〈연구동향〉

Chaos Theory(혼돈이론)의 수문학에의 적용

조 원 철* 서 규 우**

＊ 저자 註 : ‘Chaos Theory’가 ‘카오스이론’으로 일부 소개되고 있으나 본 강좌에서는 이를 혼돈이론으로 제안하고 사용하였습니다. 앞으로 이에 대한 용어들이 관심있는 분들의 노력으로 정립되어지기를 기대합니다.

1. 서 론

초기의 과학자들은 여러 자연현상들을 관찰함에 있어 매우 복잡해 보이는 자연현상이라도 그 속에 숨겨져 있는 근본원리는 단순할 것이라고 생각하고 그 근본원리만 알아낸다면 자연현상을 설명하고 이해하는데 문제가 없을 것으로 생각하였다. 이런 생각은 갈릴레오와 뉴톤의 시대를 거치면서 더욱 확신을 갖고 성공을 거두게 되며 금세기의 중요한 업적인 슐레딩거의 양자역학과 아인슈타인의 상대성 이론에까지 이르게 되었다. 예를 들어 물체의 운동을 기술할 때 우리는 많은 복잡한 사실들은 덜 중요하다고 무시하여 단순화된 운동방정식을 세우고 그 방정식을 풀어서 그 물체의 미래상태를 예측한다. 이때 사용되는 방정식이 선형방정식이며 무시된 사실들은 주로 비선형적인 항들이다. 오랫동안 비선형항들을 포함하는 방정식들은 반복계산해야 하는 양이 많았기 때문에 거의 풀지 못하고 관심의 대상에서 제외되어 왔다. 그러나 수십년전부터 발달해 온 전자계산능력의 괄목한 발전에 힘입어 엄청난 반복계산량을 수반하는 비선형항들의 해석에도 관심을 가지게 되었다.

특히 지난 10여년간 과학자들은 복잡한 비선형 동력계(nonlinear dynamic system)를 해석하기 위해 혼돈이론(chaos theory) 이란 새로운 이론을 도입하였다. 혼돈이론의 개념은 외관상으로는 추계학의 개념과 비슷하나 실제적으로는 결정론적 과정이다. 즉 혼돈이란 무작위성(randomness)이 없다든지 예측할 수 없는 입력량은 존재하지 않는 결정론적인 계(deterministic system)란 점에서 추계학적인 계(stochastic system)와 구별된다. 다시 말해 혼돈동력계(chaotic dynamic system)에서는 어떤 계에서 쉽게 예측할 수 없는 복잡성속에서 그 계만이 가지고 있는 규칙성(order)을 찾아내 이를 다른 계에 응용하고자 하는 것이다. 여기서 혼돈동력계란 추계학적 과정과는 구별되는 초기조건에 아주 민감한 비선형 결정론적인 계를 의미한다. 상미분방정식이나 편미분방정식으로 표시될 수 있는 동력계는 수문학분야 뿐만 아니라 물리학, 화학, 전기기계공학, 생물학, 경제학 등 여러 분야에서 찾아볼 수 있는데, 이들 각 분야에서 혼돈이론을 도입하여 문제를 해석하려는 노력이 최근에 들어 급격히 증가하고 있다. 이제 혼돈이론은 20세기의 3대 과학업적중 하나로 인식되어지는 사실만 보더라도 과학사에 있어서 획기적인 발상의 전환을 가져왔다고 할 수 있다. 본 강좌에서는 혼돈이론의 수문학에의 적용을 위해서 우선 필수적인 이론을 간단히 기술하고, 수문학에서의 여러분야별 적용예와 연구동향을 소개하고자 한다.

2. 혼돈이론(Chaos theory)

＊ 연세대학교 토목공학과 교수
＊＊ 연세대학교 토목공학과 박사과정

2.1 동력계

과학자들이 무엇을 관찰, 또는 연구할 때, 이들의 관찰 또는 연구대상을 "계"라고 부른다. 예를 들면, 천문학자가 천체의 운동에 관하여 연구할 때 "천체의 운동", 기상학자들이 기후의 변화를 연구할 때 "기후의 변화", 화학자들이 화학반응을 연구할 때 "화학반응", 생물학자들이 인구의 증감을 연구할 때 "인구의 증감", 물리학자들이 질점의 운동을 연구할 때 "질점의 운동", 수학자들이 삼각형의 성질을 연구할 때 "삼각형" 등은 각각 계이다. 여러가지 계중에는 그 계에 관한 과학자들의 관심사항이 시간이 흐름에 따라 변하거나 또는 그 계자체가 움직이는 것들이 있다. 이와 같은 계를 과학자들은 동력계라고 부른다. 천체의 운동, 기후의 변화, 화학반응, 인구의 증감, 질점의 운동 등 학문의 연구대상의 거의 대부분이 동력계임을 알 수 있다. 동력계에 대한 과학자들의 연구목표는 그 동력계의 변화과정의 기본법칙을 발견함으로써 그 계의 미래의 변화과정을 예측할 수 있도록 하는데 있다. 즉 천문학자들은 어떤 천체운동의 기본법칙을 발견함으로써 이 천체의 미래의 운동과정을 예측하려 한다. 기상학자들은 기후변화의 기본법칙을 발견함으로써 미래의 기상상태를 예측할 수 있는 근거를 마련하려고 한다. 과학자들의 연구목표의 거의 대부분은 많은 동력계에 대하여 시간 t 와 과학자들의 관심사항 y 사이에 어떤 함수관계가 성립하는가에 대한 정답을 채울려고 하는 일, 그리고 계가 궁극적으로 어디로 향하여 변화하고 있는가에 대한 정답을 채으려고 하는 일(즉 $t\rightarrow\infty$일때 y의 극한값 $\lim_{t\rightarrow\infty}$ =?을 찾는일)로 풀이된다. 이러한 연구를 함으로써, 내년 이날에 비가 올까 또는 안 올까? 10년후에 우리나라의 인구가 얼마나 될까? 월식이 언제 있을까? 태풍이 어떠한 경로로 진행할까? 지진이 언제 일어날까? 두 화합물이 어떻게 반응할까? 등의 의문에 정답을 얻어 낼 수 있게 된다.

2.2 혼돈(Chaos)

여러가지 동력계중에는 다행히 예측이 가능한것과 불행하게도 예측이 불가능한 것이 있다. 과학자들은 이들을 예측가능계와 예측불가능계로 구분한다. 달의 운동, 진자의 운동과 같은 질점의 운동은 뉴톤의 운동법칙의 발견에 힘입어 예측가능한 동력계들로 잘 알려진 것들이다. 그러나 기상의 변화 등은 예측불가능한 동력계의 대표적인 것들이다. 과거에 이들 동력계가 예측불가능한 이유를 우리는 이들 계가 너무나 많은 변화요인을 가지고 있어서 변화의 기본법칙을 발견하기가 어렵기 때문이라고 믿고 있었다. 예를 들면 기상상태의 예측에서 시간이 변하면 한 지역의 온도, 습도, 풍속, 압력, 구름낀 정도, 햇빛이 비치는 정도 등이 변하고 이들이 그 지역의 기후를 변화시키는 요인이 되고 있기 때문에 우리는 기후의 변화는 많은 변화요인를 가지고 있다고 생각하였다. 그리하여 이들 변화요인이 시간의 변화에 따라 어떻게 변하는지를 규명하기가 어렵기 때문에 기후의 변화는 예측하기 어려운 것이라고 생각하고 있었다.

그러나 최근에 와서 비록 한가지 변화요인만을 가지고 있는 간단한 동력계에도 기후의 변화처럼 예측불가능한 것이 있다는 새로운 사실이 발견되었다. 여기서 수학자들은 이처럼 간단한 동력계마저도 예측불가능한 변화를 하도록 하는 원인에 대해 의문을 제기하기에 이르렀다. 이와 같이 간단한 동력계마저도 예측불가능한 변화를 하도록 하는 예측불가능의 주범을 수학자들은 "혼돈(Chaos)"이라고 하였다. 그러면 수학자들이 혼돈을 어떻게 발견하였는가를 인구문제를 예로 들어 설명하겠다. 시간 t가 변하면 한나라의 인구는 변한다. 따라서 인구의 변화문제는 분명히 하나의 동력계의 문제이다. 시간을 t라고 하고 이시간에서의 어떤 나라의 인구를 y라고 하면 t와 y사이에는 분명히 어떤 함수관계 $y=F(t)$가 성립할 것임이 예상된다. 만일 이와 같은 함수식 $y=F(t)$가 발견될 수 있다면 인구의 변화상태의 예측은 매우 쉬워질 것이다. 그러나 불행하게도 이와 같은 함수관계를 발견하는 일은 매우 어려운 일이다. 그리하여 인구통계학자들은 제 n차 세대의 인구 P_n와 다음 세대인 $n+1$차 세대의 인구 P_{n+1}사이의 관계식 $P_{n+1}=F(P_n)$을 찾아내고 이 식을 이용하여 미래의 인구를 예측하려고 한다. 이 때의 인구의 변화요인은 바로 앞 세대의 인구 하나뿐이다. 맬더스(Malthus)와 그 외의

몇몇 인구학자들의 주장에 의하면 어느 국가의 인구는 그 국가의 자연환경이 수용할 수 있는 최대수용인구 P_{max}를 이용하면 위식을 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$P_{n+1} = KP_n(P_{max} - P_n) \quad (1)$$

위 식(1)의 양변을 P_{max}로 나누어 주면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{P_{n+1}}{P_{max}} = KP_{max}\, \frac{P_n}{P_{max}}\, \left(1 - \frac{P_n}{P_{max}}\right) \quad (2)$$

위 식(2)에서 $\frac{P_n}{P_{max}} = X_n$, $\frac{P_{n+1}}{P_{max}} = X_{n+1}$, $KP_{max} = \lambda$라고 하면 다음과 같은 간단한 식을 얻게 된다.

$$X_{n+1} = \lambda\ X_n(1 - X_n),\ 0 \le X_n \le 1,\ n = 1,\ 2,\ 3 \quad (3)$$

위 식(3)을 이용하여

세대변화	1차세대	2차세대	…	n차세대
인구변화	X_1	X_2	…	X_n

위와 같은 변화표를 만듬으로서 이 국가의 인구의 변화를 예측할 수 있을 것이다. 위의 변화표에서 $f(x) = \lambda x(1-x)$라고 할때, 다음 관계가 성립한다.

$$x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(f(x_1)),\ x_4 = f(f(f(x_1))) \quad (4)$$

따라서 어떤 국가의 인구를 예측하는 일은 같은 꼴의 계산을 반복하여 얻어지는 수열의 변화상태를 조사하는 일로 전환된다. 이때 다음과 같은 의문이 모든 인구학자들에게 공통적으로 생길수 있다. "어떤 국가의 인구가 한없는 세월이 흘렀을 때 어떠한 수에 접근하게 될까?" 이를 위해서는 위수열의 극한값을 구하여야 한다. 여기서 과거의 모든 인구학자들은 이 수열이 어떤 하나의 수에 접근할 것이라고 믿었을 뿐만 아니라 그 수가 무엇인지가 매우 궁금하였다. 그러나 컴퓨터를 이용하여 수열이 어떤 하나의 수에 접근하는가를 알아본 결과 예상외의 결과가 나타났다. 즉 "수열은 λ의 값에 따라 일정한 수에 접근할 때도 있고 그렇지 않을 때도 있다."였다. λ의 값은 국가의 자연환경에 의하여 결정되는 고유치이므로 위에서 λ의 변화는 국가의 변화를 의미한다. 이처럼 우리는 λ의 값에 따라 수열이 유한개의 값에 접근하는 경우와 무한히 많은 값에 접근하는 경우의 두 가지가 있음을 발견하게 된다. 수열을 무한히 많은 값에 접근하도록 하는 λ를, 동력계 $f(x) = \lambda x(1-x)$을 혼돈스럽게 만드는 값이라고 부른다.

2.3 끌개(Attractor)

동력계에서 계의 전개는 상태공간(state space)에서의 궤적으로 묘사될 수 있다. 상태공간의 좌표는 계를 나타낼 수 있는 변수로 정해지며, 궤적은 이 공간안에서 전개된다. 서로 다른 초기조건에서 출발한 궤적이 궁극적으로는 상태공간내에서 수렴할 때 이를 끌개(attractor)라 부른다. 즉 끌개란 위상공간의 한 영역으로서 어떤 계에 자석처럼 끌어당기는 효과를 나타내서 그 계를 그곳으로 끌어들이는 것처럼 나타난다. 이 끌개는 수렴하는 형태에 따라 묶인점끌개(fixed point), 한계순환끌개(limit cycle), 토러스(torus)로 구분된다. 이들 끌개들은 계의 특성에 따라 초기조건에 상관없이 일정한 끌개를 갖는 것도 있지만 변수에 따라 다른 형태의 끌개를 갖는 것도 있다. 묶인점끌개의 대표적인 예로는 마찰이 있는 공기중에서의 단진자운동을 들 수 있는데 단진자를 운동시키면 초기조건에 상관없이 항상 한점으로 수렴하게 된다. 그리고 한계순환끌개의 대표적인 예로 가장 널리 알려진 것은 아래의 논리방정식(May,1976)이다.

$$X_{t+1} = \lambda\ X_t(1 - X_t),\ 0 \le X_t \le 1 \quad (5)$$

여기서 λ는 $1 \le \lambda \le 4$의 조건을 갖는데, λ값이 증가함에 따라 초기조건 X_0에 상관없이 다음과 같은 2^k순환형태로 수렴한다.

$1<\lambda<3$ $k=0$ 묶인점끌개

$3<\lambda<3.44949$ $k=1$ 한계순환끌개

$3.44949<\lambda<3.54409$ $k=2$ 4주기순환끌개

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$3.5699456<\lambda$ $k=\infty$ 2^{∞}주기순환끌개 (6)

즉 혼돈현상은 $\lambda=3.5699456$ 이후부터 일어난다. May(1976), Berge 등(1984), Hao(1990)의 연구를 통해, 이러한 간단한 식에서도 갈래질(bifurcation)현상, 중첩그림(doubling mapping) 등 매우 흥미있는 혼돈의 현상을 볼 수 있다.(그림 1) 특히 Hao(1990)는 혼동이론에 관계되는 2000편 이상의 논문목록을 참고문헌으로 소개하였다. 이러한 서로 다른 끌개들은 Fourier 해석에서도 구별이 가능한데 한계순환(limit cycle)과 같은 주기함수들은 멱급수형태로 어떤 특정한 주파수를 갖는 극치값으로 나타나는 반면, 혼돈과 같은 비주기성 함수들은 모든 주파수에서 연속인 멱급수형태를 나타낸다.

이와 같이 끌개의 중요한 의미는 어떤 계내에서 예측가능성 여부를 결정해 준다는 것이다. 다시 말해서 묶인점, 한계순환, 토러스의 형태를 끌개로 갖는 계는 궤적이 수렴하기 때문에 그 계의 장기예측이 가능하다. 그러나 별난 끌개(strange attractor)는 결코 반복되지도, 수렴하지도 않기 때문에 예측에 한계가 있다. 이러한 별난 끌개는 혼돈에서 아주 중요한 부분을 차지하고 있고 쪽거리차원(fractal dimension)과 아주 밀접한 관계가 있기 때문에 다음절에 자세히 설명하겠다. 분석해가 존

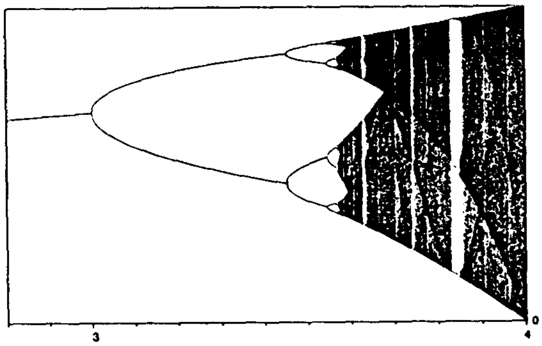

그림 1 끌 개

재하는 비선형 방정식은 극히 드물기 때문에 대부분 상태공간에서 각각의 궤적을 고찰함으로써 그 계의 특성을 찾고자 하는 것이다. 대부분의 상태공간내의 궤적은 그 현상이 매우 복잡하여 규칙성을 찾기가 힘들다. 때때로 상태공간내의 한 단면을 선택하여 그 단면위에 나타나는 궤적들을 고찰함으로써 문제를 쉽게 구명할 수 있는 경우가 많다. 이러한 단면을 푸앙카레의 단면(Poincare' Section)이라 부른다. 위상공간내의 차원에 대한 제한은 없지만 한 평면을 선택하여 이 평면위에 나타나는 궤도의 교차점들은 푸앙카레의 단면을 이루고 있다. 한 점에서 다음점으로의 변환은 연속적인 그림으로 표시되는데 이를 푸앙카레의 그림(Poincare' map)이라 한다.

2.4 별난 끌개와 쪽거리차원(strange attractor and fractal dimension)

어떤 동력계는 궤적이 결코 교차, 반복되지도 않으면서 묶인점끌개도 한계순환끌개도 아닌 어떤 형태로 수렴하는 비주기성 운동을 하는 것이 있다. 이러한 끌개는 아주 별난 것으로서 유클리드수학에서 차원은 정수를 갖는다는 사실과는 달리 비정수를 차원으로 갖는다. 이러한 별난 특성때문에 별난끌개(strange attractor)라 부른다. 별난 끌개의 대표적인 예는 로렌즈의 끌개(Lorenz, 1963)와 헤논의 끌개(Henon, 1976) 등이 있다.

별난 끌개는 쪽거리차원(fractal dimension)을 가지는데 쪽거리(fractal)란 말은 1982년 만델브로트에 의해 처음으로 소개되었다. 쪽거리가 어떠한 성질을 나타내는 도형인지를 알아보기 위하여 우선 두가지의 특수한 도형을 만들어 보기로 한다.

① 칸토르의 3분집합

아래 그림 2처럼 선분을 3등분하여 중앙부분을 제거시키고 다시 남은 부분의 선분들에 대해 계속적으로 3등분하여 중앙부분을 제거시켜 나가면 무한히 많은 점들로 구성되는 하나의 점집합이 된다. 이와 같은 도형(점집합)을 칸토르의 3분집합(Cantor's ternary set)이라고 한다.

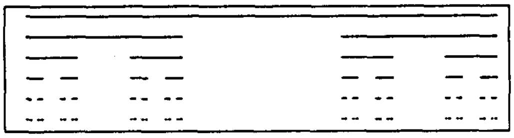

그림 2 칸토르의 3분집합

② 지르핀스키의 삼각형

아래 그림 3처럼 한 삼각형에서 내부 1/4크기의 삼각형을 중심부에서 들어내 버린다. 나머지 3개의 삼각형 각각에 대해 이들 크기의 1/4만큼의 삼각형을 중심부에서 다시 들어내버리는 작업을 무한히 진행하였을때 남아있는 점들의 집합이 나타내는 도형을 지르핀스키의 삼각형(Sierpinski's triangle)라고 한다.

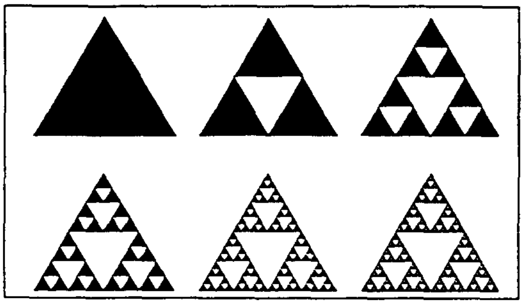

그림 3 지르핀스키의 삼각형

칸토르의 3분집합과 지르핀스키의 삼각형은 각각 완벽하게 그릴수는 없고 다만 우리의 머리속에서 이렇게 생겼을 것이라고 추정만 할 수 있을 뿐인 복잡하고 오묘한 도형이다. 이들 도형들에서는 아래와 같은 두가지 공통성을 가지고 있음을 쉽게 발견할 수 있다.

▶ 자기 유사성(Self-similarity) : 어느 일부분을 떼어 보아도 전체의 모습과 닮았다.

▶ 자기 복잡성(Self-complexity) : 어느 일부분을 떼어 보아도 복잡하고 오묘한 구조를 갖추고 있다.

수학자 만델브로트은 이와 같은 두가지 특성을 지니는 도형을 Fractal 즉, 쪽거리 혹은 차원분열 도형이라고 불렀다. 특히 자연계에서는 쪽거리의 모양을 띄우고 있는 것들이 수많이 발견됨으로써 쪽거리이론의 중요성은 날로 강조되고 있는 실정이다.

그럼 혼돈이론과 쪽거리는 어떻게 접합되는가를 알기쉬운 예를 들어 설명하기로 한다. 우리는 위에서 어떤 나라의 인구를 추정할 때, 이 나라의 최대 인구 증가율이 20%일 경우, 즉 λ의 값이 0.2 에서 출발하였다면 이 나라의 인구추정문제는 결국 $f(x)=\lambda x\ (1-x)$ 함수에 대하여 수열 0.2, f(0.2), f(f(0.2)) 이 어떤 수에 수렴하는가를 알아보는 문제로 전환됨을 알았다. 그런데 이 수열은 λ의 값에 따라 유한개의 값에 접근 할 경우도 있고, 무한히 많은 값에 접근할 경우도 있음을 우리는 발견하였다. 이때 이 수열이 무한히 많은 값에 접근하도록 하는 λ값을 우리는 동력계 $f(x)=\lambda x(1-x)$을 혼돈으로 이끄는 값이라고 불렀음을 알고 있다. 그런데 이와 같은 λ값의 전체집합을 A라고 하고, A를 컴퓨터 그래픽으로 수직선위에 하나의 도형으로 나타내어 보면 A 는 하나의 차원분열도형, 즉 쪽거리(fractal)임이 발견된다. 이와 같이 혼돈이론과 쪽거리는 서로 불가분의 관계가 있음을 알 수 있다.

그럼 이제 쪽거리차원(fractal dimension)을 결정하는 방법중 널리 사용되는 Hausdorff 차원 D와 상관성차원(correlation dimension) ν에 대해서 소개하고자 한다.

Hausdorff차원 D 는 다음과 같이 정의된다.

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)} \qquad (7)$$

여기서 ε는 각 절점의 길이이고 $N(\varepsilon)$은 ε의 총수이다. 예를 들어 한점인 경우 $N(\varepsilon)=1$이므로 $D=0$이고 전체의 길이가 L인 직선을 $N(\varepsilon)$ 등분한 경우 $N(\varepsilon)=L\ \varepsilon^{-1}$이므로 $D=1$이 된다. 또한 면적이 S인 평면의 경우 $N(\varepsilon)=S\ \varepsilon^{-2}$이므로 $D=2$가 된다. 지금까지 Hausdorff 차원은 유클리드차원과 똑같다. 하지만 위에서 쪽거리의 예로 설명한 칸토어의 집합(cantor set)의 경우, 한 직선을 매 단계당 중앙의 1/3 절점을 제거해 나가 궁극적으로는 무수한 점으로 구성되는데 이에 따른 ε는 각

각 1/3, $(1/3)^2$, $(1/3)^3$, ……,$(1/3)^m$ 이고 $N(\varepsilon)$는 2, 2^2, 2^3, ……, 2^m이 된다. 즉 차원 D는,

$$D=\lim_{m\to\infty}\frac{\ln 2^m}{\ln 3^m}\fallingdotseq 0.63 \qquad (8)$$

한편 정삼각형 각변의 중앙에 매단계당 1/3 의 적은 삼각형을 계속 더해가면 코흐의 곡선(Koch's curve)을 이루게 된다.(그림 4) 이 경우 ε는 1/3, $(1/3)^2$, $(1/3)^3$, ……, $(1/3)^m$이고 $N(\varepsilon)^5$는 4, 4^2, 4^3, ……, 4^m이 되어 차원 D≒1.26을 얻는다.

또한 지르핀스키의 도형(Sierpinski carpet)의 차원 D는,

$$D=\lim_{m\to\infty}\frac{\ln 8^m}{\ln 3^m}\fallingdotseq 1.89 \qquad (9)$$

멘거의 스폰지(Menger sponge) 차원의 경우,

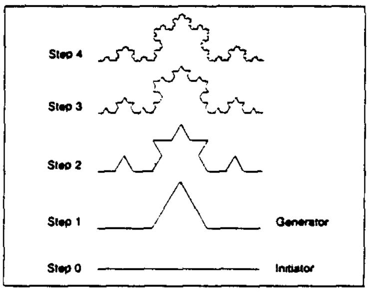

그림 4 코흐의 곡선

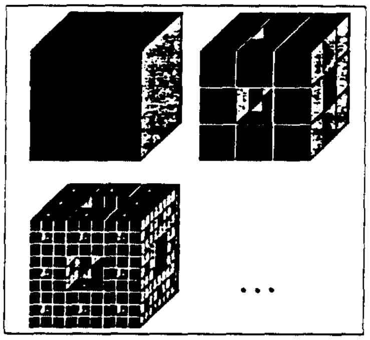

그림 5 멘거의 스폰지

$$D=\lim_{m\to\infty}\frac{\ln 20^m}{\ln 3^m}\fallingdotseq 2.73 \qquad (10)$$

가 된다.(그림 5)

그러나 Hausdorff차원은 차원이 2보다 큰 경우 그 수렴이 매우 느려 실제로는 상관성차원 ν를 많이 사용한다.

푸앙카레의 단면과 같은 평면위에 있는 일련의 점들을 생각해 보면, 임의의 반경 r내에 있는 점들의 수를 N(r)이라 할 때 다음과 같은 관계를 얻는다.

$$N(r)\cong r^{\nu} \qquad (11)$$

예를 들어 직선인 경우 $\nu=1$, 평면인 경우 $\nu=2$, 칸토어의 집합(cantor set)인 경우 $\nu=0.63$ 을 얻는다. 같은 방법으로 헤논의 끌개인 경우 $\nu=1.26$을 얻는다. 이와 같이 차원을 정하는 중요한 이유는 그것이 쪽거리차원이던 아니던 어떤 자연현상을 설명하기 위해서 사용될 모형의 제약변수의 수를 정한다는 점에서 중요하다. 예를 들어 D=4.56인 경우 적어도 5개의 변수를 갖는 5개의 ODE계가 필요하다는 것이다. 실제로는 자연현상을 설명하기 위한 정확한 수학적 형태가 없는 경우가 많다. 이러한 경우 상태공간은 그 계로부터 관측 가능한 하나의 변수로 된 위상공간으로 변환할 수 있다.

만약 끌개가 제한된 차원을 갖는다면 전체의 공간벡터 $\underline{X}(t)$ 는 X(t+z), X(t+2z), X(t+3z), ……, X(t+nz)와 같은 과정으로 바꿀 수 있다. 여기서 z는 지체변수이다. 혼돈영역에서 같은 궤적에 있지만 시간이 많이 떨어져 있는 두점은 상관성이 없다. 하지만 이 모든 점은 끌개위에 놓여 있기 때문에 공간적인 상관성이 존재한다. 이 공간적 상관성(spatial correlation) C(r)은 다음 관계로부터 얻어진다.

$$C(r)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m^2}\times[\text{거리가 r보다 적은 순서쌍(i, j)의 수}] \qquad (12)$$

여기서 m은 점의 총수이다. 거리가 r보다 적은

순서쌍 (i,j)의 수는 위에서 언급한 모든 N(r)의 합이므로 C(r)은 N(r)에 비례한다. 그리고 $N(r) \cong r^{\nu}$ 이므로

$$C(r) \cong r^{\nu} \tag{13}$$

의 관계를 이룬다.

3. 혼돈이론의 수문학에의 적용

현재 혼돈이론을 도입하여 수문학적 현상을 구명하려는 노력은 최근 4~5년 사이에 급격히 증가하고 있지만 아직도 그 적용범위가 그리 넓은 것같지는 않다. 여기서는 혼돈이론의 수문학에의 적용 예를 분야별로 간단히 알아보기로 한다.

3.1 유역형태학에의 적용

유역형태학이란 수문관측지점이 부족한 어떤 유역에 대해 형태학적 관찰을 하므로써 수문학적 혹은 형태학적인 추론(geomophologic inference)을 하여 그 지역 수자원의 잠재량을 판단하려는 수문학의 한 분야이다. 이러한 노력은 Horton(1945)이나 Gupta 등(1983, 1989)에 의해 오래전부터 계속되어 왔고 수로망(river network)을 체계적으로 분류하고 지형적인 유사성에 대한 이론을 계속 발전시켰다.

수로망을 분류하는데는 Gravelius, Horton, Panov, Strahler, Scheidegger, Shreve 방법등 여러가지가 있지만 일반적으로 Horton-Panov-Strahler 분류법이 많이 이용되고 있다. 이는 어떤 유역내의 상류 지천에 차수 1을 주고 이것이 하류로 진행될 때 같은 차수의 다른 지류와 만나면 차수를 하나씩 증가시키는 방법인데 Referto Eagleson(1970) 와 Zavoianu (1985) 등의 연구가 있다. Horton은 자연하천에서 유로길이와 하천차수에서 지형학적 유사성을 찾으려고 노력했다. Horton의 유로길이에 대한 법칙(law of stream length)에서 유로길이비 R_L은 다음과 같다.

$$\frac{L_{u+1}}{L_u} = R_L, \quad \frac{L_{u+r}}{L_u} = R_L^{\,r} \tag{14}$$

여기서 L_u와 L_{u+r}은 차수 u와 u+r을 갖는 하천의 평균길이를 말한다.

또한 하천수의 법칙(law of stream number)에서 갈래질비(bifurcation ratio) R_B는 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{N_u}{N_{u+1}} = R_B \tag{15}$$

여기서 N_u는 어떤 유역에서 차수 u를 갖는 유역절점수를 말한다. Horton(1945)은 표면유출수는 단지 1차에서 집결되고 표면유출수의 평균길이는 하류로 갈수록 증가된다고 가정하여 유사성(similarity) 조건은 R_B의 값이 2와 4 사이에 있다고 제안하였다. 하천수의 법칙(law of stream number)에서 R_B가 어떤 유역내에서 일정하다는 가정하에서 유역절점수 N_u은 다음과 같이 유도된다.

$$N_u = R_B^{\,\Omega - u} \tag{16}$$

여기서 Ω는 유역의 차수(catchment order)로서 어떤 유역내에서 가장 높은 차수를 말한다. 어떤 유역내에서 유역면적 A와 본류하천의 길이(main river length) L사이에는 다음과 같은 멱함수를 갖는다고 Hack(1957)이 처음 제안했다.

$$L = aA^b \tag{17}$$

그는 적용하천의 간단한 자료에서 b=0.6을 가지며 유역크기가 커지면 길이는 더욱 커진다는 것을 보였다. 그후 여러 연구를 통해 유역면적이 매우 큰 경우를 제외하고는 일반적으로 b의 값은 0.5보다 크지만 유역에 따라 다른 값을 제안했다. (Gray,1961; Leopold 등,1964; Smart 등, 1967; Mosley 등, 1972; Mueller, (1972)) 그 대표적인 예로 Gray는 그의 자료와 Taylor 등(1952)의 자료로 부터 다음과 같은 관계를 얻었다.

$$L = 1.40A^{0.568} \quad (18)$$

즉, 다시 말해서

$$\frac{A}{L^2} \doteqdot 0.5\ A^{-0.136} \quad (19)$$

이는 유역면적 A가 증가하면 A/L^2는 감소함을 보여준다. 다시 말해 A가 증가하면 유역모양은 더욱 긴 형상을 갖는다는 것을 말해준다. 유역모양(Catchment platform)이란 유역의 경계를 평면위에 투영시켰을 때 나타나는 곡선의 모양을 말한다. 이러한 유역모양에서 지형적 유사성은 A/L^2가 일정할 때를 말한다. 그러나 자연발생적인 유역에서는 위에서 살펴본 Gray의 예처럼 지형적 유사성이 일치하지는 않는다. 일반적으로 하천계는 집수역(collecting), 운반역(transporting), 그리고 분산역(dispersing)으로 구성되어 있는데 이러한 지형적 유사성은 유역면적이 작은 유역상류에서 발견할 수 있다. 기하학적 유사성에 대한 차원해석은 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$L = kA^{0.5} \quad (20)$$

여기서 k는 유역의 형상에 따른 상수이고 앞에서의 식과 차이가 나는 것은 유역의 유사성이 부족하기 때문이라고 수문학자들은 생각해 왔다.

지형학적 유사성에 대한 식을 이해하려는 또 다른 노력은 만델브로트(Mandelbrot, 1982)가 소개한 쪽거리차원개념을 발표하면서 시작되었다. 만델브로트는 위 두식에서 지수승에 대한 차이는 지도상에서 서로 다른 축척으로 하천의 길이를 측정했기 때문으로 생각하고, 이 차이는 도상에서 서로 다른 축척으로 측정한 길이의 연관성에서 쪽거리차원개념으로 결정할 수 있다고 했다(Manderbrot, 1982).

이러한 만델브로트의 개념을 바탕으로 Hjelmfelt(1988)은 Missouri에 있는 8개의 강을 대상으로 유로길이과 집수유역에 대한 쪽거리차원의 특성을 연구했다. 그는 이 지역에서 하천길이와 유역면적에 대한 평균 쪽거리차원은 각각 1.158, 1.105라고 제시했다. 이는 만델브로트의 가정사항인 1.136에 근사함을 보이고 만델브로트가 제시한 유역면적과 유로길이와의 관계는 하천길이측정의 쪽거리 특성에 따라 설명할 수 있다는 그의 이론을 증명해 주었다. 그후 Feder(1988)는 유로길이의 쪽거리차원(fractal dimension) D_L은 갈래질비(bifurcation ratio) R_B와 유로길이비(stream length ratio) R_L로부터 관계식을 얻을 수있다고 제안했다.

$$D_L = 2\ \frac{\log R_l}{\log R_B} \quad (21)$$

이에 대해 Rosso(1991)는 일부유역에서는 잘 맞지 않는다고 주장하면서 R_L과 면적비(area ratio) R_A를 사용하여 보다 일반화된 다음과 같은 식을 제안하였다.

$$D = \mathrm{MAX}[1,\ 2\ \frac{\log R_L}{\log R_A}] \quad (22)$$

또한 그는 하천망의 쪽거리차원 D_N은 R_B와 R_A로부터 아래와 같은 식으로 구할 수 있다고 제안하였다.

$$D_N = \mathrm{MIN}[2,\ 2\ \frac{\log R_B}{\log R_A}] \quad (23)$$

지금까지 유로길이와 유역면적과의 관계에서 유역의 기하학적 유사성을 쪽거리개념으로 설명하였다. 위식과 같은 수로망에서 쪽거리구조(fractal structure)를 결정하려는 노력은 그 이전에도 있었는데 대표적인 예가 LaBarbera 등(1987), Tarboton 등(1988)이다. LaBarbera 등(1987)은 Horton의 법칙에 근거해서 수로망의 쪽거리차원에 관계되는 식을 다음과 같이 유도하였다.

$$D_N = \mathrm{MAX}[\frac{\log R_B}{\log R_L},\ 1] \quad (24)$$

Tarboton 등(1988)도 하천의 수로망은 쪽거리차원을 갖는다는 것을 재확인하고 더 나아가 쪽거

리차원은 Horton의 법칙에 어떻게 관계되는지를 구체적으로 설명했다. 그리고 몇몇 다른 방법에 의한 쪽거리차원의 계산결과는 모두 2에 접근함을 보이고 만약 $D_N=2$이면 $R_B=R_L{}^2$임을 제안했다.

Larebra 등(1989, 1990)은 위식을 다음과 같이 세분하였다.

$$D_N=\left[\begin{array}{cc} \log R_B/\log R_L & \text{if } R_B>R_L \\ 1 & \text{if } R_B\leq R_L \end{array}\right] \quad (25)$$

그들은 쪽거리차원 D_N은 어떤 유역의 특성에 따라 일정하지는 않지만 1～2 사이의 값을 갖는다고 주장하고 실제자료로 검정해 본 결과 평균 1.6～1.7을 얻었다.

3.2 강수현상과 기후변화에의 적용

강수는 수문학뿐만 아니라 수리학, 나아가 토목설계의 제분야에 필수적인 자료이다. 이는 시공적 변화(spatial and temporal variability)를 갖기 때문에 측정하기도 힘들고 예측하기는 더욱 힘들다. 특히 홍수나 한발의 경우는 더욱 더 그렇다. 이는 Mandelbrot 등(1968)의 'Noah and Joseph effects'에서 잘 설명해 주고 있다. Noah effect란 아주 극치(extreme: high or low)의 강수를 의미하며 Joseph effect란 극치의 강수기간이 아주 긴 것을 말한다. 지금까지의 혼돈이론의 강수현상에의 적용은 대부분이 강수현상이나 기후변화의 연구에서 끌개의 존재여부를 알아보는 정도이다. 기후변화연구에 혼돈이론을 처음 도입한 사람은 Nicolis 등(1984)이다. 이들은 앞에서 소개한 상관성차원 개념을 도입하여 과거 수백년간의 장기간 기후변화에 끌개가 존재하며 쪽거리차원(D)은 3이라는 것을 제시했다. 또한 그는 이처럼 낮은 차원의 기후변화에 끌개가 존재한다는 것은 장기간의 기후변화에도 어떤 제한된 수의 변수를 가진 결정론적 동력계의 존재를 입증한다고 했다. 이와 같이 기후변화 양상에서 끌개의 존재여부를 연구한 문헌은 상당수가 있지만 대표적인 것을 살펴보면, Friedrich (1986)는 local pressure, relative sunshine duration에서의 끌개의 차원에 대한 연구를 하였고 Gabriel 등(1988)은 인공위성 영상(satellite image)에서 끌개에 대한 연구를 하였으며, Kurths 등(1987)은 관측된 태양복사파동(solar radio pulsation) 에서 낮은 차원의 끌개에 대한 연구를 하였으며 Nicolis(1987)은 해양의 평균수온변화에 혼돈계가 존재한다는 것을 연구했다. 또한 Osborne 등(1986)은 보다 큰 규모의 태평양 해상에서 시간변화에 따른 부표(buoy)의 위치변화를 분석하여 상관성차원이 1.4 인 끌개가 있다고 주장하였다. 상대적으로 짧은 시간에 대한 연구는 Tsonis 등(1988), Rodriguez 등(1989), Sharifi 등(1990)에 의해서 이루어졌다. Tsonis 등은 10초 간격의 11시간 동안의 고도에 따른 풍속자료(vertical wind velocity data)로 끌개가 존재하는지를 연구하였다. 그들은 이 자료에서 7.3의 차원을 갖는 별난 끌개가 존재하며 이러한 동력계는 적어도 8 이상의 자유도(즉 8개이상의 미분방정식)을 갖는 계가 필요하다고 제시했다. 또한 그는 짧은 시간에서의 동력계는 더욱 복잡하고 예측하기도 힘들다고 했다. Rodriguez 등(1989)은 15초 간격의 강우자료에서 끌개의 차원을 연구했고 Sharifi 등(1990)은 폭우(intense rainfall)는 통상 단기간에 발생하기 때문에 이에 대한 연구가 필요하며 차원이 4보다 적은 끌개가 존재한다는 것은 장기간 강우예측이 가능하다는 것을 입증한다고 주장하였다.

3.3 다공매질에의 적용

다공매질에 대한 혼돈이론 도입은 토립자크기에 따라 적용한 경우, 재료에 따른 적용, 지역에 따른 적용, 나아가 토질과 대기의 연관관계에 적용한 경우까지 그 적용범위가 다양하다. 전자의 경우는 지질학이나 순수 토질공학에 가깝고 수문학에서는 후자쪽에 관심이 많다. 지질학적 구조에서 쪽거리 특성을 찾으려는 노력의 공통적인 특징은 대부분 앞에서 소개한 지르핀스키의 도형(Sierpinski carpet)과 연관이 있다. 토립자크기에 따른 연구의 예를 살펴보면, Avnir 등(1984, 1985) 은 최소 4Å～최고 400Å까지의 미시적인 면에서 쪽거리특성을 규명했고 Katz 등(1985)은 10Å～100㎛의 범위에서 3～4의 쪽거리차원을 갖는다고 주장하였

다. 또한 Jacquin 등(1987)은 토립자의 공극에서 쪽거리특성을 규명했다. 토립자의 종류에 따른 혼돈이론의 도입 예로는 Krohn(1988)이 sandstones, shales, and Carbonate에서 쪽거리특성을 규명했다. 또한 Andrle 등(1989)은 사면경사의 조도(surface roughness)에서는 자기유사성(self-similarity)이 없다고 주장했다. 한편 수문학자들은 지금까지의 토립자에 관한 적용보다는 다음과 같은 투수계수, 토양의 수분저류력(soil water retension), 토양내 수분의 대기와의 상호작용(soil moisture-atmosphere interaction) 쪽에 관심이 많을 것이다.

지하수에서 투수계수의 결정은 아주 기본적이고 중요한 문제이다. 이를 위한 수많은 연구가 발표되었지만 아직도 만족할 만한 해를 못주고 있다. Alder는 지르핀스키의 도형(Sierpinski ; carpet) 개념을 바탕으로 투수계수는 멱급수(power spectrum)형태로 표현될 수 있다는 것을 밝혔다. 또한 Tyler 등(1990)은 이 지르핀스키의 도형의 개념으로 soil water retension에 관한 쪽거리 연구를 해서 고전적인 방법인 Brooks and Corley(1964)와 Campbell(1974)의 멱급수함수와 비교하였다.

대단위지형에서의 토립자의 습윤상태와 대기상태간의 관계에 관한 연구가 수문순환개념을 바탕으로 Rodriguez 등(1991a,b)에 의해 이루어졌다. 그들은 어떤 시간에서의 토립자의 습윤상태를 강수, 침투, 증발의 함수로 보고 모형을 개발하였는데 토립자속의 수분은 대기속으로의 되먹임효과(feedback effect)때문에 대규모의 공간과 장기간의 시간간격으로 정했다. 그들은 토립자속의 수분은 기후, 토립자의 재질, 피복상태 등에 따른 매우 복잡한 동력계를 가지며 습윤상태와 강수사이의 시간간격에 따라 묶인점, 한계순환끌개 등의 혼돈동력계로 바뀐다. 이는 단기간의 주기적인 거동은 예측이 가능하나 혼돈지역에서는 예측이 제한된다는 것을 설명해주고 있다. 그들 모형의 특징중 하나는 시간간격이 짧아지면 토립자의 수분상태와 강수사이에 시간지체함수를 가진다는 것이다. 이와 같은 시간지체의 적용 예는 생태학분야에서도 찾아볼 수 있다(May 등, 1974).

3.4 융설에 의한 유출에의 적용

유출은 수문학 제분야중 가장 중요한 분야임에도 불구하고 혼돈이론을 도입한 예는 Wilcox 등(1991)이 고작이다. 그는 융설에 의한 유출에서 혼돈동력계의 근거를 찾기 위해 southwest Idaho의 작은 유역에서 24년간의 일융설유출자료(daily snowmelt runoff data)로 앞에서 설명한 상관성 차원의 개념을 도입하였다. 그들은 융설에 의한 유출자료는 한정된 차원(finite dimension)을 갖는 혼돈동력계의 성격을 갖기 보다는 추계학적 무작위 과정(stochastic random process)에 가깝다고 주장했다. 그 이유는 유출과정이 매우 복잡한 현상을 띄지만 이 복잡성이 다른 많은 요소(즉 강수, 증발, 토질의 상태, 위치적인 영향, 피복상태 등)들과의 연관관계에서 오는 것이기 때문이라고 생각했다. 이처럼 유출현상을 혼돈이론으로 설명하기 위해서는 더많은 노력과 연구가 필요하리라 본다.

4. 결 론

Edward Lorenz(1963)가 처음으로 대기속의 공기순환에 관한 모형에서 끌개를 발견한 후 여러 과학분야에서 혼돈이론에 관심을 가지기 시작하였다. 초기에는 순수과학분야에서 그들이 가지고 있는 비선형계에 혼돈스러운 현상이 있는지의 여부를 규명하였다. 그후 각 분야에서 혼돈이론연구가 본격적으로 시작된 것은 만델브로트(Mandelbrot)가 1982년 쪽거리차원(fractal dimension) 개념을 소개하면서 부터라 해도 무방할 것이다. 혼돈이론은 안정된 운동상태를 보이는 계가 어떻게 하여 혼돈상태로 바뀌는가를 설명하고 또 혼돈현상속에 숨겨진 질서를 찾으려는 시도이다. 더 나아가 우리의 실생활에 적용하여 실용성을 가질 수 있게 이 혼돈현상을 조정하는 것을 목표로 한다. 자유도가 낮은 계에서 혼돈에 이르는 방법은 비교적 잘 연구되어 있으나 자유도가 큰 계에 대한 연구는 아직 초기단계에 있다. 수문학도 예외는 아니다. 수문학에서의 적용은 혼돈동력계가 가지고 있는 규칙성을 찾아내고 나아가 이를 수문모형에 응용하고자 하는 것이

다. 그러므로 일부를 제외하고는 혼돈이론의 수문학적 응용도 이제 시작단계라고 할 수 있다. 앞으로 수문학에서의 혼돈이론연구는 순수혼돈이론의 발전과 함께 더욱 연구가 활발하리라 믿는다.

5. 참 고 문 헌

김광택, 조혁 譯, Briggs, J., Peat, D.1990, 혼돈의 과학, 범양사출판부

남상욱, 1992, "혼차이론(Chaos & Fractals Theory)", 연세춘추

박배식, 성하운 譯, Gleick J., 1993, *카오스(CHAOS)*, 동문사

전민우, 조원철, 1992, "지형도 축척에 따르는 하천수로망과 본류 하천길이에 관한 Fractal Dimension", 대한토목학회 논문집 제12권 제4-1호, pp79-106.

Alder, P. M., 1986, "Transport processes in fractals VI:Stokes flow through Sierpinski carpets", *Phys. Fluids, 29(1)*, pp15-21.

Alder, P. M., and Jacquin, C. G., 1987, "Fractal porous media, I, Longitudinal Stokes flow in random carpets", *Trans Porous Media, 2*, pp553-569.

Andre, R., and Andre, G. R, 1990, "On the fractal interpretation of the main stream length-drainage area relationship", *WRR, Vol.26, No.5*, pp839-842.

Andrle, R., and Abrahams, A. D., 1989, "Fractal techniques and the surface roughness of talus slopes", *Earth Surf. Processes Landforms, 14(3)*, pp197-209.

Baker, G. L., Gollub, J. P., 1990, *Chaotic dynamics*, Cambridge university press.

Barbera, P. L., 1989, "On the fractal dimension of stream networks", *WRR, Vol.25, No.4*, pp735-741Barnsley, M., 1988, *Fractals everywhere*, Academic press, London.

Berge, P., Pomeau, Y., and Vidal, C., 1984, *Order within Chaos:Towards a deterministic approach to turbulence*, John Wiley, New York. Bras, R. L., and Rodriguez-Iturbe, I., 1985, *Random functions and hydrology*, Addison-Wesley Pub.Co., Reading, Massachusetts.

Briggs, J., Peat, F. D., 1989, *Turbulent mirror*, Harper & Row, New York.

Crilly,A.J., Earnshaw, R. A., Jones, H., 1991, *Fractals and Chaos, Springer-verlag, New york.*

Devaney, R. L., 1989, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd ed. Addison -wesley publishing co.

Eagleson, P. S., 1970, *Dynamic Hydrology*, Mcgraw-Hill Book Co., New York, p462.

Essex, C., Lookman, T., and Nerenberg, M. A. H., 1987, "The climate attractor over short time scales", *Nature, 326*, pp64-66.

Feder, J., 1988, *Fractals*, Plenum, New York.

Feigenbaum, M. J., 1980, "Universal behavior in nonlinear systems", *Los Almos Science, Summer 1980*, pp4-27.

Fischer, P., Smith, W. R., 1985, *Chaos, Fractals and Dynamics*, Marcel Dekker inc, New york.

Fraedrich, K, 1986, "Estimating the dimensions of weather and climate attractors", *J.Atmos. Sci.,43(5)*, pp419-432.

Fraedrich, K., 1987, "Estimating weather and climatic predictability on attractors", *J.Atmos. Sci., 44*, pp722-728.

Gabriel, P., Lovejoy, S., Schertzer, D., and Austin, G. L., 1988, "Multifractal analysis of resolution dependence in satellite imagery", *Geophys. Res.Lett, 15*, pp1373-1376.

Ghilardi, P., and Rosso, R., 1990, Comment on "Chaos in rainfall"by I.Rodriguez- Iturbe et al., *WRR, Vol.26, No.8*, pp1837-1839.

Gleick, J., 1987, *Chaos:Making a new science*, Viking, New York, p352.

Grassberger, P., 1986, "Do climatic attractor exist?", *Nature, 323*, pp609-612.

Gray, D. M., 1961, "Interrelationships of watershed characteristics", *J.Geophys.Res., Vol.66, No.4*, pp1215-1223.

Gucken heimer, J., Holmes, P., 1983, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of* *vector fields*, Springer–verlag, New York.

Gupta, V. K., and Waymire, E., 1983, "On the formulation of an analytical approach to understand hydrological response and similarity at the basin scale, *J.Hydrology, Vol. 65*, pp95–123.

Gupta, V. K., and Waymire, E., 1989. "Statistical self–similarity in river networks parameterized by elevation", *WRR, Vol.25, No.3*, pp463–476.

Hack, J. T., 1957, "Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland", *U.S.G.S. Prof.Paper,294–B*, pp45–94.

Hao, B. L., 1990, *Chaos* II, World Scientific Pub. Co., Singapore.

Henon, M., 1976, "A two dimensional mapping with a strange attractor", *Communications in Mathematical Physics,50*, pp69–77.

Hjemfelt, A. T., 1988, "Fractals and river length – catchment area ratio", *Water Resources Bulletin, 24(2)*, pp455–459.

Horton, R. E., 1945, "Erosional development of streams and their drainage basins, Hydrophysical approach to quantitative morphology", *Bull.Geol.Soc.Am., Vol.56*, pp275–370.

Iturbe, I. R., Entekhabi, D., Lee, J. S., Bras, R.L., 1991, "Nonlinear dynamic of soil moisture at climate scales, 2.Chaotic analysis", *WRR, Vol. 27, No.8*, pp1907–1915.

Jacquin, C. G., and Alder, P. M., 1987, "Fractal porous media, II, Geometry of porous geological structures", *Trans Porous Media,2*, pp571–596.

Katz, A. J., and Thomson, A. H., 1985a, "Fractal sandstone pores: Implication for conductivity and pore formation", *Phys.Rev.Lett,54*, pp1325–1328.

Katz, A. J., and Thomson, A. H., 1985b, *Phys.Rev. Lett, 53*, p596.

Kedem, B., and L. S. Chiu, 1987, "Are rain rate processes self–similar?" *WRR, Vol.23, No.7.*, pp1816–1818.

Krohn, C. E. 1988., "Fractal measurements of sandstones, shales, and carbonates", *J. Geophys. Res., 93(B4)*, pp3286–3296.

Kurths, J., and Herzel, H., 1987, "An attractor in a solar time series", *Physica.25D*, pp165–172.

LaBarbera, P., and Rosso, R., 1987, "The fractal geometry of river networks", *EOS Trans.AGU, Vol68(44)*, p1276.

LaBarbera, P., and Rosso, R., 1989, "On the fractal dimension of stream networks", *WRR, Vol. 25, No.4*, pp735–741.

LaBarbera, P., and Rosso, R., 1990, "Reply", *WRR, Vol.26, No.9*, pp2245–2248.

Leopold, M. B., Wolman, M. G., and Miller, J. P., 1964, *Fluvial processes in geomorphology*, W. H.Freeman, New York.

Lorenz, E. A., 1963, "Deterministic non–periodic flow", *J.of Atmospheric Science,20*, pp 130–141.

Mandelbrot, B. B., 1982, *The fractal geometry of nature*, Freeman, Cooper, San Francisco, Ca, p461.

Mandelbrot, B. B., and Wallis, V. R., 1968, "Noah, Joseph and operational hydrology", *WRR, 4*, pp909–918.

May, R. M., 1976, "Simple mathematical models with very complicated dynamics", *Nature, 261*, pp459–467.

May, R. M., Conway, G. R., Hassel, M. P., and Southwood, T.R.E., 1974, "Time delays, density–dependence and single–species oscillations", *J.Anim.Ecol., 43*, pp747–770.

Moon, F. C., 1987, *Chaotic vibrations, an introduction for applied scientists and engineers*, John Wiley, New York, p309.

Mosley, M. P., and Parker, R. S., 1972, "Allometric growth: A useful concept in geomorphology?", *Geol.soc.Am.Bull., 83*, pp3471–3474.

Nicolis, C., 1987, "Long term climatic variability and chaotic dynamics", *Tellus, 39 A*, pp1–9.

Nicolis, C., and Nicolis, G., 1984, "Is there a climatic attractor?", *Nature, 311*, pp529–532.

Nicolis, C., and Nicolis, G., 1987, "Evidence for climatic attractor", *Nature*, *326*, pp523–524.

Osborne, A.R., Kirwan,A.D., Provenzale,A., and Bergamasco,L., 1986, "A search for chaotic behavior in large and mesoscale motions in the Pacific Ocean", *Phisica*, *D23*, pp75–83.

Peitgen, H. O., J rgens, H., Saupe, D., 1992, *Chaos and Fractals–New frontiers of science*, Springer–verlag, New York.

Robert, A., and Roy, A. G., 1990, "On the fractal Interpretation of the mainstream length–drainage area relationship", *WRR*, *Vol.26*, *No.5*, pp839–842.

Robert, A., and Roy, A. G., 1991, Comment on "On the fractal Interpretation of the mainstream length–drainage area relationship", *WRR*, *Vol.27*, *No.9*, pp2487–2488.

Rodriguez–Iturbe, I., de Power, B. F., Sharifi, M., and Georgakakos, K. P., 1989, "Chaos in rainfall", *WRR*, *Vol.25*, *No.7*, pp1667–1675.

Rodriguez–Iturbe, I., Entekhabi, D., and Bras, R., 1991a, "Nonlinear dynamics of soil moisture at climate scales, 1. Stochastic Analysis", *WRR*, *Vol.27*, *No.8*, pp1899–1906.

Rodriguez–Iturbe, I., Entekhabi, D., Lee, J. S., and Bras, R. L., 1991b, "Nonlinear dynamics of soil moisture at climate scales, 2.Chaotic Analysis", *WRR*, *Vol.27*, *No.8*, pp1899–1906.

Rosso, R., Bacchi, R., and La Barbera, P., 1991, "Fractal relation of mainstream length to catchment area in river networks, *WRR*, *Vol.27*, *No.3*, pp381–387.

Scholz, L. H., and Aviles, C., 1985, *Seismo*, Soc. of America, Houston, pp.14–17.

Schuster, H. G., 1989, *Deterministic chaos*, 2nd ed. VCH, Weinheim.

Sharifi, B. F., Georgakakos, K. P., and Rodriguez–Iturbe, I., 1990, "Evidence of deterministic chaos in the pulse of storm rainfall", *J. of Atmos.Sc.*, *Vol.47*, No.7, pp888–893.

Smart, J. S., and Surkan, A. J., 1967, "The relation between mainstream length and area in drainage basins", *WRR ch,3*, pp963–974.

Tabor, M., 1989, *Chaos and Integrability in nonlinear dynamics: An introduction*, John Wiley, New York, p364.

Talboton, D. G., Bras, R. L., and Rodriguez–Iturbe, I., 1988, "The fractal nature of river networks", *WRR*, *Vol.24*, *No.8*, pp1317–1322.

Talboton,D.G., Bras, R. L., and Rodriguez–Iturbe, I., 1990, Comment on "On the fractal dimension of stream networks" by Paolo La Barbera and Renzo Rosso, *WRR*, *Vol.26*, *No. 9*, pp2243–2244.

Taylor, A. B., and Schwarz, H. E., 1952, "Unit hydrograph lag and peak flow related to basin characteristics", *Trans.AGU*, *Vol.33*, pp235–246.

Thompson, J.M.T., Stewart,H.B., *Nonlinear dynamics and chaos*, Johnwiley & sons, New York.

Tsonis, A. A., and Elsner, J. B., 1988, "The weather attractor over very short time–scales", *Nature*, *333*, pp545–547.

Tsonis, A. A., and Elsner, J. B., 1989, "Chaos Strange attractors and weather", *Bull. Ame. Meteoro. Soc.*, *70*, pp14–23.

Tyler, S. W., and Wheatcraft, S. W., 1990, "Fractal processes in soil water retention", *WRR*, *Vol.26*, *No.5*, pp1047–1054.

Wilcox, B. P., Seyfried, M. S., and Matison, T. H., 1991, "Searching for chaotic dynamics in snowmelt runoff", *WRR*, *Vol.27*, *No.6*, pp1005–1010.

Zavoianu, L., 1985, *Morphometry of drainage basins*, Elsevier, New York, p238.