〈論 文〉

降雨-流出模型을 이용한 實時間 洪水豫測(Ⅰ) : 理論과 模型化
Real-Time Flood Forecasting Using Rainfall-Runoff Model(Ⅰ) : Theory and Modeling

정 동 국* 이 길 성**
JEONG Dong Kug and LEE Kil Seong

Abstract□ Flood forecasting in Korea has been based on the off-line parameter estimation method. But recent flood forecasting studies explore on-line recursive parameter estimation algorithms. In this study, a simultaneous adaptive estimation of system states and parameters for rainfall-runoff model is investigated for on-line real-time flood forecasting and parameter estimation. The proposed flood routing system is composed of ϕ-index in the assessment of effective rainfall and the cascade of nonlinear reservoirs accounting for translation effect in flood routing. To combine the flood routing model with a parameter estimation model, system states and parameters are treated with the extended state-space formulation. Generalized least squares and maximum a posterior estimation algorithms are comparatively examined as estimation techniques for the state-space model. The sensitivity analysis is to investigate the identifiability of the parameters. The index of sensitivity used in this study is the covariance matrix of the estimated parameters.

요 지 : 현재까지 국내의 洪水豫測業務는 과거에 수집된 자료집단을 이용한 變數推定에 의하여 시행되고 있으나, 최근 여러가지 循環推定 알고리즘을 적용한 洪水豫測 또는 變數推定에 관한 많은 연구가 이루어지고 있다. 본 논문은 實時間 洪水豫測 및 變數推定에 관한 연구로서, 특히 降雨-流出模型의 狀態 및 媒介變數의 同時推定에 관한 推計學的 현상을 고려하였다. 홍수예측에 관한 시스템은 ϕ 지수에 의한 유효강우의 산정과 遲滯效果를 고려한 n개의 비선형 저수지모형에 의한 홍수추적으로 구성하였다. 그리고 변수추정모형과 홍수추적 모형를 상호연계하여 변수를 포함하는 擴大 狀態-空間模型으로 狀態 및 媒介變數의 同時推定에 관한 시스템을 구성하였다. 狀態-空間模型에 대한 狀態 및 變數推定技法으로 GLS 추정과 MAP 추정에 대하여 비교 검토하였다. 모형의 식별을 위한 민감도 분석은 추정변수의 공분산 행렬을 사용하였다.

1. 序 論

장마전선과 태풍 등에 의하여 하절기에 집중되는 홍수발생에 대비한 방재업무와 수자원의 효율적인 관리와 운용을 위하여 강우를 포함한 홍수량 산정 및 예측업무의 정도를 높여야 한다. 이를 위한 降雨-流出模型의 실제사용은 모형의 특성에 따라 일반적으로 적용하기는 어렵고 특히 자료의 가용성에 따른 문제점들을 내포하고 있다. 이와 같은 모형화에 의한 降雨-流出模型의 계산결과와 실측자료와의 불일치는 模型의 不確實性(Uncertainty), 入力資料의 不確實性, 媒介變數의 不確實性, 그리고 시스템의 初期狀態 등에 의하여 일어난다. 降雨-流出模型에서 나타나는 다양한 요소에 대해서는 모형화 과정에서 단순화를 기해야 한다. 이를 위하여 공간적으로 分散된 過程(Spatially Distributed Process)을 單純한 過程(Lumped Process)으로 바꾸고 요소들과의 聯關(Interaction)들을 단순화된 함수관계로 나타내야 한다. 이때 나타나는 것이 모형

* 한남대학교 토목공학과 조교수
** 서울대학교 토목공학과 교수

화 오차이다. 입력자료의 오차는 강우와 유입량과 같은 입력자료의 豫測 및 觀測에서 발생하는 오차를 말하며, 시스템의 入力-出力 擧動을 모형의 변수들이 유역의 물리적 특성을 충분히 반영하지 못함으로 인하여 변수에 의한 不確實性이 나타난다.

그리고, 현재까지 국내의 洪水量 算定 및 豫測業務는 수집된 자료집단을 이용한 變數推定(Off-Line Parameter Estimation)에 의하여 시행되고 있는 단계로서, 降雨-流出現象의 여러 조건에 따른 다양성을 반영하지 못하고 있으며, 특히 降雨豫測의 不正確性에 의한 洪水豫測의 精度가 낮으므로 豫測期間(Forecasting Lead Time)의 제약이 따르게 된다. 이러한 문제점들을 보완하기 위하여 최근 외국에서는 降雨-流出模型에 여러가지 循環推定 알고리즘(Recursive Estimation Algorithm)을 적용한 홍수량 산정 또는 변수추정에 관한 연구가 활발히 수행되고 있다. 그러나 국내에서는 이러한 연구가 초기단계에 머물러 있다.

본 論文은 이러한 최근의 연구를 기초로 하여 매시간 입력되는 자료를 사용한 實時間 洪水豫測(Real-Time Forecasting)에 관한 연구로서, 특히 模型의 推計學的 현상(Stochastic Phenomena)을 고려한 降雨-流出模型의 狀態 및 媒介變數의 同時推定에 관한 시스템을 구성하고 그 해법을 제시하였다.

2. 實時間 變數推定에 관한 硏究動向

최근에는 降雨-流出模型에 最適化技法을 적용한 변수추정 방법에 대한 연구가 활발하게 이루어지고 있다. 이는 모형에 의한 유출량의 예측이 조정된 변수의 正確性과 信賴性에 영향을 받기 때문이다. 그리고 주어진 모형에 대한 構造의 識別(Structure Identification) 및 變數推定 등은 적절한 모형의 설정만큼 중요한 역할을 하기 때문이다. 더구나 降雨-流出模型을 사용하여 實時間 洪水豫測을 수행하는 경우에는 수시로 수집되는 최신 자료로써 適應變數推定(Adaptive Parameter Estimation)을 하고, 이를 토대로 精度높은 홍수예측을 함에 있어서 최적화에 의한 變數推定은 매우 중요하다.

국내의 경우에는 Off-Line 변수추정을 Simulation에 의한 연구가 대부분이다. 최적화 기법을 이용한 Off-Line 추정에 관한 연구(남궁달,1985)와 實時間 豫測模型의 구성과 변수추정에 관한 연구(서병하 등,1982 : 서병하와 강관원,1985 : 남선우와 박상우,1992)는 소수에 불과하다. 특히 강우-유출과정의 推計學的 現象(Stachastic Phenomena)을 고려하여 규정된 狀態-空間模型을 이용한 홍수량 및 변수추정에 의한 實時間 洪水豫測에 관한 연구(정동국,1989)는 미비하며, 非線形模型에 적용한 예는 찾아보기 힘들다.

최적화기법을 적용한 변수추정방법은 크게 3가지로 분류할 수 있다. 確率的인 기법으로 Bayesian 추정, 最尤法(Maximum Likelihood, ML) 등이 있고, 間接的인 방법으로 最小自乘(Least Squares, LS)推定 및 制御方法(Control Method)이 있으며, 直接的인 방법으로 代數學的 추정등이 있다.

2.1 確率的인 技法

線形 降雨-流出模型에 대하여 Kalman Filter (KF) 알고리즘에 의한 변수추정에 대한 지금까지의 연구를 정리하면, Jamieson과 Wilkinson (1972)은 댐群의 短期運營方案에 포함된 降雨-流出模型을 1차의 AR(AutoRegressive) 모형에 대하여 KF에 의한 변수추정을 실시하였고, Bras (1976)는 ARMAX(Autoregressive and Moving Average with e⟨ogeneous Input)형태의 時系列模型을 狀態-空間模型(State-Space Model)으로 구성하여 KF에 의하여 변수추정을 수행하였다. Wood와 Szollosi-Nagy (1978)는 時系列模型에 대하여 매개변수를 1차의 AR모형으로 가정하여 KF에 의하여 추정하고 상태추정도 실시하였고, Bolzern 등(1980)은 降雨-流出에 대한 推計學的 模型을 ARMAX 형태로 구성하여 KF에 의한 변수추정 결과를 RLS(Recursive Least Squares) 및 RELS(Recursive Extended Least Squares)에 의한 추정결과와 비교하였다.

그리고 非線形 降雨-流出模型에 대하여 Extended KF(EKF)에 의한 변수추정에 관한 연구로는 Moore와 Weiss(1976)는 非線形貯水池와 線形河

道의 複合模型에 관한 변수추정에 대하여 연구하였고, Kitanidis와 Bras(1980)는 NWSRFS(National Weather Service River Forecast System) 모형을 狀態-空間模型으로 구성하여 EKF에 의한 상태추정 방법을 제시하고 실제유역에 적용하였다. Georgakakos와 Bras(1982)는 非線形 貯水池模型을 統計的線形法(Statistical Linearization Method)을 통한 EKF에 의하여 변수추정을 수행하였고, Takara 등(1983)은 非線形 降雨-流出模型을 推計學的 狀態-空間模型으로 구성하고 有色雜音(Color Noise)을 고려하여 EKF에 의하여 변수추정을 실시하고, 특히 예측강우를 MA(Moving Average) 모형에 의한 것으로 처리하였다. 또한 Hsu 등(1985)은 지표수유출에 대하여 1차원 Kinematic Wave 모형을 非線形 狀態-空間模型으로 구성하고 유역을 유하시간별로 분할하여 유출을 有限差分式으로 구성하여 Lax-Wendroff 방법에 의한 수치해석으로 계산하고 상태 및 변수를 Iterated EKF에 의하여 동시추정하였다. Sorooshian과 Dracup(1980)은 2개의 저수지와 2개의 매개변수로 구성된 降雨-流出模型에 대하여 殘差의 自己相關과 分散의 變化(Heteroscedasity)가 있는 경우에 대하여 ML 추정을 적용하여 보통의 最小自乘(Ordinary Least Squares, OLS)과 加重 最小自乘(Weighted Least Squares, WLS)에 의한 결과와 비교연구하였다. Sorooshian(1981)은 4개의 변수로 구성된 降雨-流出模型에 대하여 殘差의 分散의 변화가 있고 分散에 대한 초기치의 정보가 불충분한 경우에 대하여 Likelihood 함수의 차원을 줄이기 위하여 Box-Cox 변환을 이용한 ML 추정에 의한 변수추정에 관하여 연구하였다. Sorooshian과 Arfi(1982)는 4개의 변수로 구성된 降雨-流出模型을 목적함수의 설정에 따라 ML 추정을 적용하여 OLS와 WLS 추정의 결과와 비교검토하였고, Sorooshian 등(1983)은 NWSRFS 모형에 대하여 殘差의 自己相關을 갖는 경우와 分散의 변화가 있는 경우에 대하여 ML 방법에 의한 변수추정을 연구하였다. 그리고 Gupta와 Sorooshian(1985)은 지하수유출을 포함하는 6개의 변수로 구성된 降雨-流出模型에 대하여 ML 방법에 의한 변수추정을 연구하였고, Kitanidis와 Lane(1985)은 공간적으로 상관된 변수를 갖는 降雨-流出模型에 대하여 ML 방법을 이용한 변수추정 이론을 전개하였다.

2.2 間接的인 技法

間接的인 技法에 의한 변수추정의 최적화에 관한 연구로는 最小自乘推定에 의한 것이 대부분이다. Ganendra(1976)는 最小自乘推定에 의한 최소자승오차를 갖는 Self-Tuning 推定子를 얻을 수 있도록 實時間 홍수량 산정의 매개변수를 결정하였는데, 이때 最小自乘推定으로 循環自乘推定(RLS)方法을 적용하였다. Bolzern 등(1980)은 推計學的 降雨-流出模型을 ARMAX 형태로 구성하여 RLS와 RELS에 의한 결과를 KF에 의한 결과와 비교연구하였고, Sorooshian과 Dracup (1980)은 2개의 저수지와 2개의 매개변수를 갖는 降雨-流出模型에 대하여, 그리고 Sorooshian과 Arfi(1982)는 4개의 매개변수를 갖는 降雨-流出模型에 대하여 OLS와 WLS 추정에 의한 결과를 ML 추정에 의한 결과와 비교연구하였다. Kuczera(1982)는 時系列模型에 대하여 OLS와 GLS에 관하여 비교하였고, Singh과 Buapeng(1983)은 n개의 非線形 貯水池模型에 대하여 狀態-空間模型을 구성하여 OLS에 의한 변수추정을 수행하였고, William과 Yeh(1983)는 비선형 지표수 및 지하수와 Kinematic Wave 방정식에 대하여 有限差分을 포함하는 降雨-流出模型의 변수를 GLS와 OLS 추정에 의하여 추정하고 線形計劃法(Linear Programming,LP)에 의한 결과와 비교하였다. 그리고 Patry와 Mariño(1984)는 人力雜音(Input Noise)과 出力雜音(Output Noise) 모형을 ARMAX 모형으로 구성하여 RLS에 의한 변수추정을 수행하였고, 또한 이들은 유량 및 水質豫測模型인 CSO (Combined Sewer Overflows) 모형의 매개변수를 RLS에 의하여 추정하였다. Hino와 Kim(1986)은 降雨-流出模型에서 강우와 유출사이의 비선형관계를 Filter 分離方法(Separation Method)에 의하여 강우예측과 홍수추적을 분리하여 外挿(Extrapolation)에 의하여 강우를 예측하고 유출과정은 傳達函數(Transfer Function) 형

태로 구성하여 LS 또는 LP에 의하여 추정하였다. Wang과 Yu(1986)는 Muskingum 모형, n개의 線形 貯水池模型에 대하여 時系列模型을 구성하여 LS 추정에 의한 결과를 LP의 결과와 비교하였다.

이상의 추정방법 외에 직접적인 기법인 LP에 의한 변수추정의 연구로는 전술한 Hino 와 Kim (1986), Wang과 Yu(1986)외에 Wang(1985)의 n 개의 線形 貯水池模型을 傳達函數 형태로 구성하여 변수추정한 연구들이 있다. 그러나 非線形 狀態-空間模型을 적용한 狀態 및 變數의 同時推定에 관한 연구는 미비한 실정이다.

3. 洪水豫測模型의 構成

본 연구에 적용하는 降雨-流出模型에 의한 홍수추적은 지수에 의하여 산정된 유효강우 $p_e(=p-\phi)$에 의한 지표수유출 q_s와 침투된 강우 $p_f(=\phi)$에 의한 지하수유출 q_g로 구성한다. 그리고 침투된 강우가 모두 유출에 기여하는 것으로 가정한다.

3.1 n개의 線形 貯水池模型

O'Connor(1982)와 Wang(1985)은 지표수유출을 지체효과를 고려한 n개의 線形 貯水池模型 $((1+K_{s1}D).(1+K_{s2}D)\ (1+K_{sn}D).q_s(t-\tau))$을 적용한 傳達函數模型으로 표현하여

$$q_s(t)=\sum_{i=1}^{n}\Phi_{si}\cdot q_s(t-1)+\sum_{i=1}^{n}\theta_{si}\cdot p_e(t-\tau-i+1) \tag{3.1}$$

과 같이 나타내었다. 이때 非均等貯水池(Unequal Reservoirs, $K_{s1}\neq K_{s2}\neq \cdots\cdots \neq K_{sn}$)에 대한 매개변수 Φ_{si}, θ_{si}는 표 3.1과 같다. 특히 n개의 均等貯水池(Equal Reservoirs)경우에는 $K_{s1}=K_{s2}=\cdots\cdots=K_{sn}$이므로 이에 대한 매개변수 값들은 다음과 같다.

$$\Phi_{si}=(-1)^{i+1}\cdot\binom{n}{i}\cdot e^{-1/Ks}$$

$$\theta_{si}=(e^{-1/Ks})^{i-1}\sum_{m=0}^{n-1}[(m)!]^{-1}(1-K_s)^m \{(i-1)^m+i^m e^{-1/Ks}\} \tag{3.2}$$

3.2 n개의 非線形 貯水池模型

n개의 非線形貯水池($S_s(t)=K_sq_s(t)^{Xs}$에 대하여 지표수저류 S_s와 지표수유출 q_s를 상태로 하는 시스템 방정식을 중앙차분형태로 나타내면

$$\frac{p_e(t-\tau+1)+p_e(t-\tau)}{2}-\frac{q_e(t+1)+q_e(t)}{2}$$

표 3.1 線形 貯水池模型의 媒介變數(Wang,1985)

n	i	Φ_{si}	θ_{si}
2	1	$e^{-1/Ks1}+e^{-1/Ks2}$	$K_{s1}(e^{-1/Ks1}-1)-K_{s2}(e^{-1/Ks2}-1)/(K_{s2}-K_{s1})$
	2	$-e^{-1/Ks1}\cdot e^{-1/Ks2}$	$[K_{s2}(e^{-1/Ks2}-1)e^{-1/Ks1}-K_{s1}\cdot(e^{-1/Ks1}-1)e^{-1/Ks2}]/(K_{s2}-K_{s1})$
3	1	$e^{-1/Ks1}+e^{-1/Ks2}+e^{-1/Ks3}$	$A_1+A_2+A_3$
	2	$-[e^{-1/Ks1}\cdot e^{-1/Ks2}+e^{-1/Ks2}\cdot e^{-1/Ks3}$ $+e^{-1/Ks1}\cdot e^{-1/Ks3}]$	$-[A_1(d_2+d_3)+A_2(d_1+d_3)+A_3(d_1+d_2)]$
	3	$e^{-1/Ks1}\cdot e^{-1/Ks2}\cdot e^{-1/Ks3}$	$A_1d_2d_3+A_2d_1d_3+A_3d_1d_2$

주) $A_1=K_{s1}^2(K_{s2}-K_{s3})(e^{-1}/K_{s1}-1)/[(K_{s1}-K_{s2})(K_{s1}-K_{s3})(K_{s2}-K_{s3})]$
$A_2=K_{s2}^2(K_{s3}-K_{s1})(e^{-1}/K_{s2}-1)/[(K_{s1}-K_{s2})(K_{s1}-K_{s3})(K_{s2}-K_{s3})]$
$A_3=K_{s3}^2(K_{s1}-K_{s2})(e^{-1}/K_{s3}-1)/[(K_{s1}-K_{s2})(K_{s1}-K_{s3})(K_{s2}-K_{s3})]$
$di=e^{-1}/^{Ksi}$, $i=1, 2, 3$

$$= \frac{s_s(t+1)-s_s(t)}{\Delta t} \tag{3.3}$$

이다. 그리고 지표수유출을 n개의 저수지로 구성하면 첫째 저수지의 유입량은 유효강우 p_e이고 둘째 저수지의 유입량은 첫째 저수지의 유출량 q_{s1}이며 최종적으로 지표수유출은 n번째의 저수지 유출량 q_{sn}이 된다.

$$\frac{S_{s1}(t+1)}{\triangle t}+\frac{q_{s1}(t+1)}{2}=\frac{p_e(t-\tau)+p_e(t-\tau+1)}{2}+\frac{S_{s1}(t)}{\triangle t}-\frac{q_{s1}(t)}{2}$$

$$\frac{S_{s2}(t+1)}{\triangle t}+\frac{q_{s2}(t+1)}{2}=\frac{q_{s1}(t)+q_{s1}(t+1)}{2}+\frac{S_{s2}(t)}{\triangle t}-\frac{q_{s2}(t)}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{S_{sn}(t+1)}{\triangle t}+\frac{q_{sn}(t+1)}{2}=\frac{q_{s(n-1)}(t)+q_{s(n-1)}(t+1)}{2}+\frac{S_{sn}(t)}{\triangle t}-\frac{q_{sn}(t)}{2} \tag{3.4}$$

여기서, K_s : 지표수유출의 저류계수
$q_s(t)$: 지표수유출 (mm/hr)
τ : 지체효과 변수
$\triangle t$: 단위추적시간 (hr)

특히, $X_s=1$이면 n개의 線形 貯水池模型이 되고, $K_{s1}=K_{s2}=\cdots\cdots=K_{sn}$이면 均等 貯水池模型이 된다. 또한 $x_s=1$, $n=1$이면 線形河道와 線形貯水池의 複合模型이 된다.

유효강우의 산정에 따라 침투된 강우량에 의한 지하수유출 q_g는 지표수유출 해석과 같은 방법을 검토한다. 즉, 지하수유출을 m개의 저수지로 구성하면 첫째 저수지의 유입량은 침투강우 p_f이고 둘째 저수지의 유입량은 첫째 저수지의 유출량 q_{g1}이며 최종적으로 지표수유출은 m번째의 저수지 유출량 q_{gm}이 된다.

3.3 洪水追跡模型의 시스템 構成

본 硏究에 적용하는 洪水追跡模型으로는 일반적인 n개의 非線形 貯水池模型을 선정하여 狀態-空間模型을 적용한 非線形 動的 시스템方程式(Nonlinear Dynamic System Equation)과 觀測方程式(Observation Equation)으로 構成한다.

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= F(X_k,\ U_k)+W_k,\quad W_k\sim N[0,\ Q_k] \\ Z_k &= H_kX_k \qquad\quad +V_k,\quad V_k\sim N[0,\ R_k] \end{aligned} \tag{3.5}$$

여기서,

$$\begin{aligned} X_k=[&S_{s1}(k),\ \cdots\cdots,\ S_{sn}(k),\\ &q_{s1}(k),\ \cdots\cdots,\ q_{sn}(k),\\ &S_{g1}(k),\ \cdots\cdots,\ S_{gm}(k),\\ &q_{g1}(k),\ \cdots\cdots,\ q_{gm}(k)]^T \end{aligned}$$

: 상태벡타

$F(X_k,\ U_k)$ = 媒介變數(K, x, ϕ), 입력치(p)와 상태(S, q)를 적용한 非線形 變換函數. ϕ와 강우량 p를 사용하여 유효강우와 침투강우를 산정하고, 식 (3.4)에 K_s와 x_s를 대입하여 $k+1$단계의 상태를 계산한다.

$U_k=[p(k-\tau),p(k-\tau+1)]^T$: 입력벡타

$Z_k=[g_{obs}]^T$: 觀測벡타

$H_k=[\underbrace{0,\ \cdots\cdots,\ 0}_{2_n-1},\ 0.1,\ \underbrace{0,\ \cdots\cdots,\ 0}_{2_m-1},\ 0.1]$: 觀測變換行列

W_k, V_k = 白色 Gaussian 雜音 (White Gaussian Noise, WGN)

g_{obs} = 관측유출(mm/hr) 시스템방정식을 이용한 $k+1$ 단계의 상태변수를 결정할 때는 Newton의 반복계산법에 의하여 계산하고, 첫째 저수지의 $k+1$ 단계의 상태를 계산한 후 다음 저수지의 $k+1$ 단계의 유입량으로 하여 계속적으로 n번째 저수지의 $k+1$ 단계의 상태까지 계산한다.

4. 變數推定模型의 構成

4.1 GLS(Generalized Least Squares) 推定

殘差의 自己相關과 分散의 變化(Heteroscedasity)에 관한 문제는 변수 最適化·技法으로 GLS를 사용하여 해결할 수 있다. 즉 시각 k에서 추정

변수를 $\hat{X}_k$로 두고, 殘差 $\varepsilon_k = Z_k - H_k \cdot \hat{X}_k$를 1차의 多地點(multi-site) AR 모형으로 가정하면

$$\varepsilon_k = \rho \cdot \varepsilon_{k-1} + \xi_k,\ \xi_k \sim N[0,\ S] \tag{4.1}$$

여기서, ρ=殘差의 自己 相關係數行列 이다. 따라서 변수 최적화에 관한 기지의 誤差 共分散 S를 갖는 GLS의 목적함수는

$$\underset{X}{\mathrm{Min}}\ J(X) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[\xi_k(X_k)]^T S^{-1}\xi_k(X_k) \tag{4.2}$$

이고, N은 자료의 갯수이다. 그리고 ρ와 S를 시간 불변값으로 가정하면 V_k의 標本相關은

$$\hat{\rho} = \{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k(\hat{X})[\varepsilon_{k-1}(\hat{X})]^T\}$$
$$\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k(\hat{X})[\varepsilon_{k-1}(\hat{X})]^T\}^{-1} \tag{4.3}$$

이고, ε_k의 標本共分散은

$$\hat{S} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\{\varepsilon_k(\hat{X}) - \hat{\rho}\ \varepsilon_{k-1}(\hat{X})\}$$
$$\{\varepsilon_k(\hat{X} - \hat{\rho}\varepsilon_{k-1}(\hat{X})\}^T \tag{4.4}$$

이다. 이와 같은 GLS는 잔차의 自己相關이 존재하지 않으면 잔차 ε_k의 共分散行列 S의 逆行列 S^{-1}

표 4.1 Prediction Error Algorithm

System Model	$X_{k+1} = F(X_k,\ \theta_k,\ U_k) + W_k,\ W_k \sim N[0,\ Q_k]$
Obs. Model	$Z_k = H_k X_k + V_k,\ V_k \sim N[0,\ R_k]$
Prediction Error	$\varepsilon_k = Z_k - H_k \hat{X}_k$
Initial Condition	$E[X(0)] = \hat{X}_0,\ E[(X(0)-X_0)(X(0)-X_0)^T] = P_0$
Other Assumptions	$E[W_k V_j^T] = 0,\ \forall j\ \&\ k$
State Estimation	$\hat{X}_{k+1} = F(\hat{X}_k,\ \hat{\theta}_{k\mid k},\ U_k) + K_k\varepsilon_k$
Est. Propagation	$\hat{\theta}_{k+1\mid k} = \hat{\theta}_{k\mid k}$ (θ_k : k단계의 변수벡타)
Error Cov. Prop.	$P_{k+1\mid k} = F'_k\ P_{k\mid k}\ F'^T_k + Q_k$
Estimation Update	$\hat{\theta}_{k+1\mid k+1} = \hat{\theta}_{k+1\mid k} + \gamma_{k+1}\ \Lambda^{-1}_{k+1}\psi_{k+1}S^{-1}_{k+1}\varepsilon_{k+1}$
Error Cov. Update	$P_{k+1\mid k+1} = P_{k+1\mid k} - K_{k+1}S_{k+1}K^T_{k+1}$
Kalman Gain	$K_{k+1} = F'_k P_{k+1\mid k} H^T_{k+1} S^{-1}_{k+1}$
Definitions	$\Lambda_{k+1} = \Lambda_k + \gamma_{k+1}[\psi_k S_k^{-1}\psi^T_k - \Lambda_k]$
	$S_{k+1} = H_{k+1}P_{k+1\mid k}\ H^T_{k+1} + R_{k+1}$
	$\Omega_{k+1} = [F'_k + K_k H_k]\Omega_k + M^*_k - K_k D_k$
	$\psi_{k+1} = \Omega^T_{k+1} H^T_k + D_k$
	$F'_k = \partial F(X_k,\ \theta_k,\ U_k)/\partial X_k \mid X_k = \hat{X}_k$
	$M_k = \partial(F_k + K_k\varepsilon_k)/\partial\theta_k \mid \theta_k = \hat{\theta}_{k\mid k}$
	$M_k = M_k(\hat{X}_k\ \hat{\theta}_{k\mid k},\ U_k) + \chi_k\varepsilon_k$
	$\chi_k = \partial K_k/\partial\theta_k \mid \theta_k = \hat{\theta}_{k\mid k}$
	$D_k = \partial(H_k,\ \hat{X}_k)/\partial\theta_k \mid \theta_k = \hat{\theta}_{k\mid k}$

을 갖는 $\hat{X}=(H^TS^{-1}H)^{-1}H^TS^{-1}Z$의 WLS(Weighted Least Squares)가 되고, 殘差의 自己相關 및 分散의 변화가 없으면 $\hat{X}=(H^TH)^{-1}H^TZ$와 같이 통상 最小自乘 즉 OLS(Ordinary Least Squares)로 된다. GLS 목적함수의 최소화에 사용되는 최적화 기법으로는 傾斜技法(Gradient Technique)과 反復調査技法(Iterative Search Technique)이 사용되는데 傾斜技法은 주어진 목적함수의 독립변수에 대한 偏導函數를 구하기 어렵기 때문에 이와 같은 偏導函數가 필요없는 反復調査技法이 용이하다. 그러나 이 技法의 경우는 서로 상관성이 큰 변수가 많은 경우는 효율적이지 못하지만 변수의 갯수가 적은 경우에는 효과적이다.

이와 같은 GLS를 상태-공간모형에 적용하면 표 4.1과 같은 Prediction Error Method(PEM)를 얻는다(Ljung과 Söderström, 1983).

4.2 MAP(Maximum a Posterior) 推定

媒介變數 X를 미지의 確率變數로 보고 실측치 Z와 X에 대한 통계적인 모형을 구성할 수 있는 경우에 測定誤差의 損失를 최소화하는 Bayesian 추정을 적용할 수 있다. Z와 X의 事前(Prior) 確率密度函數 p(Z)와 p(X)로서 X의 事後(Posterior) 條件附密度函數는 Bayesian 법칙($p(X \mid Z)=p(Z \mid X)\cdot p(X)/p(Z)$)에 의하여 정의된다. Bayesian 추정에서의 목적함수는 推定誤差 $\tilde{X}(=X-\hat{X})$의 損失函數 (Loss Function) $J(\tilde{X})$를 최소화($\partial\tilde{J}/\partial X=0$)하는 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$\underset{X}{\text{Min}}\ J=\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{X}-X)^T\cdot S(\hat{X}-X)\cdot p(X \mid Z)\ dX \tag{4.5}$$

여기서 S는 임의의 陽値(Positive Definite, PD) 加重行列이다. 이는 損失函數를 最小化하는 條件附 平均(Conditional Mean) $E(X \mid Z)$를 구하는 것이 된다.

$$\hat{X}=E(X \mid Z)\equiv\int_{-\infty}^{\infty} X\cdot p(X \mid Z)\ dX \tag{4.6}$$

특히 $p(X \mid Z)$가 대칭이면 $\hat{X}$는 $p(X \mid Z)$의 最頻値(Mode)가 되고, p(X)가 均等函數면 MLE(最尤推定)와 같게 된다. 여기서 변수 X를 $N[\hat{X}(-), P(-)]$의 Gaussian분포라 하고 실측치 Z를 변수 X와 독립이고 N[0,R]의 Gaussian 測定誤差 V의 線形關係 $Z=H\cdot X+V$로 나타내면 실측치

$$X\sim N[H\hat{X}(-),\ HP(-)H^T+R] \tag{4.7}$$

는 Gaussian 분포를 갖는다. 여기에 Bayesian 법칙을 적용하면 X의 條件附密度函數는

$$\begin{aligned}p(X \mid Z)=C\cdot\exp\{&-\frac{1}{2}(Z-HX)^TR^{-1}(Z-HX)\\&-\frac{1}{2}(X-\hat{X}(-))P^{-1}(-)(X-\hat{X}(-))\\&+\frac{1}{2}(Z-H\hat{X}(-))^T(HP(-)H^T+R)^{-1}\\&(Z-H\hat{X}(-))\}\end{aligned} \tag{4.8}$$

여기서, $C=1/(2\pi)^{m/2}[\det(HP(-)H^T+R)/(\det\{P(-)\}\det[R])]^{1/2}$

m = 觀測갯수

$\det[\cdot]$ = determinant

이고 상기식은 다음과 같은 自乘形態로 표현되고,

$$p[X \mid Z]=C\cdot\exp\{-\frac{1}{2}[(X-\hat{X}(+))^TP^{-1}(+)(X-\hat{X}(+))]\} \tag{4.9}$$

다음과 같은 MAP 推定을 얻게 된다((-)는 事前 推定値, (+)는 事後 推定値).

$$\begin{aligned}\hat{X}(+)&=\hat{X}(-)+P(+)H^TR^{-1}[Z-H\hat{X}(-)]\\&=P(+)[H^TR^{-1}Z+P^{-1}(-)\hat{X}(-)]\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}P(+)&=[P^{-1}(-)+H^TR^{-1}H]^{-1}\\&P(-)-P(-)H^T[HP(-)H^T+R]^{-1}HP(-)\end{aligned} \tag{4.11}$$

MAP 추정의 대표적인 방법으로는 事前値 $\hat{X}_0$ 및 $P_0=E[(X_0-\hat{X}_0)\cdot(X_0-\hat{X}_0)^T]$를 이용하여 線形

狀態-空間模型에 적용하는 最適化技法으로는 Kalman Filter(KF)가 있다.

그리고 非線形 狀態-空間模型에 적용하기 위하여 非線形 狀態벡타 $X_{k+1}=F_k(X_k)+W_k$를 Taylor급수로 전개하면 $X_{k+1}=F_k(\hat{X}_k)+F'_k(X_k-\hat{X}_k)+W_k$, $F_k(\hat{X}_k)=E(X_{k+1} \mid Z_k)=\hat{X}_{k+1 \mid k}$가 되는데 이를 KF에 사용하면 Extended KF(EKF) 알고리즘이 된다. 이 기법을 非線形 狀態-空間模型과 함께 요약하면 표 4.2와 같다.

여기서 EKF에 적용되는 시스템 雜音의 共分散行列 Q_k와 觀測雜音의 共分散行列 R_k는 旣知의 값이 아니나, 임의의 초기 가정치를 사용하여 近似에 의하여 개선(update)할 수 있다(Hsu 등,1985).

$$Q_k=[(k-1)Q_{k-1}+\omega_k\omega_k^T+P_{k \mid k}-P_{k-1 \mid k-1}]/k$$
$$R_k=[(k-1)R_{k-1}+\nu_k\nu_k^T+H_kP_{k \mid k-1}H_k^T]/k$$
$$\omega_k=K_k\nu_k,\ \nu_k=Z_k-H_k\hat{X}_{k \mid k-1} \qquad (4.12)$$

여기서 Q_k와 R_k는 陽値이므로 이를 만족시키지 못하는 경우는 가상의 작은 수를 대각요소에 더하여 항상 陽値性을 유지하여야 한다.

그리고 PEM과 EKF 두 알고리즘을 비교하면 EKF는 상태변수와 매개변수의 비선형관계를 擴大(extended) 狀態-空間模型을 사용하여 상태 및 매개변수를 추정하고, PEM은 매개변수의 推計學的擧動에 의한 상태변수의 推定誤差를 산정하여 매개변수를 추정하고 상태변수를 결정한다. 특히 EKF의 상태변수와 매개변수의 공분산과 매개변수의 自己共分散(Autocovariance)이 PEM에서는 각각 P_k와 Λ_k가 되고, PEM에서 매개변수의 변화에 따른 상태추정의 영향은 $\kappa_k\epsilon_k$로 사용한다.

4.3 洪水追跡模型과 變數推定模型의 結合

홍수추적의 경우에 지표수유출 $q_s(t)$와 지하수유출 $q_g(t)$가 각각의 관측이 불가능하므로 상태변수 $S_s(t),q_s(t),S_g(t),q_g(t)$와 매개변수를 동시에 추정한다. 이를 위하여 상태 및 변수의 同時推定을 위한 擴大 狀態-空間模型을 구성하면 식(3.5)과 같은 시스템 및 관측방정식에 다음의 상태벡타와 관측변환행렬이 구성된다.

$$X_k=[S_{s1}(k),\ \cdots\cdots,\ S_{sn}(k),\ q_{s1}(k),\ \cdots\cdots,\ q_{sn}(k),\ S_{g1}(k),\ \cdots\cdots,\ S_{gm}(k),\ q_{g1}(k),\ \cdots\cdots,\ q_{gm}(k),\ K_{g1}^{(k)},\ \cdots\cdots,\ K_{sn}^{(k)},\ X_s^{(k)},\ K_{g1}(k),\ \cdots\cdots,\ K_{gm}^{(k)},\ x_g^{(k)},\ \phi^{(k)}]^T$$

표 4.2 Extended KF Algorithm

System Model	$X_{k+1}=F(X_k, U_k)+W_k,\ W_k \sim N[0, Q_k]$
Obs. Model	$Z_k=H_kX_k+V_k,\ V_k \sim N[0, R_k]$
Initial Condition	$X_o \sim N[\hat{X}_o, P_o]$
and Assumptions	$E[W_kV_j^T]=0,\ \forall\ k\ \&\ j$
Est. Propagation	$\hat{X}_{k+1 \mid k}=F(\hat{X}_{k \mid k}\ U_k)$
Error Cov. Prop.	$P_{k+1 \mid k}=F'_k\ P_{k \mid k}\ F'^T_k+Q_k$
Est. Update	$\hat{X}_{k+1 \mid k+1}=\hat{X}_{k+1 \mid k}+K_{k+1}\ [Z_{k+1}-H_{k+1}\hat{X}_{k+1 \mid k}]$
Error Cov. Update	$P_{k+1 \mid k+1}=[\ I-K_{k+1}H_{k+1}]P_{k+1 \mid k}$
Kalman Gain	$K_{k+1}=P_{k+1 \mid k}H^T_{k+1}[H_{k+1}P_{k+1 \mid k}H^T_{k+1}+R_{k+1}]^{-1}$
Definition	$F'_k=\partial F(X_k, U_k)/\partial X_k \mid X_k=\hat{X}_{k \mid k}$

$$H_k = [\underbrace{0, \cdots\cdots, 0}_{2n-1}, 0.1, \underbrace{0, \cdots\cdots, 0}_{2m-1}, 0.1, \underbrace{0, \cdots\cdots, 0}_{n+m+3}]$$

5. 敏感度 分析

洪水追跡模型의 變數推定을 위하여 해석적인 민감도방정식을 사용한다. 洪水追跡模型에서 변수 $(X_1, \cdots\cdots, X_n)$와 주어진 입력에 대한 출력을 $Z=f(X_1, \cdots\cdots, X_n)$로 나타내면 민감도 S의 정의는 다음과 같다.

$$S_{X_i} = \frac{\partial Z}{\partial X_i} \approx \frac{\triangle Z}{\triangle X_i} \approx \frac{f(X_i+\triangle X_i, X_j \mid j \neq i) - f(X_i, \cdots\cdots, X_n)}{\triangle X_i} \quad (5.1)$$

추정변수의 공분산행렬과 상관행렬을 이용하여 분산이 큰 변수는 민감도가 낮으므로 변수추정시에 상수화하고 작은 변수는 민감하므로 변수 추정을 실시해야한다. 그리고 상관행렬의 값을 이용하여 요소의 값이 클수록 변수사이의 상관성이 높은 특성을 이용한다. 여기서 추정변수의 공분산행렬은 EKF의 행렬 P중 매개변수에 대한 요소와 PEM의 행렬 P이고, 민감도는 EKF의 F'_k중 매개변수에 대한 요소에 해당된다.

민감도 분석의 결과를 사용하여 변수들의 공분산 및 상관행렬을 계산할 수 있다. 공분산행렬 Cov.(X)의 요소 σ_{ij}는 정의에 의하여

$$\sigma_{ij} = E[(X_i - \bar{X}_i) \cdot (X_j - \bar{X}_j)^T] \quad (5.2)$$

이고, 추정된 매개변수들의 공분산행렬을 근사적으로 정의하면 다음과 같다.

$$\mathrm{Cov.}(\hat{X}) = \frac{J(\hat{X})}{M-L} [A(\hat{X})]^{-1} \quad (5.3)$$

여기서, $J(\hat{X}) = \sum_{i=1}^{M} (X_{obs,i} - Z_{cal,i})^2$

$Z_{obs,i}$, $Z_{cal,i}$ = 실측 유량과 계산 유량

$A(\hat{X})$ = Hessian 행렬($[Ja(\hat{X})] \cdot [Ja(\hat{X})]^T$)

$Ja(\hat{X})$ = 影響係數(Becker와 Yeh, 1973)에 의하여 계산된 추정변수에 대한 Jacobian 행렬

M = 관측치의 갯수

L = 매개변수의 갯수

이다. 그리고 상관행렬 $C(\hat{X})$는 공분산행렬로부터 다음과 같이 계산할 수 있다.

$C(\hat{X}) = [C_{ij}]$

여기서, $C_{ij} = \sigma_{ij} / \sqrt{\sigma_{ii} \cdot \sigma_{jj}}$ 이다.

6. 結 論

洪水追跡模型과 狀態 및 媒介變數의 同時推定 기법을 이용한 實時間 洪水豫測模型을 구성하였다.

洪水追跡模型을 ϕ지수에 의한 유효강우의 산정과 지체효과를 고려한 n개의 非線形 貯水池模型을 사용하여 지표수 및 지하수 유출모형을 구성하여 홍수추적 시스템을 구성하였다. 變數推定模型으로 GLS 추정과 MAP 추정을 검토하고 狀態-空間模型에 대하여 각각 PEM 과 EKF 알고리즘을 제시하였다. 그리고 홍수추적모형과 변수추정모형을 결합한 擴大 狀態-空間模型으로 시스템을 재구성하였다. 특히 홍수추적모형에서 매개변수들의 共分散行列과 相關行列에 의한 해석적인 민감도 분석을 통하여 매개변수의 민감도와 상관성을 검토하여 모형을 단순화하는 방안을 제시하였다.

본 모형을 실제 주요 강들의 홍수예측 업무에 적용하기 위해서는 강우예측모형과 연계사용하고, 하도추적모형을 포함하는 종합적인 시스템을 구성해야 한다. 이를 위해서 유역을 소유역별로 분할하여 단순화하고 유역 및 하도 유출점의 유량관측망의 구성과 관측의 정확성이 필요하다. 실제 유역을 선택하여 시스템을 구성하고 실측자료를 사용한 적용결과는 별도로 발표할 것이다.

感謝의 글

본 논문은 1991년도 교육부지원 학술진흥재단의 자유공모(지방대학육성)과제 학술연구조성비에 의

한 연구결과임을 밝히며 동재단에 감사드립니다.

參 考 文 獻

1. 남궁달(1985) 貯留函數法에 依한 降雨-流出模型의 變數推定, 韓國水文學會 誌, Vol.18, No.2, pp.175-185.
2. 남선우, 박상우(1992) 實時間 流出豫測을 위한 先行降雨指數別 TF模型의 誘導, 大韓土木學會 論文集, Vol.12 , No.1, pp.115-122.
3. 서병하, 강관원(1985) 洪水豫警報를 위한 河川流出의 水文學的 豫測,韓國水 文學會誌, Vol.18, No. 2, pp.153-161.
4. 서병하, 윤용남, 강관원(1982) 狀態벡터 模型에 依한 河川流出의 實時間 豫 測에 關한 硏究, 大韓土木學會 論文集, Vol.2, No.3, pp.43-56.
5. 정동국(1989) 降雨-流出模型에 關한 狀態 및 媒介變數의 推計學的 推定, 서 울大學校 大學院 工學博士 學位論文.
6. Becker,L., and W.W-G.Yeh(1973) Identification of multiple reach channel parameters, WRR, 9, pp.326-335.
7. Bolzern,P., M.Ferrario, and G.Fronza(1980) Adaptive real-time forecast of river flowrates from rainfall data, J. of Hydrol., 47, pp.251-267.
8. Bras,R.L.(1976) Short-term forecasting of rainfall and runoff, Paper presented at the Workshop on Recent Developments in Real-Time Forecasting/Control of Water Resource Systems, Int. Inst. for Appl. Syst. Anal., Laxenburg, Austria, Oct.18-20, pp.125-137.
9. Ganendra,T.(1976) A self-tuning predictor applied to river flow forecasting, Paper presented at the Workshop on Recent Developments in Real-Time Forecasting/Control of Water Resource Systems, Int. Inst. for Appl. System Analysis, Laxenburg, Austria, Oct.18-20, pp.139-149.
10. Georgakakos,K.P., and R.L.Bras(1982) Real-time statistical linearized, adaptive flood routing, WRR, 18, pp.513-524.
11. Gupta,V.K., and S.Sorooshian(1985) The automatic calibration of conceptual catchment models using derivative based optimization algorithms, WRR, 21, pp.473-485.
12. Hino,M., and C.H.Kim(1986) Nonlinear flood forecasting by the filter separation method, J. of Hydrol., 88, pp.164-184.
13. Hsu.,N.S., W.W-G.Yeh, B.J.Willimans, and M. K.Stenstr m(1985) Use of estimation techniques of flood forecasting, California Water Resources Center, UCLA, ISSN 0575-4941.
14. Jamieson,D.G., and J.C.Wilkinson(1972) River Dee research program 3, a short term strategy for multi-purpose reservoir system, WRR, 8, pp. 911-920.
15. Kitanidis,P.K., and R.L.Bras(1980) Adaptive filtering through detection of isolated transient errors in rainfall-runoff models, WRR, 16, pp. 740-748.
16. Kitanidis,P.K., and R.W.Lane(1985) Maximum likelihood parameter estimation of hydrologic spatial processes by the Gauss-Newton method, J. of Hydrol., 79, pp.53-71.
17. Kuczera,G.(1982) On the relationship between the reliability of parameter estimates and hydrologic time series data used in calibration, WRR, 18, pp.146-154.
18. Ljung,L., and T.S derstr m(1983) Theory and practice of recursive identification, The MIT Press.
19. Moore,R., and G.Weiss(1976) Real-time parameter estimation of a nonlinear catchment model using extended Kalman filters, Paper presented at the Workshop on Recent Developments in Real-time Forecasting/Control of Water Resource Systems, Int. Inst. for Appl. Syst. Anal., Laxenburg, Austria, Oct.18-20.
20. O'Connor,K.M.(1982) Derivation of discretely coincident forms of continuous linear time-invariant models using the transfer function approaches, J. of Hydrol., 59, pp.1-48.
21. Patry,G.G., and M.A.Mari o(1984) Parameter identification of time-varing noisy difference equations for real-time urban runoff forecasting,

J. of Hydrol., 72, pp.25–55.

22. Singh,V.P., and S.Buapeng(1983) A nonlinear hydrologic cascade, J. of Hydrol., 51, pp.283–293.
23. Sorooshian,S.(1981) Parameter estimation of rainfall–runoff models with heteroscedastic streamflow errors : the 'non–informative data case, J. of Hydrol., 52, pp.127–148.
24. Sorooshian,S., and F.Arfi(1982) Response surface parameter sensitivity analysis methods for post–calibration studies : application to conceptual rainfall–runoff model, WRR, 18, pp.1531–1538.
25. Sorooshian,S., and J.A.Dracup(1980) Stochastic parameter estimation procedures for hydrologic rainfall–runoff models : correlated and heteroscedastic cases, WRR, 16, pp.430–442.
26. Sorooshian,S., V.K.Gupta, and J.L.Fulton(1983) Evaluation of maximum likelihood estimation techniques for cenceptual rainfall–runoff models : influence of calibration data variability and length on model credibility, WRR, 19, pp.251–259.
27. Takara,K., M.Shiiba, and J.Takasao(1983) A stochastic method of real–time flood prediction in a basin which consists of several subbasins, Disaster Prevention Research Inst. Annuals, Kyoto Univ., No.26–b–2, pp.181–196.
28. Wang,G–T.(1985) The determination of parameter by linear programming for a model with n–linear reservoirs in series, J. of Hydrol., 81, pp.171–177.
29. Wang,G–T., and Y–S.Yu(1986) Estimation of parameters of the discrete linear, input–output model, J. of Hydrol., 85, pp.15–36.
30. William,B.T., and W.W–G.Yeh(1983) Parameter estimation in rainfall– runoff models, J. of Hydrol., 63, pp.373–393.
31. Wood,E.F., and A.Szollosi–Nagy(1978) An adaptive algorithm for analyzing short–term structural and parameter change in hydrologic prediction models, WRR, 14, pp.577–581.