0.5일때 위상오차는 전혀 발생하지 않고 있음을 알 수 있다.

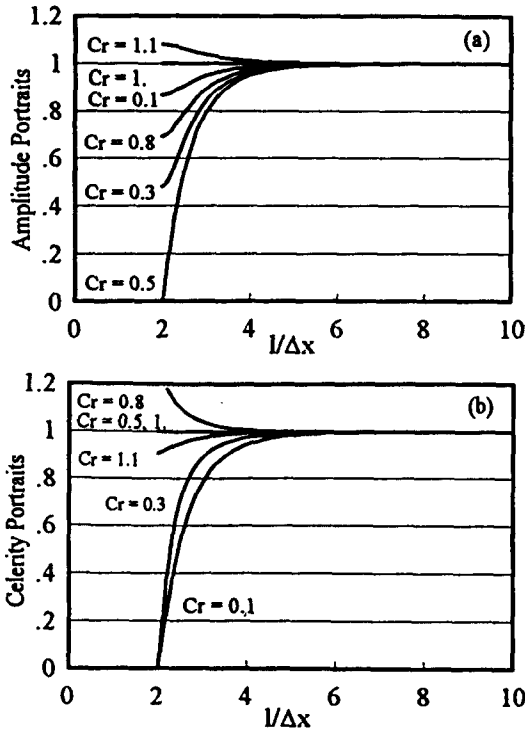


그림 2. Lagrange 5차 보간다항식 : (a)Amplitude Portraits ; (b)Celerity Portraits

2.3.2 Hermite 3차 보간다항식

Holly와 Preissmann(1977)에 의하면 식 (16) 및 (19)의  $C_i^n$ 에  $\bar{C}^n$ 에  $\bar{C}^n \exp(j\sigma i)$ 을 대입하여 정리하면,

$$\left(\frac{\bar{C}^{n+1}}{CX^{n+1}}\right) = F \left(\frac{\bar{C}^n}{CX^n}\right) \tag{27}$$

여기서,  $F = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix}$ 이며 각각의 원소는 다음과 같다.

$$\begin{matrix} k_1 = & k_2 = \\ k_3 = & k_4 = \end{matrix} \tag{28}$$

행렬 F는 증폭행렬(amplification matrix)이라 한다. 이 증폭행렬은 시간에 대해서는 독립이므로,

$$\left(\frac{\bar{C}^n}{CX^n}\right) = F^n \left(\frac{\bar{C}^0}{CX^0}\right) \tag{29}$$

식 (29)에서  $\bar{C}^0$  나  $CX^0$  는 초기조건으로 임의로 정의되어질 수 있다.

정확해에 대한 증폭행렬은 다음과 같다.

$$F_0 = \begin{bmatrix} \exp(-j\sigma\alpha) & 0 \\ 0 & \exp(-j\sigma\alpha) \end{bmatrix} \tag{30}$$

식 (28)과 (30)의 증폭행렬을 비교함으로써 진폭오차와 위상오차를 유도해 낼 수 있다. 증폭행렬을 비교한다 함은 증폭행렬의 고유치( $\lambda$ , eigenvalue)를 비교한다 할 수 있으며 식 (30)의 증폭행렬의 고유치의 진폭은 항상 1이며 위상오차는 존재하지 않는다. 식 (27)의 증폭행렬의 고유치는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$KX = \lambda X \tag{31}$$

$$(K - \lambda I)X = 0 \tag{32}$$

식 (32)가 자명해(trivial solution)를 가지지 않기 위해서는,

$$\begin{aligned} (k_1 - \lambda)(k_4 - \lambda) - k_2k_3 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{(k_1 + k_4) \pm \sqrt{(k_1 + k_4)^2 - 4(k_1k_4 - k_2k_3)}}{2} \end{aligned} \tag{33}$$

식 (33)에서 2개의 복소고유치(complex eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_2$ )를 구할수 있다.  $\lambda_1$ 은  $\sigma$ 가 0에 접근함에 따라  $\exp(-j\sigma\alpha)$ 에 접근하고 있으며  $\lambda_2$ 는  $\exp(-j\sigma\alpha)$ 와 아주 다른 값을 가지고 있다. 즉,

$$|\lambda_2| < |\lambda_1| \leq 1 \text{ for } \alpha \leq 1 \tag{34}$$

그림 3은  $\lambda_1$ (primary mode)의 진폭오차와 위상오차를 보이고 있다. 그림 2에 비해 훨씬 정해에 가까운 양태를 보이고 있다.  $\lambda_2$ (secondary mode)의 절대값은 1에 비해 상대적으로 작은 값(약 0.5)이므로 해에 미치는 영향은 시간이 지남에 따라 급격히 감소하게 된다. 즉, 초기조건으로서 농도 및 농도의 공간구배가 임의로 주어진다 할 때 초

기조건은 앞에서 구한 고유치의 고유벡터 (eigenvector)의 선형합으로 생각할 수 있다. 즉,

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_0 \\ \bar{CX}_0 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{CX}_1 \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} \bar{C}_2 \\ \bar{CX}_2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

따라서,

$$\begin{aligned} \bar{C}_0 &= A_1 \bar{C}_1 + A_2 \bar{C}_2 \\ \bar{CX}_0 &= A_1 \bar{CX}_1 + A_2 \bar{CX}_2 \end{aligned}$$

n시간 준위에서는 식 (29)와 (31)을 이용하면,

$$\begin{aligned} \bar{C}^n &= A_1 \lambda_1^n \bar{C}_1 + A_2 \lambda_2^n \bar{C}_2 \\ \bar{CX}^n &= A_1 \lambda_1^n \bar{CX}_1 + A_2 \lambda_2^n \bar{CX}_2 \end{aligned} \quad (36)$$

식 (36)에서 알 수 있듯이 시간이 진행함에 따라  $\lambda_2$ 가 해에 미치는 영향은 거의 없다고 할 수 있겠다.  $A_1, A_2$ 는 임의의 상수이며,  $(\bar{C}_1, \bar{CX}_1)^T, (\bar{C}_2, \bar{CX}_2)^T$ 은 각각  $\lambda_1$ 과  $\lambda_2$ 에 대한 고유벡터이다.

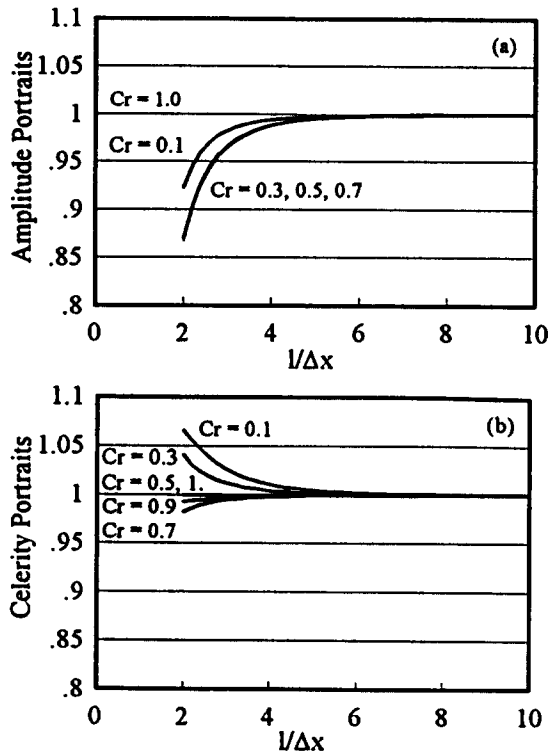


그림 3. Hermite 3차 보간다항식 : (a)Amplitude Portraits ; (b)Celerity Portraits

## 2.4 확산모형

식 (5)를 Crank-Nicholson방법으로 차분화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{C_i^{n+1} - C_i^f}{\Delta t} &= \frac{K}{2\Delta x^2} (C_{i+1}^{n+1} - 2C_i^{n+1} + C_{i-1}^{n+1} \\ &\quad + C_{i+1}^f - 2C_i^f + C_{i-1}^f) \end{aligned} \quad (37)$$

식 (37)을 정리하면,

$$\begin{aligned} -0.5\beta C_{i+1}^{n+1} + (1+\beta)C_i^{n+1} - 0.5\beta C_{i-1}^{n+1} \\ = 0.5\beta C_{i+1}^f + (1-\beta)C_i^f + 0.5\beta C_{i-1}^f \end{aligned} \quad (38)$$

여기서,  $\beta = K\Delta t/\Delta x^2$ 으로 확산수라고 정의한다.

식 (38)은 3중대각행렬(tridiagonal matrix)을 이루므로 Thomas algorithm을 이용하면 쉽고, 빠르게 해를 구할수 있다.

Hermite 보간다항식을 사용하는 경우에는 농도 뿐만 아니라 농도의 도함수도 또한 확산하므로 C에 대한 대수방정식뿐만 아니라 식 (3)을 x에 관하여 미분하여 CX, CXX에 대한 대수방정식을 각각 세워서 해를 구한다(전경수와 이길성, 1994). 이들의 경계조건으로서 양측경계 모두에서 농도와 농도의 1, 2차도함수를 영으로 하였다.

## 3. 수치실험

### 3.1 입력자료

본 연구에서 사용한 5가지의 방법에 의한 수치 실험을 위하여  $\Delta x = 500m$ ,  $u = 0.5m/sec$ , 모의추적시간은 30,000sec를 부여하였고, 종확산계수 K와 시간중분  $\Delta t$ 를 변화시켜서 Courant 수와 Peclet 수( $Pe = u\Delta x/K$ 로서 이송과 확산의 상대적인 중요성을 나타내는 무차원 상수)를 변화시켰다. 초기조건은 아래와 같은 Gaussian 분포를 부여하였다.

$$C(x, 0) = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) \quad (39)$$

식 (39)에서  $\sigma_0$ 와  $x_0$ 는 각각 400m와 3000m를 부여하였다. 식 (39)의 초기조건에 대한 지배방정식의 t시간 후의 해석해는 다음과 같다.

$$C(x, t) = \frac{\sigma_0}{\sigma_t} \exp\left(-\frac{(x-x_0-ut)^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (40)$$

여기서,  $\sigma_t = \sqrt{\sigma_0^2 + 2Kt}$   
 수치실험의 결과를 객관적으로 평가하기 위하여 다음과 같은 오차의 지표(Baptista 등, 1984)를 이용하였다.

$$\text{RMS Error} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{(C_i^a - C_i^n)^2} \quad (41)$$

$$\text{Dissipation Error} = \frac{C_{\max}^a - C_{\max}^n}{C_{\max}^a} \quad (42)$$

$$\text{Dispersion Error} = \left| \frac{C_{\min}^n}{C_{\max}^a} \right| \quad (43)$$

여기서 N은 총 절점수이고  $C_i^a$ ,  $C_i^n$ 은 각각 임의의 절점에서의 해석해 및 수치해이며  $C_{\max}^a$ ,  $C_{\max}^n$ 은 각각 해석해 및 수치해의 최대값이며,  $C_{\min}^n$ 은 수치해의 최소값이다. RMS Error는 전반적인 오차의 정도를 나타내는 지표이고 Dissipation Error는 수치확산을 나타내는 지표로서 결과치가 클수록 수치확산의 정도가 크다는 것을 의미한다. Dispersion Error는 수치진동의 정도를 나타내는 지표로서 결과치가 클수록 수치진동이 심하게 발생하고 있음을 나타낸다.

### 3.2 초기조건에 따른 해의 거동분석

Hermite 보간다항식을 이용하는 경우는 초기조건으로 농도의 도함수가 필요하므로 초기조건으로 주어지는 농도의 도함수가 해에 미치는 영향을 살펴보는 것은 중요한 문제이다. 그림 4-5에 초기조건을 변화하였을 경우 각 방법에 의한 t=30,000 sec일때의 농도분포를 도시하였다. 그림 4-5에 사용된 약어의 정의는 표 1에 수록하였다. 그림

4는 초기농도로 주어지는 Gaussian 분포를 미분하여 농도의 도함수의 초기조건으로 이용한 경우이고 그림 5의 (d)와 (e)는 농도의 도함수의 초기조건을 모두 영으로 놓고 계산하였을 경우이다. 거의 동일한 결과를 보이고 있음을 알 수 있으며, 따라서 농도의 도함수의 초기조건이 본 방법의 해에 미치는 영향은 미미하다고 하겠다.

표 1. 본 연구에서 사용된 수치모형의 명칭

모형명칭	설 명
3-L	Lagrange 3차 보간다항식을 이용하여 보간(i-2, i-1, i+1 이용)
4-L	Lagrange 4차 보간다항식을 이용하여 보간(i-2, i-1, i+1, i+2이용)
5-L	Lagrange 5차 보간다항식을 이용하여 보간(i-3, i-2, i-1, i+1, i+2이용)
3-HP	Hermite 3차 보간다항식을 이용
5-HP	Hermite 5차 보간다항식을 이용

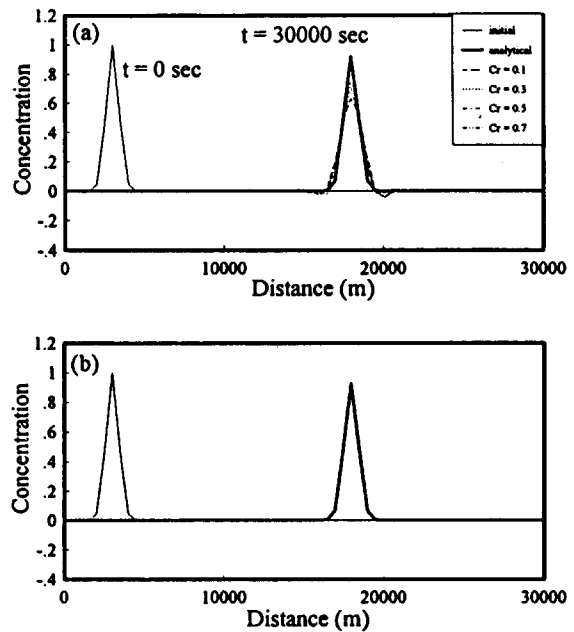
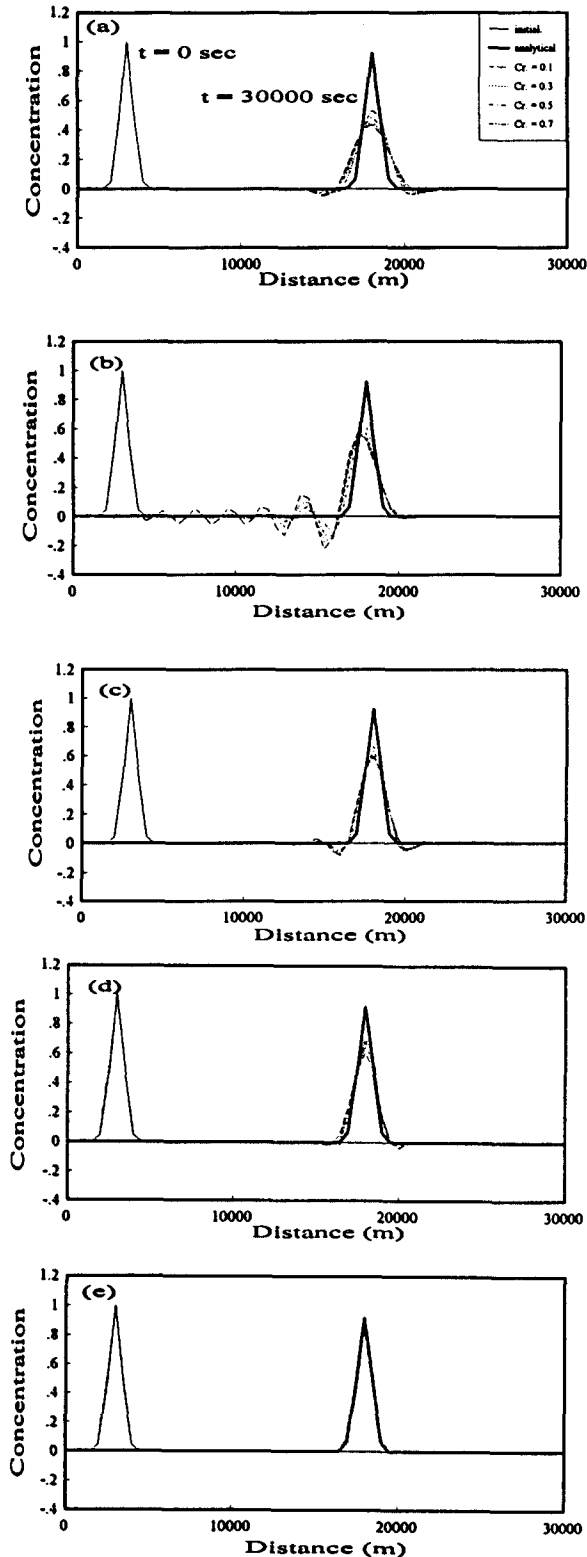


그림 4. 실제 농도의 도함수를 초기조건으로 사용한 경우의 Hermite모형의 계산결과, Peclet수 = 500 : (a)3-HP ; (b)5-HP





### 3.3 결과해석

그림 5는 Peclet 수가 500인 경우의 각 모형의 거동을 도시한 것이다. Lagrange 3차 보간다항식을 이용하는 방법은 다른 방법에 비해 수치확산이 심하게 일어나고 있으며 수치진동도 무시할 수 없을 정도이다. Lagrange 4차 보간다항식을 이용하는 방법은 특히 수치진동이 심하게 발생하고 있으며 위상오차도 무시할 수 없을 정도이다. 이는 보간다항식의 유도시 특성곡선 좌 우의 점을 비 대칭적으로 사용하는 데에 그 원인이 있는 것으로 사료된다. Lagrange 5차 보간다항식을 이용하는 방법은 Lagrange 3차 보간다항식을 이용하는 방법에 비해 수치확산은 많이 감소하였으나 수치진동은 과다한 양상을 보이고 있다. Hermite 3차 보간다항식을 이용하는 방법은 전반적으로 양호한 해의 거동을 보이나 다소의 수치확산과 수치진동이 발생하고 있음을 알 수 있다. Hermite 5차 보간다항식을 이용하는 방법은 정해와 거의 일치하는 모양을 보이고 있으며 수치확산, 수치진동 및 위상오차가 거의 발생하지 않고 있다.

각 방법의 RMS Error를 도시한 것이 그림 6이다. 그림 6을 보면 Peclet 수가 증가함에 따라 전반적으로 오차가 증대하고 있음을 알 수 있다. Peclet 수가 20미만인 경우에는 제시된 방법 모두가 좋은 결과를 보이고 있어서 도시하지 않았다. 하지만 Peclet 수가 500에서는 Hermite 5차 보간다항식을 이용하는 방법을 제외한 다른 방법은 상당한 오차를 포함하고 있음을 알 수 있다.

◀ 그림 5. Courant 수의 변화에 따른 각 모형의 계산결과, Peclet 수=500 : (a)3-L ; (b)4-L ; (c)5-L ; (d)3-HP ; (e)5-HP

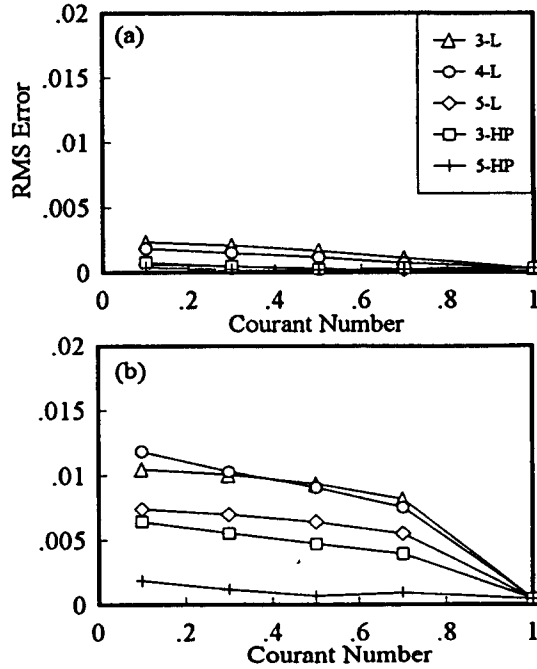
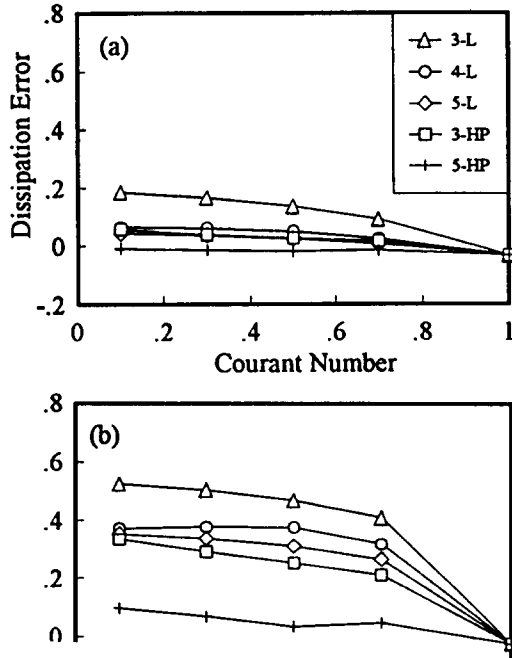


그림 6. Rms Error : (a)Pe=20 ; (b)Pe=500

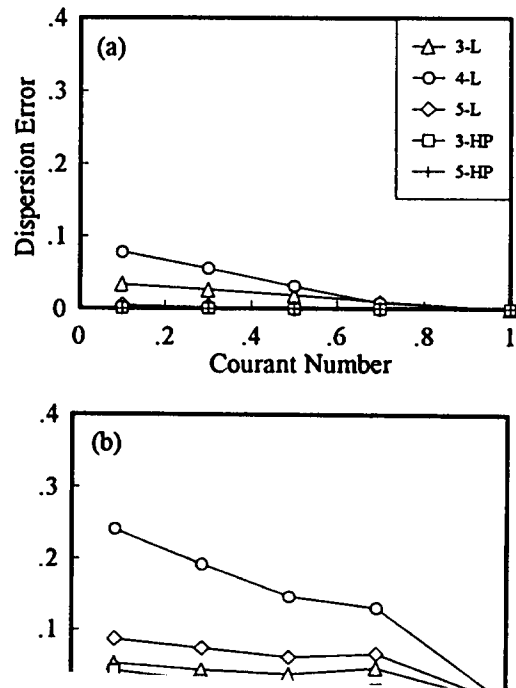


각 방법의 Dissipation Error를 도시한 것이 그림 7이다. 그림 7의 결과를 보면, Peclet 수가 20인 경우 수치확산의 정도가 Lagrange 3차 방법을 제외한 모든 방법이 5%를 넘지 않으므로 별 문제가 되지 않는다. 하지만 Peclet 수가 500인 경우는 Hermite 5차 보간다항식을 이용하는 방법을 제외하면 모든 방법이 과도한 수치확산을 보이고 있음을 알 수 있다.

각 방법의 Dispersion Error를 도시한 것이 그림 8이다. Peclet 수가 20이상인 경우 Lagrange 4차 보간다항식을 이용하는 방법은 과도한 수치진동을 보이고 있음을 확인할 수 있다. Hermite 5차 보간다항식을 이용하는 경우가 가장 좋은 거동을 보이고 있다.

#### 4. 요약 및 결론

1차원 종확산방정식의 수치해를 구하는 방법으로 ELM을 사용하였다. 이 모형에서 이송방정식은



특성곡선법을 사용하여 해를 구하고 확산방정식은 Crank - Nicholson 방법을 사용하여 해를 구하였다. 이송방정식의 풀이에 필요한 보간법으로 Lagrange 3, 4, 5차 및 Hermite 3, 5차 보간다항식을 사용하여 각 방법에 의한 해의 거동을 분석하였다. 분석결과 다음과 같은 결론을 도출하였다.

(i) 1차원 종확산방정식의 해석에 있어서 확산이 지배적인 경우에는 본 연구에서 제시한 어느 방법을 써도 정확한 해를 구할 수 있다.

(ii) 전반적인 해의 거동에 있어서 Lagrange 5차 보간다항식을 이용하는 방법과 Hermite 3차 보간다항식을 이용하는 방법은 유사한 정도의 정확성을 보이고 있다.

(iii) 이송이 지배적인 경우(Peclet 수 = 500)에는 Hermite 5차 보간다항식을 이용하는 방법이 가장 해와 일치하는 거동을 보여주었고 다른 보간다항식을 이용하는 방법은 상당한 수치확산을 보여주고 있다.

(iv) 일반적으로 Hermite 보간법을 적용하는 것이 우수한 정확도를 확보할 수 있으나, Hermite 보간다항식을 이용하는 경우에는 한 단계의 시간을 진행하기 위해서 도함수에 대한 추가적인 3중대각 행렬을 풀어야 하기 때문에 실행시간이 길어진다 단점을 가지고 있다.

## 사 사

본 논문은 1992~1993년도 수암장학문화재단의 지원으로 이루어졌습니다.

## 참 고 문 헌

강 주환, 이 길성(1987). "대류 분산 모형에 관한 유한차분근사의 특성", 대한토목학회 논문집, 제 7 권, 제 4 호, pp.147-157.

서 일원, 김 대근(1993). "이송 확산방정식에 관한 Eulerian-Lagrangian Method의 거동해석", 제 35 회

을 이용한 연안해역의 확산해석", 한국해양 해양공학회지, 제 5 권, 제 3 호, pp.173-181.

전 경수, 이 길성(1993). "Eulerian-Lagrangian 혼합모형에 의한 종확산 방정식의 수치해법", 한국수문학회지, 제 26 권, 제 3 호, pp.137-148.

전 경수, 이 길성(1994). "종확산방정식에 대한 Eulerian-Lagrangian 연산자 분리방법", 대한토목학회논문집, 제 14 권, 제 1 호, pp.131-141.

Abbott, M.B. and Basco, D.R. (1989). *Computational Fluid Dynamics : An Introduction for Engineers*, Longman Scientific & Technical, London.

Baptista, A.E.M., Adams, E.E. and Stolzenbach, K.D. (1984). "Eulerian-Lagrangian Analysis of Pollutant Transport in Shallow Water", Ralph M. Parsons Laboratory Aquatic Sciences and Environmental Engineering Department of Civil Engineering Massachusetts Institute of Technology Report No. 296.

Cheng, R.T., Vinenzo, C., and Nevil, M. (1984). "Eulerian-Lagrangian Solution of the Convection-Dispersion Equation in Natural Coordinates", *Water Resources Research*, 20(7), pp. 944-952.

Holly, F.M., and Preissmann, A. (1977). "Accurate Calculation of Transport in Two Dimensions", *ASCE, J. Hyd. Div.*, 103(11), pp.1259-1277.

Holly, F.M., and Usseglio-Polatera, J.M. (1984). "Pollutant Dispersion in Tidal Flow", *J. Hyd. Eng. ASCE*, 110(7), pp.905-926.

Jinn-Chuang Yang and Euan-Luang Hsu (1991). "On the Use of the Reach-Back Characteristics Method for Calculation of Dispersion", *International J. for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 12, pp.

tive Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng.*, Vol. 19, pp.59-98.

Noye, J. (1987). *Numerical Modeling: Application to Marine System*, ELSEVIER SCIENCE PUBLISHERS B.V.

Taylor, G.I. (1953). “Dispersion of Soluble Matter

in Solvent Flowing Slowly through a Tube”, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 219*, pp.186-203.

Toda, K., and Holly, F.M. (1986). “Hybrid Numerical Method for Linear Advection-Diffusion”, Iowa Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa City, Iowa.

(접수 : 2월 19일)