

〈論 文〉

開水路에서의 常流-射流 遷移領域에 대한 不定流 解析
 Unsteady Flow Analysis through the Subcritical-Supercritical
 Transition Region

한 건 연*, 박 재 홍**, 이 종 태***
 HAN Kun Yeun, PARK Jae Hong and LEE Jong Tae

Abstract □ Numerical instability of Preissmann scheme is studied for unsteady flow analysis in a natural river. The solution strategies to overcome the instability problems are presented in this paper. The main causes of numerical instability of Preissmann scheme are transition flow, abrupt change in cross section, inappropriate roughness coefficients, time step and distance step, rapidly rising hydrograph, dry bed and so on. Transition flow model is proposed for the analysis of the transition flow which changes from subcritical to supercritical or conversely. The subcritical and supercritical reaches are grouped in the channel, then appropriate boundary conditions are introduced for each reach. The transition flow analysis produces stable solutions in calculating through the various transition conditions. Verification with an actual river system is necessary in the future.

요 지 : 자연하천의 부정류에 Preissmann 기법을 적용시 나타나는 수치 불안정성의 원인을 규명하고 불안정성을 극복하기 위한 적절한 대책을 제시하였다. 주된 불안정성의 원인으로는 천이류, 하도단면의 급격한 변화, 부적절한 조도계수, 계산시간 및 거리간격, 급격하게 증가하는 유입수문곡선, 그리고 마른 하상 등이다. 이런 불안정성의 주된 원인은 천이류의 발생과 관계가 있으며 상류-사류가 공존하는 자연 하도에서 천이류를 해석할 수 있는 모형을 제안하였다. 가상하도를 통하여 모의 수치실험을 수행한 결과 전하도구간에 대하여 안정성있게 수렴하고 있었으며, 일관성있는 유량, 수위자료를 얻을 수 있었다. 본 연구의 모형은 앞으로 실제 하천자료를 통해 적용성의 검증이 이루어진다면 천이류로 발생하는 수치계산의 어려움의 해결에 기여할 수 있다고 판단된다.

1. 서 론

하천에서의 부정류 해석에 관한 연구는 많은 수 공학자들에게 오랫동안 연구과제가 되어왔다. 1871년 Saint-Venant가 하도구간 내에서 발생하는 흐름의 물리적 현상을 나타내기 위한 편미분 방정식을 발표한 이래 이 식의 복잡성으로 인해 해석적인 해를 구하기가 어려웠다. Saint-Venant 식을

적용하기 위한 노력으로 하도형상의 단순화와 편미분항의 일부를 무시함으로써 근사적인 해를 구할 수는 있었으나 부정류 흐름의 특성을 정확하게 예측하기 위해서는 이 식에 대한 완전한 수치해가 필요로 하게 되었다.

1970년대 이후 컴퓨터의 보급으로 그동안 해석적으로 해결하지 못했던 많은 수리현상들을 수치해석법으로 계산할 수 있게 되었다. 개수로의 부정류에 대해서도 Saint-Venant 식을 수치해석에 의하

* 경북대학교 공과대학 부교수, 토목공학과
 ** 경북대학교 대학원 토목공학과 박사과정
 *** 경기대학교 공과대학 교수, 토목공학과

여 정확도가 높은 결과를 얻을 수 있었다. 이 식의 해석을 위한 수치 기법에는 특성선법, 유한차분법, 유한요소법 등이 있으며 1차원 해석의 경우 유한차분법이 계산의 정확도와 계산 비용면에서 유리하므로 보편화되어 사용되고 있다. 유한차분법은 양해법과 음해법으로 구분될 수 있는데 양해법으로는 MacCormack 기법, 음해법으로는 Preissmann 기법이 우수한 것으로 연구되어 왔다.⁹⁾

Preissmann 기법¹²⁾은 음해법의 특징인 거리 및 시간 간격의 제약이 작기 때문에 하천에서의 장기간에 걸친 부정류 해석을 위하여 널리 사용되고 있다. Preissmann 기법을 채택하고 있는 범용 프로그램으로는 미국 기상청의 DWOPER¹¹⁾, DAMBRK¹⁰⁾, 미국 지질 조사국의 BRANCH¹⁵⁾, 영국 수리연구소의 FLUCOMP¹⁴⁾ 등이 대표적인 예이다. 자연 하천에서의 1차원 부정류 해석에 있어서 Preissmann 기법은 일정한 조건하에서는 수치적 안정해를 보장하지만 불규칙한 형상을 가진 자연 하도구간에서는 여러가지 요인들에 의해 안정해를 얻지 못하는 경우가 많다. 특히 우리나라 하천은 서구 여러나라에 비해 유황이 불안정하고 하천 개수의 미비등으로 하도 단면의 형상이 매우 불규칙하며 중,소하천은 하도경사가 급하여 수치해석시 불안정의 큰 요인이 되기도 한다.

Preissmann 기법의 적용에 대한 국내의 연구는 이종태등³⁾, 한건연⁵⁾은 댐 파괴 홍수파 해석을 위하여 Preissmann 해석시 double-sweep, fore-sweep 기법을 사용하였고 DWOPER 모형의 적용은 이종태등⁴⁾, 윤용남등²⁾의 각각 한강하류부와 북한강유역에 적용한 바 있다. 또한 박재홍¹⁾은 Preissmann 기법 적용시 수치계산상의 난점을 분석하였고 이를 극복하기 위한 방안을 연구하였다.

따라서, 본 연구에서는 국내 하천에서의 부정류 해석을 위한 Preissmann 기법의 적용시 발생할 수 있는 문제점들의 원인을 분석하고 수치해석적으로 안정한 계산을 수행할 수 있는 천이류 해석 기법을 제시하였다. 또한 산지하천이 많은 국내 하천 유역에 적용할 수 있도록 Preissmann 기법의 확장형 모형으로서 상류-사류의 교차흐름에 적용할 수 있는 천이류 모형을 제안하고 가상하도 구간에 대하여 그 적용성을 입증하였다.

2. Preissmann 기법의 수치 불안정성 검토

개수로에서의 부정류는 크게 강우-유출에 의하여 발생하는 점변부정류와 댐으로부터의 급격한 방류, 댐 및 제방 파괴류, 단파, 홍수시 수공구조물에서의 흐름등과 같은 급변부정류로 구분된다. 이를 해석하기 위한 Saint-Venant 식은 식(1),(2)와 같은 연속 방정식 C 와 운동량 방정식 M 으로 표시된다.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial H}{\partial x} = gA(S_0 - S_f) \quad (2)$$

여기서, Q 는 유량, A 는 단면적, H 는 수심, S₀ 는 하상경사, S_f는 마찰 경사, x 는 거리, t 는 시간을 나타내고 있으며 수심 H 를 수위 h 로 표시하면 $(\partial H / \partial x - S_0)$ 항은 $\partial h / \partial x$ 로 기술된다.

Preissmann 기법의 발산은 주로 흐름과 관련된 여러가지 인자들의 변화양상이 크게 나타나는 경우에 주로 나타난다. 저자들의 경험과 관련 문헌^{1), 8)},^{14), 16)}들을 기초로 할때 이 기법의 주요 발산요인은 다음과 같으며 이들의 일부는 서로 연관되어 있는 사항이기도 하다.

① 넓은 홍수터를 갖는 불규칙한 하도 형상

이 경우는 저수로의 수위가 점차 상승하다가 어느 수위에 이르면 홍수터로 흐름의 수면폭이 갑자기 증가하는 경우에 발생하기 쉬운 발산에 해당된다. 이 경우 Jacobian식인 운동량 식 M 의 수위 h 에 대한 미분값 dM/dh의 식에 하폭 B 의 수위 h 에 대한 미분값 dB/dh항이 존재하는데 수로내에서 수면폭이 갑자기 증가하게 되는 저수로의 수위에 따른 수면폭의 급격한 변화 때문에 dB/dh값이 갑자기 변하게 되고 이것은 결국 dM/dh와 dS_f/dh의 값에 영향을 주게되어 수치적 불안정성이 나타난다. 또한 수위와 동수반경 및 유량의 관계가 갑자기 변화하므로 이값은 dS_f/dh, dS_f/dQ에 큰 변화를 주어 발산에 이르게 된다. 이러한 계산

상의 어려움을 극복하기 위하여 마찰 경사를 통수능의 향으로 표시하고, 이를 저수로부와 좌우안의 홍수터를 분리하여 처리하면 수위의 상승에 따라 유량이 홍수터로 퍼져가면서 수위와 통수능의 관계 변화는 평활하게 되어 불안정을 피할 수 있다.

② 흐름이 한계류에 접근할 경우

Froude수 1인 한계류는 주어진 유량에 대하여 비에너지가 최소인 흐름으로 이 경우 조건식은 $Q^2B/gA^3=1$ 이 된다. 이제 점변류 방정식 $(dH/dx = (S_0 - S_f)/(1 - F^2))$ 에 한계류의 조건식을 도입하면 점변류 방정식의 분모는 0 이 됨을 알 수 있고 거리에 대한 수심의 변화 dH/dx 가 무한대가 되므로 흐름이 불안정하게 된다. 운동량 방정식의 dH/dx 항은 흐름이 한계류에 가까워짐에 따라 작은 수위의 변화에도 큰 dH/dx 의 변화를 유발하게 되어 발산의 요인이 된다. 이 경우의 수치 불안정성은 천이류의 경우와 연결시켜 고려되어야 할 사항으로서 천이류 모형에 의하여 해결될 수 있다.

③ 단면이 급확대 또는 급축소되는 경우

단면의 급확대 또는 급축소로 인한 적절한 계산 거리를 선택하는 기준은 다음과 같다.

첫째로, Vedernikov 수와 관련되어 단면의 축소 및 확대와 관련된 사항으로 다음과 같은 조건들을 만족해야 한다.^{8), 14)}

점축소 단면 : $0.26 < \mu_c < 0.98$
 $\mu_c = 1 - (\Delta x/L)(1 - \mu^*)$ (3)

점확대 단면 : $1.1 < \mu_c < 2.0$
 $\mu_c = 1 + (\Delta x/L)(\mu^* - 1)$ (4)

여기서, L은 대상 구간의 거리, Δx 는 거리간격, $\mu^* = A_{i+1}/A_i$ 로서 A_i, A_{i+1} 은 인접단면의 통수단면적을 나타내고 있다.

둘째로, 거리간격 Δx , 시간간격 Δt 및 파속 $C (= \sqrt{gD})$ 간에 다음조건이 만족되어야 한다.

$\Delta x \geq C\Delta t$ (5)

거리와 시간 간격을 점차로 줄여 나가면서 절단 오차를 감소시킨다. 일반적으로 작은 시간간격의 Courant수가 위의 조건을 만족한다면 수학적 어려움은 많이 해소된다.

④ 부적절한 조도계수 및 조도계수-유량의 관계
 부적절한 조도 계수는 수치해석상 문제를 야기시킬 수 있다. 우선 조도계수는 자연하천의 실제값보다 너무 크거나 작은 값이 사용되어서는 안된다. 유량이 작은 초기 조건에서 부적절한 조도계수 n 값은 S_f 식이 포함된 함수식을 계산할 때 Newton-Raphson 반복계산에서의 주요한 발산 원인이 될 수 있다. 또한 조도계수-유량(수위)의 관계가 적절하지 못한 경우에도 모형이 수렴하지 못한다. 즉, 다양한 하상조건의 변화에 따른 조도계수의 급격한 변화는 dn/dh 나 dn/dQ 값에 급격한 변화를 줌으로써 이는 dS_f/dQ , dS_f/dh , dM/dQ , dM/dh 값에 큰 영향으로 작용할 수 있으며 이로 인한 수치적으로 불안정을 초래할 수 있다. 한편 한계경사는 식(6)과 같이 기술된다.

$S_c = \frac{gn^2}{D^{1/3}}$ (6)

여기서, D는 수리수심, g는 중력가속도, n은 조도계수이다. 식(6)에 보는바와 같이 S_c 는 n값에 강하게 정비례하고 D값에는 약하게 반비례한다. 따라서 초기흐름이 사류일 경우 유량이 증대됨에 따라 D가 커진다 할지라도 홍수터내의 수풀이나 나무 등에 기인하여 증대된 n 값을 갖는 홍수터에서의 흐름은 사류가 발생되기 위해서는 n값이 비교적 작게 나타나는 저수로의 흐름보다는 급격한 경사를 요구한다. 즉, 식(6)에서 홍수터를 가진 수로의 경우 점차적인 n값의 증가는 흐름이 사류에서 상류로 변화하는 원인이 된다는 것을 보여주고 있다. 또한 조도계수가 모든 흐름의 수심에 대하여 일정하게 고정되어 있을때 유량이 작은 경우 하도 저면 경사의 영향으로 상류상태였다가 유량증가로 D가 증가하면 사류로 바뀌게 된다. 그러므로 실제 적용에 있어 n값과 관련된 불확실성의 한계내에서 추정된 n값의 미소한 변화를 가함으로서 천

이류가 제거되고 계산이 안정성있게 수행될 수 있다.

⑤ 부적절한 경계조건

자연하천에서 홍수가 발생했을 경우 상, 하류단의 수위, 유량자료가 충분치 못할 경우가 많다. 예를 들어, 이러한 경우 수문학적 방법으로 추정할 유량을 하류단에서의 유량경계조건으로 적용할 경우 이 방법은 흐름의 관성력을 무시하였기 때문에 실제로 발생되었던 물리적인 유량과 큰 차이가 나게 되어 부적절한 경계조건이 될 수도 있다.

⑥ 마른하도

초기 유량이 너무 작은 경우나 마른 하도구간에 홍수파가 전달될 경우에는 흐름 선단부의 수면의 기울기가 거의 무한대가 되는 불연속구간이 나타나고 큰 마찰저항을 받게되어 이 기법의 수렴이 어렵게 된다. 이때 불연속 구간이 짧을 경우에는 이 구간에 한정하여 별도의 계산과정을 추가하는 것이 효과적이다.

이상에서 설명한 Preissmann 기법의 주요 발산요인과 그 해결방안을 요약하면 표 1 과 같다.

표 1. 발산요인과 그 해결방안

발산을 일으키는 경우	발산 요인	해결 방안
1. 넓은 홍수터를 가진 불규칙한 하도	하도 단면의 불연속성	주수로와 홍수터를 분리, cubic spline 보간방법 사용
2. 흐름이 한계류에 접근할 경우	한계류의 조건	한계류 발생점에 내부 경계 계산조건 도입
3. 부적절한 조도계수, 조도계수-유량관계	부적절한 조도계수 산정	실제 상황에 맞는 조도계수의 조정
4. 마른 하도 구간	선단부의 불연속 구간	특성선법 도입 또는 기저유량 증가
5. 천이류(transition flow)	한계류	한계류 발생점에 내부 경계 계산조건 도입
6. 급격하게 증가하는 유입 및 유출수문곡선	급변하는 유량 및 수위	수문 곡선 상승부의 계산시간 간격의 축소 조정
7. 단면이 급확대 급축소되는 경우	상류 및 사류 발생	계산거리 간격의 축소
8. 부적절한 경계조건	수문학적 방법의 유량산정	실측 자료의 사용
9. 부적절한 거리 시간 간격	절단오차의 증대	본문에 제시된 기준을 활용
10. Newton-Raphson 방법에서의 수렴성	부적절한 predictor 및 좁은 수렴반경	정확한 predictor 활용하거나 또는 Muskingum-Cunge 방법을 보조적 수단으로 활용

3. 천이류에 대한 수치 안정성 해석

하천에서의 부정류해석을 위한 식(1),(2)의 Saint-Venant 식은 자연하천의 광폭구형단면의 경우 매트릭스 형태로 기술하면 식(7)과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} H \\ UH \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (gH-U^2) & 2U \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} H \\ UH \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ gH(S_f - S_0) \end{bmatrix} = \{0\} \quad (7)$$

식(7)에서 수심 H 와 유량 UH 는 각각 식(8), (9)식과 같이 표시된다.

$$H = H' + \Delta H \quad (8)$$

$$UH = U'H' + \Delta q \quad (9)$$

여기서, $\Delta H, \Delta q$: 등류 상태에 대한 수심 및 유량의 변동치

H' : 등류 수심 U' : 등류 유속

식(8),(9)을 식(7)에 대입하고 유량 및 수심에 대한 식(10)과 같은 무차원 변수 q, y와 S_f에 대하여는 Chezy 식 $U' = C \cdot (gH'S_0)^{1/2}$ 을 도입하면 연속방정식과 운동량방정식에 대하여 식(11), (12)와 같이 얻게된다.

$$q = \frac{\Delta q}{\sqrt{gH'H'}} \quad y = \frac{\Delta H}{H'} \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{2U'}{\sqrt{gH'}} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{gH' - U'^2}{gH'} \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= \frac{L}{C^2 H'} \left(\frac{U'^2 y}{gH'} - \frac{2qU'}{\sqrt{gH'}} + \frac{2U'y}{gH'(2y+1)} \right) \quad (12)$$

또한 $Fr = \frac{U'}{\sqrt{gH'}}$, $\beta = \frac{L}{H'C^2}$ 로 하여 식(12)를 무차원식으로 표시하면 다음과 같은 식(13),(14)로 정리된다.

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + 2Fr \frac{\partial q}{\partial t} + (1-Fr) \frac{\partial q}{\partial x} \\ = \beta (Fr^2 y - 2q Fr + \frac{2yFr^2}{2y+1}) \end{aligned} \quad (14)$$

식(13),(14)를 매트릭스식으로 나타내면 식(15)와 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{\phi\}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-Fr^2 & 2Fr \end{bmatrix} \frac{\partial \{\phi\}}{\partial x} \\ + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Fr^2(1+\alpha) & 2Fr \end{bmatrix} \{\phi\} = \{0\} \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,

$$\alpha = \frac{2}{2y+1}, \quad \{\phi\}^T = \{y, q\}$$

식(15)에서 나타나는 비선형항들을 소거하기 위해 β 를 0으로 놓으면 식(15)는 식(16)과 같은 천수중력파에 관한 선형 유송방정식(linear convective equation)이 된다.

$$\frac{\partial \{\phi\}}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-Fr^2 & 2Fr \end{bmatrix} \frac{\partial \{\phi\}}{\partial x} = \{0\} \quad (16)$$

식(13)를 Preissmann기법에 의하여 차별화하여 $y_j^n = \xi^n e^{ijk}$, $q_j^n = \eta^n e^{ijk}$ 로 놓고 매트릭스 기법에 의한 안정도 해석을 실시하기 위하여 정리하면 식(17)과 같이 나타난다.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^{n+1} \\ \eta^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^n \\ \eta^n \end{bmatrix} \quad (17)$$

여기서,

$$b_{11} = -0.5 + 0.5e^k$$

$$b_{12} = \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} + \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} e^{ik}$$

$$b_{13} = 0.5 + 0.5e^{ik}$$

$$b_{14} = (1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} - (1-\theta) \frac{\Delta t}{\Delta x} e^{ik}$$

$$b_{21} = -\theta(1-Fr^2) \frac{\Delta t}{\Delta x} + \theta(1-Fr^2) \frac{\Delta t}{\Delta x} e^{ik}$$

$$b_{22} = \left(0.5 - 2\theta Fr \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + \left(0.5 + 2\theta Fr \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) e^{ik}$$

$$\begin{aligned} b_{23} = (1-\theta)(1-Fr^2) \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ - (1-\theta)(1-Fr^2) \frac{\Delta t}{\Delta x} e^{ik} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{24} = (0.5 + 2(1-\theta)Fr) \frac{\Delta t}{\Delta x} \\ + \left(0.5 - 2(1-\theta)Fr \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) e^{ik} \end{aligned}$$

여기서, j 는 거리구간, n 과 $n+1$ 은 각각 시간대를 나타내며 i 는 $\sqrt{-1}$, k 는 $\sigma \Delta x$ 로서 $\sigma = 2\pi/L$ 이고, L 은 파장을 각각 나타낸다.

식(15) 식에 대한 안정도 해석에 관한 식은 식(18)과 같이 표시된다.

$$G = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서, G : 진폭 매트릭스 (amplification matrix)

이제 진폭 매트릭스의 고유치(eigenvalue)를 r_i ($i=1,2$)라 할때 r_i 의 허수부를 $\text{Im}[r_i]$, 실수부를 $\text{Re}[r_i]$ 라 하면 수치 감쇠도와 파속비는 각각 식(19),(20)과 같이 표시되어 수치해의 안정해석을 실시할 수 있겠다

$$D_i = \{\text{Re}(r_i)^2 + \text{Im}(r_i)^2\}^{1/2} \quad (19)$$

$$R_i = \frac{-1}{Crk} \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}(r_i)}{\text{Re}(r_i)} \right] \quad (20)$$

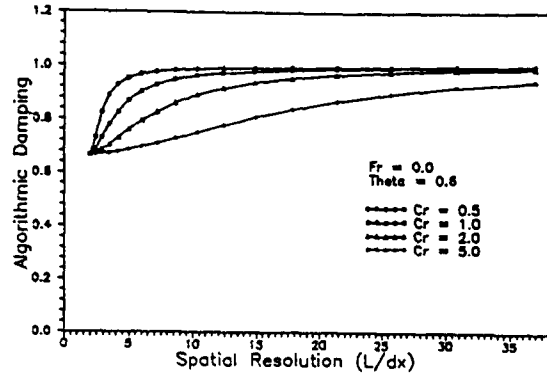
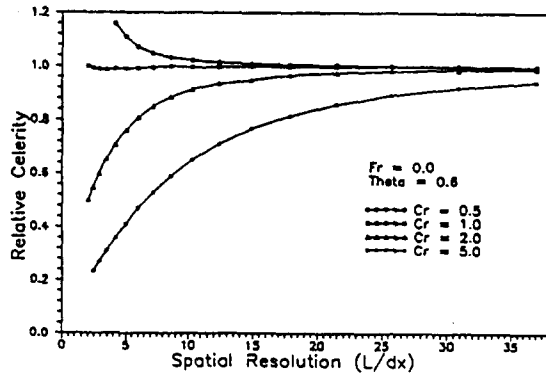


그림 1. 수치안정성 해석 결과($Fr=0.0, \theta=0.6$)

여기서, D_i 는 수치 감쇠도, R_i 는 과속비, Cr 은 Courant수를 각각 나타내고 있다.

위에서 유도된 식(19),(20)의 안정해석식을 기초로 하여 Preissmann 기법이 한계류 상태에 접근함에 따라 나타나는 수치 안정 특성을 분석하기 위해 Fr 에 대한 amplitude portraits와 phase portraits를 도시하였다. 일반적으로는 진행파에 대하여 수치해석적 특성을 도시하고 있으나 진행파는 Fr 에 관계없이 수치적 특성이 일정하게 나타나기 때문에 Fr 이 1.0인 한계류에 대한 수치적 특성을 역행파를 중심으로 검토하였다. 먼저 진행파의 특성을 알기위해 역행파와 진행파의 특성이 동일하게 나타나는 Fr 이 0.0일 경우 $\theta = 0.6$, $Cr = 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ 에 대해 그림 1에서 도시하였다. 그림에서 나타난 바와 같이 $Fr=0$ 인

경우 Cr 이 증가되고 θ 가 증가됨에 따라 감쇠효과가 크게 나타났으며 $Cr=1$ 일 때는 위상오차는 0.0으로 나타났고 Cr 이 1.0보다 작은 경우는 수치과속이 빠르게 전파되었으며 Cr 이 1.0보다 클 때는 반대현상을 나타내었다. 그림 2는 $\theta = 0.6$, $Fr = 0.5, 2.0$ 일때 역행파에 대하여 각각 도시하였다. Cr 이 0.5, 1.0, 2.0에서는 수치과속이 짧은 파장에서는 빠르게 전파되고 Cr 이 5.0일 경우에는 반대로 나타났다. 그림 3은 한계류에 가까운 Fr 이 0.99인 경우, $\theta = 0.6$, $Cr = 0.5, 1.0, 2.0, 5.0$ 에 대해 나타내었는데 진폭은 비감쇠 특성을 보였으며 파장이 길고 Cr 이 작을수록 위상오차가 커져감을 보여주어 모형을 불안정해짐을 알 수 있었다. 그림 4,5에서와 같이 θ 를 0.6에서 0.95까지 증가시켜 보았으나 한계류에서는 θ 의

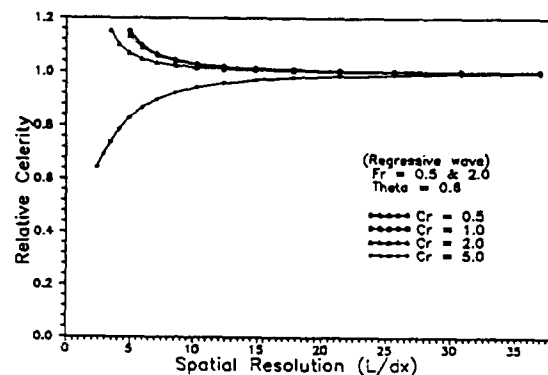
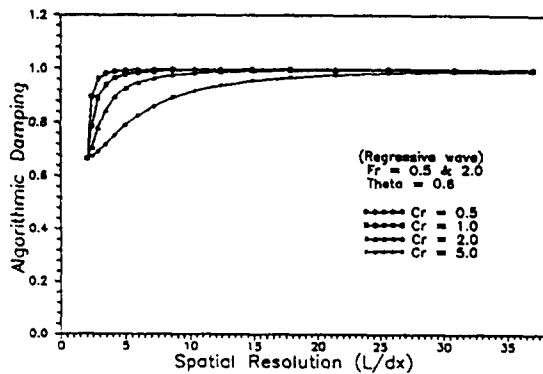


그림 2. 수치안정성 해석 결과($Fr=0.5, 2.0, \theta=0.6$)

증가가 불안정성을 극복하는데 큰 효과는 발휘하지 못하였다. 또한 상대과속에 있어서도 θ 값의 증가에 따라 수치용요 현상이 큰 변화를 보이고 있지 않아 θ 값의 증가만으로 한계류의 문제를 처리하는데 제한이 있음을 알 수 있었다. 이를 극복하기 위하여 한계류 발생지점에 내부 경계조건을 도입하여 상류,사류가 교차하는 흐름을 해석하는 천이류 모형의 필요성이 대두되었다.¹⁾

4. 천이류의 계산 알고리즘

천이류에 대한 계산 알고리즘은 초기조건에 관한 과정과 부정류에 관한 과정으로 구성된다.

초기조건에 수위와 유량을 구하기 위해서 먼저 각 단면에 대해 등류수심과 한계 수심을 구하고 등류수심이 한계수심보다 큰 단면에서의 흐름은 常流 구간으로 구분하고 작은 경우에 射流 구간으로 구

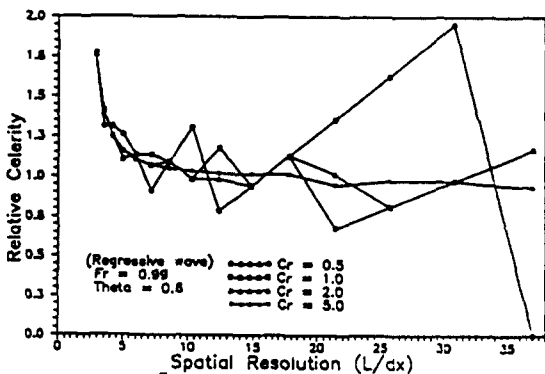
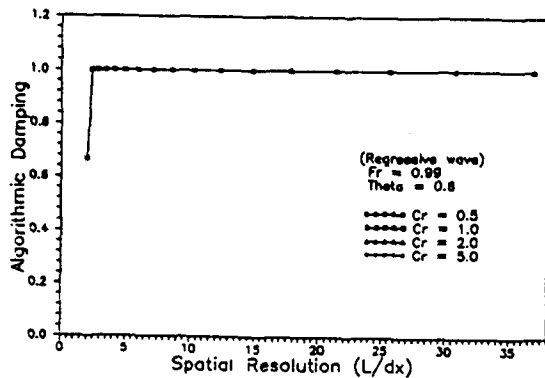


그림 3. 수치안정성 해석 결과(Fr=0.99, $\theta=0.6$)

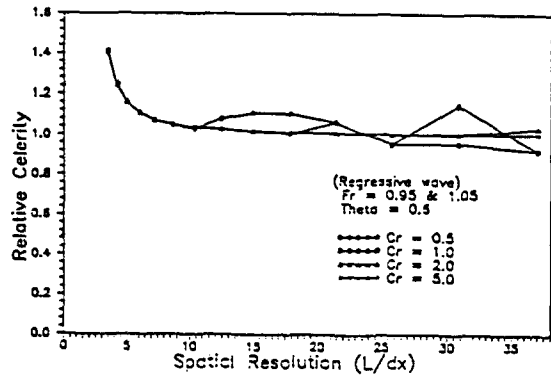
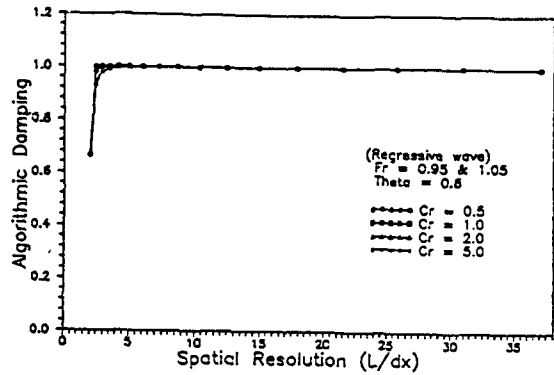


그림 4. 수치안정성 해석 결과(Fr=0.95, 1.05, $\theta=0.6$)

분한다. 常流 구간의 경우에는 하류단 경계수위로 부터 부정류 배수곡선의 계산이 시작되어 그 계산은 上流 방향으로 사류가 발생하는 영역까지 진행된다. 만약 하류단 경계에서 射流가 발생하면 射流 흐름을 갖는 인접하는 모든 단면의 최상류단의 등류수심으로부터 하류 방향으로 계산을 수행한다.

시간이 증가함에 따른 부정류에 관한 계산은 우선 각 단면에서 계산된 Fr 을 사용하여 常流 단면과 射流 단면으로 구분한다. 저자들의 계산 경험으로 판단하면 Fr 이 0.95 이하인 이웃하는 常流 단면들을 常流 구간으로 구분하고 Fr 이 1.05 이상인 이웃하는 단면들은 射流 구간으로 구분하며, 그 사이의 Froude 수의 단면들을 한계 구간으로 구분하는 것이 타당한 것으로 사료되었다. 그러나 常流 구간사이의 한계 단면은 常流 구간으로 해석하며 射流 구간사이의 한계 단면은 射流 구간으로 해석한다. 常流 및 射流 구간의 상류단과 하류단 경계

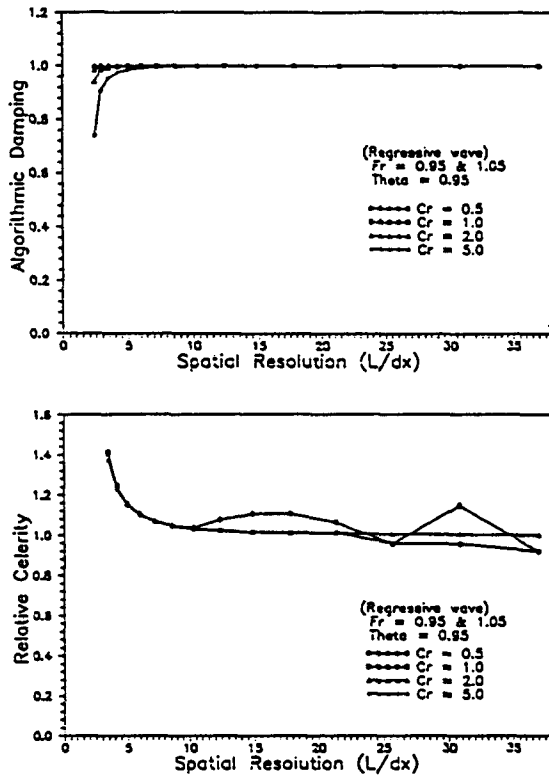


그림 5. 수치 안정성 해석 결과(Fr=0.95, 1.05, $\theta = 0.95$)

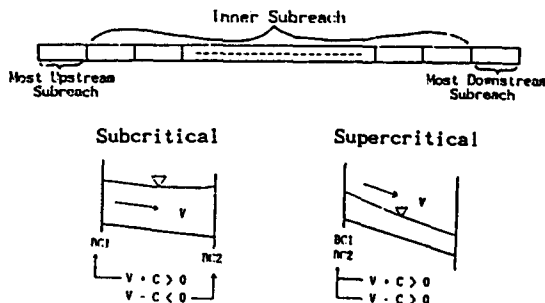


그림 6. 천이류 해석에서의 경계조건의 위치

는 Saint-Venant 방정식을 적용하는 영역을 결정하는데 사용되어진다. 그림 6 는 천이류 해석에서의 경계조건의 위치를 도시하였다.

각 시간대에서 해는 최상류단으로부터 시작하여 하류 방향으로 구간별 계산이 진행된다. 각

구간에 대한 상,하류단 경계조건은 다음의 과정에 따라 결정될수 있다.

① 최상류 구간이 常流이면 상류 경계 조건식은 식(21)이고 하류 경계는 식(22)이다. 그것은 인접하는 하류 구간이 射流가 되므로 흐름이 한계 상태를 통과하기 때문에 한계류에 대한 조건식이 사용되었다.

$$Q_u = QI_u(t) \tag{21}$$

여기서, Q_u 은 최상류단 단면에서의 유량이고, $QI_u(t)$ 는 최상류단 유입수문곡선이다.

$$Q_d = \frac{g^{1/2} A_d^{3/2}}{B_d^{1/2}} \tag{22}$$

여기서 Q_d 는 常流구간의 하류단 유량조건이다.

② 최상류 구간이 射流이면 상류단 경계조건은 식(22)가 되고 射流 구간에서는 하류부에서 발생한 중력파가 상류 방향으로 전파하지 못하기 때문에 상류 구간에서의 하류 경계조건은 필요하지 않게 되고 식(23)의 수위-유량에 의한 경계조건식이 사용된다.

$$Q_u = K_1 \left[\frac{h_1 - h_2}{\Delta x} \right]^{1/2} \tag{23}$$

여기서, K_1 은 상류단 첫구간의 통수능으로서 $K_1 = \frac{1}{n} A_1 R_1^{2/3}$ 이다

③ 최상,하류단 구간이 아닌 내부구역이 射流이면 상류단 경계 방정식은 식(24),(25)와 같다.

$$Q_u = Q(t) \tag{24}$$

$$h_1 = h(t) \tag{25}$$

여기서, $Q(t)$ 는 상류부의 常流 구간 마지막 하류단면에서 계산된 유량이고, $h(t)$ 는 상류단의 常流 구간 마지막 하류단면에서 계산된 한계수위이며 첨자 1은 내부구역의 상류단 단면을 나타낸다.

④ 반대로 내부구역이 常流 구간이면 식(26)가 상류단 경계조건으로 사용되어지고 하류단 경계조

표 2. 천이류 모형의 계산 알고리즘을 위한 경계조건

	Most Upstream Reach		Inner Reach		Most Downstream Reach	
	Subcritical	Supercritical	Subcritical	Supercritical	Subcritical	Supercritical
Subreach Upstream B. C.	$Q_u = QI(t)$	$Q_u = QI(t)$ $Q_u = K \left\{ \frac{h_u - h_{u+1}}{\Delta x} \right\}^{1/2}$	$Q_u = Q(t)$	$Q_u = Q'(t)$ $h = h'(t)$	$Q_u = Q'(t)$	$Q_u = Q'(t)$ $h = h'(t)$
Subreach Downstream B. C.	$Q_d = \frac{g^{1/2} A_i^{3/2}}{B_i^{1/2}}$	Not Required	$Q_d = \frac{g^{1/2} A_i^{3/2}}{B_i^{1/2}}$	Not Required	the same as the standard subcritical flow computa- tion	Not Required

Remark) $QI(t)$: the specified flow at time t
 $Q'(t)$: the most recently computed flow at the last cross section of the upstream sub-critical sub-reach
 $h'(t)$: the computed critical water surface elevation of downstream most (critical section) of the upstream subcritical sub-reach.

건은 식(22)가 될 수 있겠다.

$$Q_u = Q(t)_u \tag{26}$$

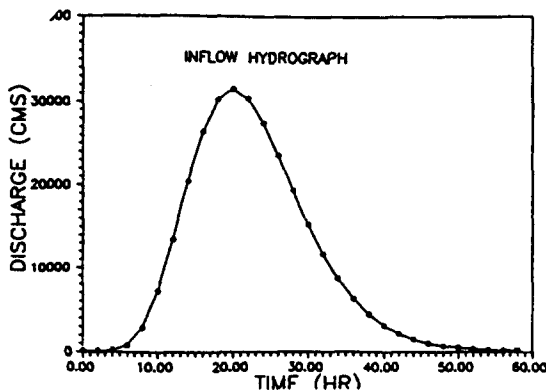


그림 7. 천이류 해석을 위한 유입수문곡선

여기서, $Q(t)_u$ 는 상류단 射流 구간의 마지막 단면의 유량이다.

⑤ 최하류 구간이 常流구간이면 식(26)이 상류단 경계조건으로 사용되고, 하류단 경계조건은 기존의 常流 계산시의 경계조건을 활용할 수 있다.

⑥ 최하류단 구간이 射流 구간이면 식(24),

(25)가 상류단 경계 조건식이며 하류단 경계조건은 필요하지 않게 된다.

천이류에 대한 상류 및 사류 구간에서의 상,하류단 경계조건을 요약하면 표 2 와 같다.

사류 구간의 하류단 단면과 상류 구간의 상류단 단면사이에는 도수(hydraulic jump) 가 발생하게 되는데 도수의 이동을 포함한 그 계산 과정은 식 (27),(28)과 같다.

$$h_u \leq h_c : \text{도수는 상류부로 이동함} \tag{27}$$

$$h_u \geq h_c : \text{도수는 상류부로 이동하지 않음} \tag{28}$$

여기서, h_c, h_u 은 상류 구간 첫번째 단면에서의

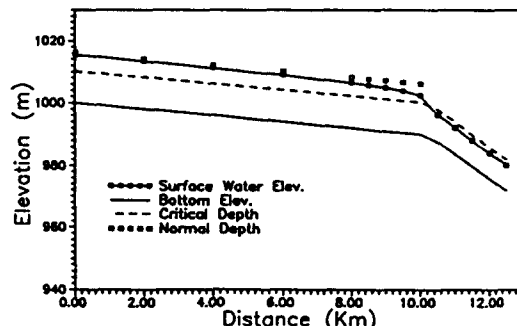


그림 8. 상류-사류구간 수위 비교($t=22hr$)

수위로서, h_c 는 사류 구간의 마지막 단면의 수위로 부터 외삽 과정에 의하여 계산된 값이고 h_o 는 식(29)와 같은 운동량 방정식에 의하여 계산된 값이다.

$$\left(\frac{Q^2}{gA_1} + h_{r1}A_1\right) - \left(\frac{Q^2}{gA_2} + h_{r2}A_2\right) = 0 \quad (29)$$

여기서, h_r 는 수면에서 단면의 무게 중심까지의 거리이고, 첨자 1 은 射流 구간 단면, 첨자 2는 常流 구간 단면을 나타낸다.

식(29)는 bisection 법이나 Newton-Raphson 방법에 의하여 그 해를 구할 수 있다. 도수 구간의 해석에 있어서는 계산상의 어려움을 피하고 정확한 도수의 위치를 판단하기 위해서는 작은 거리간격 Δx 의 선정이 바람직하다.

5. 적용 및 비교 검토

천이류 모형의 적용성을 검토하기 위하여 하폭이

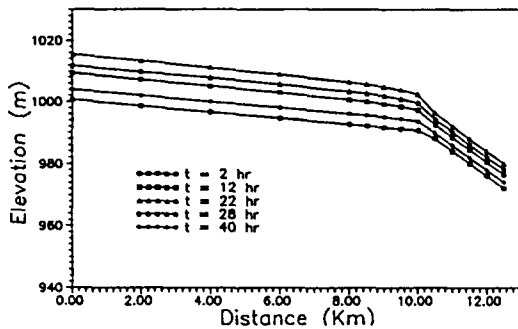


그림 9. 상류-사류구간 시간별 수위 변화

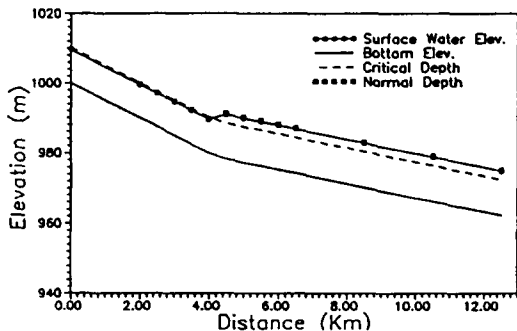


그림 10. 사류-상류구간 수위 비교(t=22hr)

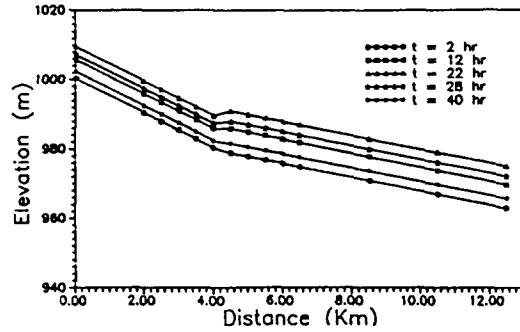


그림 11. 사류-상류구간 시간별 수위 변화

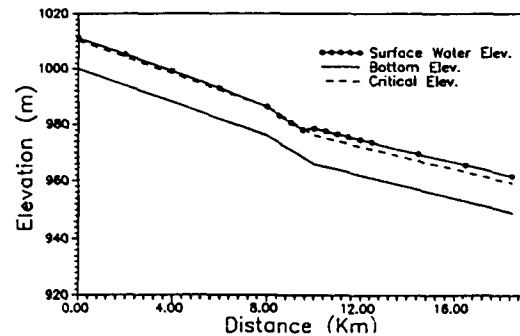


그림 12. 상류-사류-상류구간 수위변화(t=22hr)

300m, 하도구간거리가 13km, 조도계수 0.030인 직사각형 단면수로에서 상류-사류, 사류-상류 흐름에서 수치 실험을 실시하였다. 상류단에 그림 7 과 같은 유량수문곡선을 부여하였으며 상류와 사류를 교차발생시키기 위해 하도경사를 변화시켰다. 한계류의 통과지점을 정확히 알기 위해 하도경사가 변화하는 천이영역에서의 급변점 구간은 계산 거리간격을 작게 하여 정확한 한계류 발생지점을 파악하였다.

상류-사류 구간에서는 하상경사를 각각 0.002, 0.007 로 하였고 초기수위는 0.64 m 의 조건하에서 해석하였는데 그림 8에서와 같이 흐름이 상류에서 한계류를 통과하여 사류로 변화하는 것을 알 수 있었다. 그림 9에서와 같이 초기에는 전구간에 걸쳐 상류 흐름이었다가 유량이 증가함에 따라 하도구간의 하류부에서 사류가 발생하였고 한계수심 주위에서도 안정한 해를 얻을 수 있었다.

사류-상류구간에서는 하상경사를 0.005, 0.002

로 하였고 초기수위는 0.44m의 조건하에서 해석하였다. 그림 10에서와 같이 본 모형에서 계산된 수심은 한계수심을 안정하게 통과하고 있었고 이 경우에도 그림 11에서와 같이 초기에는 전 구간에서 상류 흐름이었다가 시간이 지남에 따라 상류부에서 사류가 발생하고 경사 급변점에서 도수현상을 나타내고 있어, 하도전 구간에서 발생하는 수리학적 현상을 잘 반영하고 있다.

상류-사류-상류의 교차구간에 대한 해석은 하상 경사는 각각 0.003, 0.005, 0.002로 하였고 초기조건은 수위 0.44m로 하였다. 그림 12은 이 구간에 대한 천이류 모형에 의한 계산결과로서 이 경우에도 천이구간에서 안정성있게 계산이 수행됨을 확인할 수 있었다. 앞으로 본 연구모형은 실제 하천에서의 실측자료를 활용하여 모형에 대한 적용성이 검증되어야 할 것으로 판단되었다.

6. 결 론

자연 하천에서 상류-사류의 흐름이 교차하는 천이류에 대한 1차원 부정류 해석을 위해서 Preissmann 기법을 이용한 Saint-Venant 식에 대한 매트릭스 안정성 해석을 실시하였고 amplitude portraits 와 phase portraits 를 통하여 수치안정 특성을 분석하였다. 흐름이 한계류로 접근함에 따라 수치해는 시간 가중치에 관계없이 불안정하게 나타났다. 천이류에 관한 본 모형에서는 상류에서 사류 또는 사류에서 상류로 교차해서 나타나는 하도 구간에 대하여 적절한 경계조건의 도입과 도수부의 처리를 통한 천이류 해석기법을 제시하였으며 기존 모형의 한계류 통과시의 난점을 극복하였다. 가상 하도에서의 수치실험을 통하여 천이류의 경우 Preissmann 기법에 의한 홍수파 해석이 효율적으로 수행되고 있음을 확인하였다. 앞으로 실제 하천 자료를 통하여 본 모형의 검증이 수반되어야 할 것이며, 본 연구는 Preissmann 기법을 사용한 해석모형에 있어 안정된 수치해의 획득면에서 큰 기여를 할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

1. 박재홍,(1993) "자연 하천에서 Preissmann 기법의 수치 불안정성 해석", 경북대학교 대학원, 석사논문.
2. 윤용남, 박무종,(1992) "수리학적 홍수추적에 의한 댐 방류시 하류수위 및 주요 하도구간별 홍수도달 시간의 예측", 한국수문학회 논문집, Vol.25, No.3, pp.115-124.
3. 이종태, 한건연, 이정식,(1986) "Fill Dam의 가상 파괴로 인한 홍수파의 예측 모형", 대한토목학회 논문집, Vol.6, No.4, pp.69-78.
4. 이종태, 한건연, 서병하,(1993) "한강의 홍수규모에 따른 인도교 수위의 조석영향 분석", 한국수문학회 논문집, Vol.26, No.2, pp. 67-77.
5. 한건연,(1987) "하천에서의 홍수파 해석을 위한 수치모형의 개발", 한국수문학회 논문집, Vol. 22, No. 2, pp. 223-231.
6. 한건연,(1990) "댐의 파괴형태와 하도부 양상에 따른 홍수파 전달특성 해석에 관한 연구", 한국수문학회 논문집, Vol. 23, No. 4, pp. 467-476.
7. Abbott, M. B.(1979) "Computational Hydraulics; Elements of the Theory of Free Surface Flows", Pitman, London.
8. Basco, D. R.,(1987) "Limitation of Saint Venant Equation to Model Flood Waves", Hydraulic Engineering : Proceeding of the 1987 National Conference on Hydraulic Engineering, ASCE, pp. 758-763.
9. Chaudhry, M. H.,(1993) "Open-Channel Flow", Prentice-Hall.
10. Fread, D. L.,(1992) "DAMBRK: The NWS Dam-Break Flood Forecasting Model", NWS Report, NWS Office of Hydrology, Silver Spring, MD.
11. Fread, D. L.,(1985) "Channel Routing", in Anderson, M. G. and Burt, T. P. (eds) Hydrological Forecasting, John Wiley and Sons, 437-503.
12. Preissmann, A.,(1961) "Propagation des Intumescences dans les Canaux et Rivieres", 1st Congres de l'Assoc., Francaise de Calcul, Grenoble, pp.433-442.
13. Lyn, D. A. and Goodwin, P.(1987) "Stability of General Preissmann Scheme", Jour. Hydraulic Engineering, ASCE., Vol. 113, 1:16-27.

1. 박재홍,(1993) "자연 하천에서 Preissmann 기법

14. Samuels, P. G. and Skeels, C. P.(1989) "Stability and Accuracy Analysis of Numerical Scheme Modelling Open Channel Flow", Paper presented at Hydrocomp 89, Dubrovnik, Yugoslavia, pp. 13-16.
15. Schaffranek, R. W., Baltzer, R. A. and Goldberg, D. E.,(1981) "A Model for Simulation of Flow in Singular and Interconnected Channels", Technique of WRI, U.S. Geological Survey.
16. Traver, R. G. and Miller, A. C.,(1987) "Modeling Unsteady One Dimension Open Channel Flow Using the Slope Friction Form of the Saint-Venant Equations", Proc. of the 1987 National Conference on Hydraulic Engineering, ASCE, pp. 770-775.
17. Yen, C. L. and Lin, C. H.(1986) "Numerical Stability in Unsteady Supercritical Flow Simulation", Proc. of 5th Congress Asian and Pacific Regional Division, IAHR, August.

(접수 : 12월 10일)