

〈論 文〉

# 사하중에 의한 정적 처짐을 고려한 보의 자유진동

## Free Vibrations of Beams with Static Deflections due to Dead Loads

이 병 구\* · 박 광 규\*\* · 오 상 진\*\*\* · 모 정 만\*\*\*\*  
Byoung Koo Lee, Kwang Kyu Park, Sang Jin Oh and Jeong Man Mo

〈1994년 7월 6일 접수 ; 1994년 11월 3일 심사완료〉

### ABSTRACT

A numerical method is presented to obtain natural frequencies and mode shapes of uniform elastic beams with static deflections due to dead loads. The differential equation governing the free vibration of beam taken into account the static deflection due to dead loads is derived and solved numerically. The hinged-hinged, clamped-clamped and clamped-hinged end constraints are applied in the numerical examples. As the numerical results, the lowest three nondimensional frequency parameters are reported as functions of nondimensional system parameters: the load parameters, and the slenderness ratios. And some typical mode shapes of free vibrations are also presented in figures.

### 1. 서 론

보는 토목, 건축, 기계, 선박, 항공 등 구조공학 분야에서 가장 기본이 되는 구조단위이므로 그에 대한 동적 해석 특히 자유진동에 관한 많은 연구<sup>(1~7)</sup>들이 발표되고 있다. 이제까지 이러한 연구들은 사하중으로 인한 정적 처짐의 영향을 무시한 논문들이다.

최근 재료과학의 발달로 고강도의 재료가 출현하고 따라서 세장비가 매우 큰 구조물의 시공이 가능하게 되어 정적 처짐이 다소 큰 구조물에서도 정적 안전성을 확보할 수 있게 되었다. 그러나 이러한 경우에 정적 처짐은 구조물의 동적거동에 영향을 줄 것으로 생각된다.

본 연구는 참고문헌 (8)에서 유도한 편미분방정식

\*정회원, 원광대학교 토목공학과

\*\*정회원, 대전대학교 토목공학과

\*\*\*정회원, 원광대학교 대학원 박사과정

\*\*\*\*원광대학교 대학원 박사과정

을 이용하여 사하중에 의한 정적 처짐을 갖는 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수와 진동형을 산출하는 데 연구목적이 있다. 실제 수치해석 예에서 사하중은 등분포하중으로 제한하고 보의 단부조건은 힌지-힌지보, 고정-고정보, 고정-힌지보를 해석하였다.

### 2. 수학적 모형

Fig. 1은 지간길이가  $l$ 이고, 분포 사하중  $Q$ 가 작

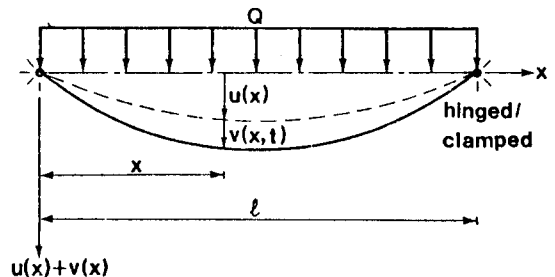


Fig. 1 Vibration mode of beam with static deflection due to dead load

용하고 있는 보의 정적모드와 동적모드를 나타내고 있다. 이 그림에서 점선으로 표시된  $u(x)$ 는 사하중  $Q$ 에 의한 정적 처짐을 나타내고 실선으로 표시된  $v(x, t)$ 는 정적 처짐  $u(x)$ 로부터 측정된 자유진동에 의한 동적 처짐을 나타낸다. 여기서  $x$ 는 보의 축방향 좌표이고  $t$ 는 시간이다.

분포 사하중  $Q$ 로 인한 정적 처짐  $u(x)$ 를 갖는 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 다음과 같다.<sup>(6)</sup>

$$\rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ EA \left( \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right] = 0 \quad (1)$$

윗 식에서  $\rho$ 는 보의 단위체적당질량,  $E$ 는 탄성계수,  $A$ 는 단면적,  $I$ 는 단면2차모멘트이다.

보의 자유진동은 조화진동을 한다고 가정하면 조화진동식은 다음과 같이 표시된다.

$$v(x, t) = v(x) \sin(\omega t) \quad (2)$$

식 (2)에서  $v(x)$ 는 조화진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이며  $\omega$ 는 고유각진동수(rad/sec)이다. 이 후에  $u(x)$ ,  $v(x)$ 는 각각  $u$ ,  $v$ 로 표시한다.

이 논문에서는 보의 단면을 등단면으로 국한하고, 식 (2)를 이용하면 식 (1)은 다음과 같이 전개된다.

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{EA}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - EA \frac{du}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{dv}{dx} - \rho A \omega^2 v = 0 \quad (3)$$

보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 이용한다.

$$\xi = x/l \quad (4.1)$$

$$\mu = u/l \quad (4.2)$$

$$\eta = v/l \quad (4.3)$$

$$s = l/r \quad (4.4)$$

윗 식들에서  $\xi$ ,  $\mu$ ,  $\eta$ 는 각각  $x$ ,  $u$ ,  $v$ 를 지간길이  $l$ 로 정규화한 것이다. 식 (4.4)에서  $r = (I/A)^{1/2}$ 이고 따라서  $s$ 는 보의 세장비이다.

식 (4.1)~(4.4)를 이용하여 식 (3)의 미분방정식을 무차원화하면 사하중으로 인한 정적 처짐을 갖는 보의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = \frac{s^2}{2} \left( \frac{d\mu}{d\xi} \right)^2 \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + s^2 \frac{d\mu}{d\xi} \frac{d^2 \mu}{d\xi^2} \frac{d\eta}{d\xi} + C_i^2 \eta \quad (5)$$

윗 식에서  $C_i$ 는 무차원 고유진동수로 다음과 같이

표시되고  $i$ 는 모드번호(mode number)이다.

$$C_i = \omega_i l^2 (\rho A / EI)^{1/2} = \omega_i s l (\rho / E)^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

식 (5)의 미분방정식에서  $d\mu/d\xi$  및  $d^2\mu/d\xi^2$ 의 항들이 보의 자유진동에서 사하중으로 인한 정적 처짐의 영향요소이고, 이들 영향요소를 무시하면 식 (5)는  $d^4\eta/d\xi^4 = C_i^2 \eta$ 로 간단해지며, 이는 참고문헌 (9)의 결과와 일치한다.

보의 단부에서 경계조건은 다음과 같이 구한다.

힌지단에서 처짐과 휨모멘트는 "0"이므로  $v=0$ ,  $EI d^2v/dx^2=0$ 이고 여기에 식 (4.3)을 적용시키면 다음과 같은 무차원 경계조건이 유도된다.

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1 \text{ 에서} \quad (7.1)$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1 \text{ 에서} \quad (7.2)$$

고정단에서 처짐과 회전각은 "0"이므로  $v=0$ ,  $dv/dx=0$ 이고 마찬가지로 식 (4.3)을 이용하면 다음과 같은 무차원 경계조건이 유도된다.

$$\eta = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1 \text{ 에서} \quad (8.1)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad \xi = 0 \text{ 또는 } 1 \text{ 에서} \quad (8.2)$$

이상에서 사하중으로 인한 정적 처짐을 갖는 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 식 (5)와 같이 유도하였고 이 미분방정식의 힌지단 및 고정단의 경계조건은 각각 식 (7.1), (7.2) 및 식 (8.1), (8.2)와 같다.

### 3. 정적 처짐의 영향요소 산정

식 (5)의 미분방정식에서  $d\mu/d\xi$  및  $d^2\mu/d\xi^2$ 의 항은 보의 단부조건과 사하중의 크기  $Q$ 에 의하여 결정되는 정적 처짐의 영향요소이다.

사하중  $Q$ 는  $x$ 의 함수로 표시되는 모든 임의 분포 하중이 가능하나 본 연구에서는 구조물의 자체중량, 콘크리트 상판 또는 설하중 등과 같이 크기가  $Q$ 인 등분포 사하중으로 제한한다. 등 분포 사하중  $Q$ 는 다음과 같이 무차원화하여 무차원 사하중으로 정의하여 사용한다.

$$q = \frac{Ql^3}{EI} \quad (9)$$

보의 단부조건으로는 힌지-힌지보, 고정-고정보, 고정-힌지보의 3개의 단부조건을 채택한다.

이 3가지 단부조건에 보에 등분포 사하중  $Q$ 가 재

하되었을 때 정적 처짐  $u$ 를 정역학적으로 구하고 이로부터 무차원화된  $\mu$ ,  $d\mu/d\xi$ ,  $d^2\mu/d\xi^2$ 는 각각 다음과 같이 구한다.

먼저 ힹ지-ힹ지보에 등분포 사하중  $Q$ 가 작용할 때 정적 처짐  $u$ 는 식 (10.1)과 같이 구해지고<sup>(10)</sup>, 이 식을 식 (4.1)과 식 (9)를 이용하면 식 (10.2)와 같이 무차원 정적 처짐  $\mu$ 를 얻을 수 있다. 식 (10.2)를  $\xi$ 에 대하여 미분하여 자유진동하는 보의 정적 영향요소인  $d\mu/d\xi$ ,  $d^2\mu/d\xi^2$ 를 구하면 각각 식 (10.3), (10.4)와 같다.

$$u = \frac{Ql^4}{24EI} \left[ \frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right] \quad (10.1)$$

$$\mu = \frac{q}{24} (\xi - 2\xi^3 + \xi^4) \quad (10.2)$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \frac{q}{24} (1 - 6\xi^2 + 4\xi^3) \quad (10.3)$$

$$\frac{d^2\mu}{d\xi^2} = \frac{q}{2} (-\xi + \xi^2) \quad (10.4)$$

둘째, 고정-고정보에 등분포 사하중  $Q$ 가 작용할 때 정적 처짐  $u$ 는 식 (11.1)과 같고 마찬가지로 방법으로  $\mu$ ,  $d\mu/d\xi$ ,  $d^2\mu/d\xi^2$ 를 구하면 각각 식 (11.2), (11.3), (11.4)와 같다.

$$u = \frac{Ql^4}{24EI} \left[ \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4 \right] \quad (11.1)$$

$$\mu = \frac{q}{24} (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4) \quad (11.2)$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \frac{q}{12} (\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3) \quad (11.3)$$

$$\frac{d^2\mu}{d\xi^2} = \frac{q}{12} (1 - 6\xi + 6\xi^2) \quad (11.4)$$

마지막으로 고정-ힹ지보에서 등분포 사하중  $Q$ 가 작용할 때  $u$  및  $\mu$ ,  $d\mu/d\xi$ ,  $d^2\mu/d\xi^2$ 는 각각 식 (12.1) ~ (12.4)와 같다.

$$u = \frac{Ql^4}{48EI} \left[ 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^4 \right] \quad (12.1)$$

$$\mu = \frac{q}{48} (3\xi^2 - 5\xi^3 + 2\xi^4) \quad (12.2)$$

$$\frac{d\mu}{d\xi} = \frac{q}{48} (6\xi - 15\xi^2 + 8\xi^3) \quad (12.3)$$

$$\frac{d^2\mu}{d\xi^2} = \frac{q}{8} (1 - 5\xi + 4\xi^2) \quad (12.4)$$

#### 4. 수치해석 방법

미분방정식 식 (5)에서 무차원 사하중  $q$ 에 의한 정적 처짐의 영향요소인  $d\mu/d\xi$ ,  $d^2\mu/d\xi^2$ 를 보의 단

부조건별로 구하였으므로 이제 이 미분방정식을 푸는 문제는 자유진동의 고유치  $C_i$ 와 그에 대응하는 진동형  $\eta_i(\xi) = \eta_i$ 를 구하는 문제로 형성된다.

본 연구에서 자유진동의 고유치  $C_i$ 값을 찾기 위하여 시행착오적 고유치문제를 이용하였고, 진동형  $\eta_i$ 를 구하기 위하여 미분방정식의 수치적분은 Improved Euler method를 이용하였다. 이와 같은 수치해석 방법은 이미 여러 문헌들<sup>(7,11)</sup>에서 그 유용성이 인정된 바 있다.

미분방정식에 포함되어 있는 고유치  $C_i$  및 대응진동형  $\eta_i$ 를 구하기 위한 수치해석 방법을 간단히 설명하면 다음과 같다.

먼저 단부조건, 무차원 사하중  $q$  및 세장비  $s$ 값을 주면, 식 (10.1) ~ (12.4)를 이용하여 대수적으로  $\mu$ ,  $d\mu/d\xi$ ,  $d^2\mu/d\xi^2$ 을 계산한다.

다음에  $C_i$ 값을 시행착오적으로 가정하여 식 (5)의 미분방정식에 대입한 후에 해석보의 단부조건에 따라서  $\xi=0$ 에서의 식 (7.1), (7.2) 또는 식 (8.1), (8.2)의 경계조건을 초기치로 하여 Improved Euler method로  $\xi=0$ 에서  $\xi=1$ 까지 미분방정식을 수치적분하여 진동형  $\eta_i$ 를 구한다.

이 때 시행착오적으로 가정한  $C_i$  값이 자유진동의 고유치인지는 수치적분의 수행결과로 얻어진 경계조건이  $\xi=1$ 에서의 실제의 경계조건 식 (7.1), (7.2) 또는 식 (8.1), (8.2)을 만족하는지의 여부로 판단한다. 즉  $C_i$  값의 산정에는 시행착오적 고유치문제를 이용하였다.

이상의 수치해석 방법을 보의 단부조건, 무차원 사하중  $q$ , 세장비  $s$ 를 입력하면 무차원 정적 처짐  $\mu$  및 자유진동의 고유치인 무차원 고유진동수  $C_i$ 와 진동형  $\eta_i$ 가 계산되도록 FORTRAN 77어로 프로그램하였고 제 3모드까지 계산하였다.

본 연구의 수치해석 방법을 검증하기 위하여 참고 문헌 (8)과 본 연구의  $C_i$  값들을 Table 1에서 비교

**Table 1** Comparison of frequency parameter  $C_i$  between this study and Ref. (8)

Geometry	$C_i$	Ref.[8]	This study
Hinged-hinged $q=0.133$ $s=50.6$	$C_1$	9.89	9.88
	$C_2$	39.5	39.5
	$C_3$	88.9	88.8
Clamped-clamped $q=0.663$ $s=50.6$	$C_1$	22.4	22.4
	$C_2$	61.7	61.7
	$C_3$	121.	121.

하였다. Table 1에서 두 결과들은 아주 우수하게 접근하여 본 연구에서 유도한 미분방정식과 수치해석 방법의 타당성을 입증할 수 있다.

### 5. 수치해석 예 및 고찰

Fig. 2, 3, 4는 각각 힌지-힌지보, 고정-고정보, 고정-힌지보에서 세장비  $s=100$ 에 대한 무차원 사하중  $q$ 와 무차원 고유진동수비  $C_i/C_{0i}$ 와의 관계를 나타낸 것이다. 여기서  $C_{0i}$ 는 사하중에 의한 정적 처짐의 영향을 고려하지 않는 즉  $q=0$ 인 경우의  $C_i$  값이며,

이 그림들 상단에  $C_{0i}$ 값을 기록하였다. 따라서  $C_i/C_{0i}$ 는  $q$ 값이  $C_i$ 에 미치는 영향력이며 이 값이 클수록 사하중이 고유진동수에 미치는 영향은 더 크다. 이  $C_{0i}$ 값들은 참고문헌<sup>(12)</sup>에서 참고한 값들이며 이 그림들에서 볼 수 있듯이  $q=0$ 인 경우에  $C_i/C_{0i}$ 값들은 모두 정확하게 "1"을 나타내고 있어서 본 연구에서의 수치해석 방법의 타당성을 간접적으로 입증하고 있다. 이 그림들로부터 단부조건에 상관없이 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째,  $q$ 값이 증가하면  $C_i/C_{0i}$ 값도 증가한다.

둘째,  $q$ 값이 같을때  $C_i/C_{0i}$ 값은  $C_1/C_{01} > C_2/C_{02} > C_3/C_{03}$ 의 순서를 보이고 있어서 고차모드에서 보다 저차모드에서 사하중이 고유진동수에 미치는 영향은 더 크다.

셋째,  $q-C_i/C_{0i}$ 의 곡선들에서 그 증가율은  $i=1$

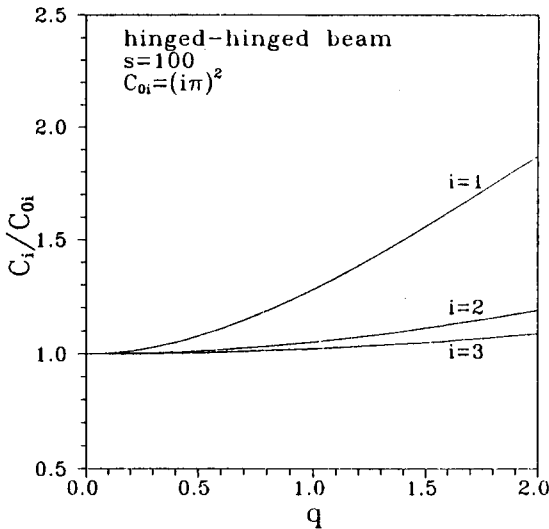


Fig. 2  $C_i/C_{0i} - q$  curve(hinged-hinged beam)

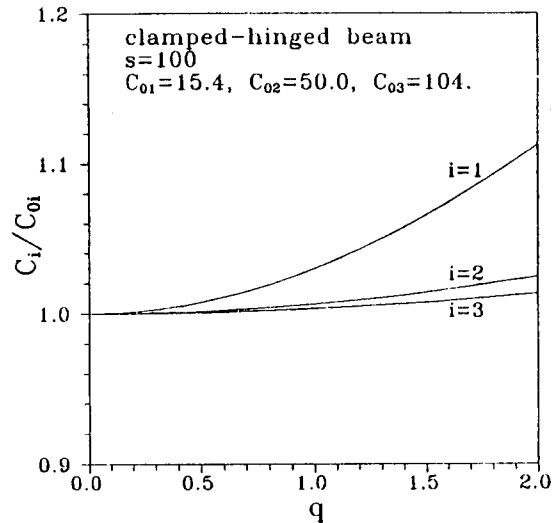


Fig. 4  $C_i/C_{0i} - q$  curve(clamped-hinged beam)

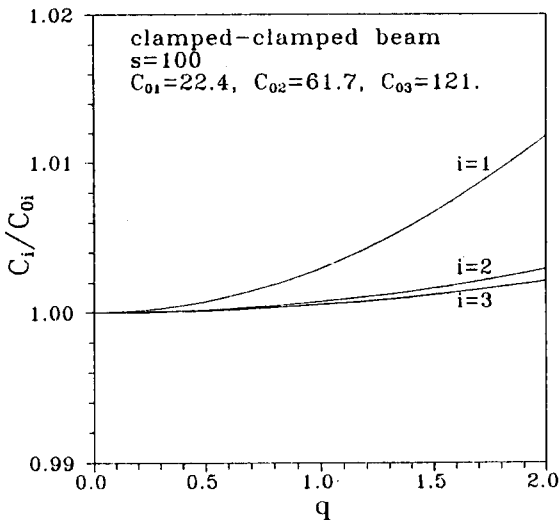


Fig. 3  $C_i/C_{0i} - q$  curve(clamped-clamped beam)

Table 2 Comparison of  $C_i/C_{0i}$  by end conditions( $s=100$ )

End condition	$i$	$q=0.5$	$q=1$	$q=1.5$
Hinged-hinged	1	1.078	1.281	1.558
	2	1.013	1.052	1.113
	3	1.006	1.023	1.052
Clamped-clamped	1	1.001	1.003	1.007
	2	1.000	1.001	1.002
	3	1.000	1.001	1.001
Clamped-hinged	1	1.008	1.030	1.065
	2	1.002	1.006	1.014
	3	1.001	1.003	1.007

$i=2 > i=3$ 의 순서로 커서 고차모드에서 보다 저차모드에서 사하중  $q$ 의 영향은 상대적으로 훨씬 더 크다.

Table 2는 Fig. 2, 3, 4에서  $q=0.5, 1, 1.5$ 에 대응하는  $C_i/C_{0i}$ 값들을 선택하여 수록한 표이며 이로 부터  $q$ 가  $C_i$ 에 미치는 영향은 힌지-힌지보 > 고정-힌지보 > 고정-고정보의 순서로 영향력이 큰 것을 알 수 있다. 특히 힌지단을 갖는 보에서  $q$ 의 영향은 상당히 커서 힌지-힌지보 및 고정-힌지보의 자유진동 해석에서 정적 처짐의 영향을 반드시 고려하는 것이 좋다고 사료된다.

Fig. 5, 6, 7은 각각 힌지-힌지보, 고정-고정보, 고

정-힌지보에서  $q=1$ 일 때 세장비  $s$ 가  $C_i/C_{0i}$ 에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 이 그림들로 부터도 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째,  $s$ 값이 증가하면  $C_i/C_{0i}$ 값도 증가한다.

둘째,  $s$ 값이 같을 때  $C_i/C_{0i}$ 값은  $C_1/C_{01} > C_2/C_{02} > C_3/C_{03}$ 의 순서를 보이고 있어서 고차모드에서 보다 저차모드에서 세장비가 고유진동수에 미치는 영향이 더 크다.

셋째, 세장비  $s$ 가  $C_i$ 에 미치는 영향은 힌지-힌지보 > 고정-힌지보 > 고정-고정보의 순서로 영향력이 크다.

Fig. 8, 9, 10은  $q=1.5, s=100$ 에 대한 힌지-힌지보, 고정-고정보, 고정-힌지보의 진동형을 나타낸 것이다. Fig. 8, 9의 힌지-힌지보, 고정-고정보에서 제 1, 3 모드는 대칭진동형, 제 2모드는 역대칭진동

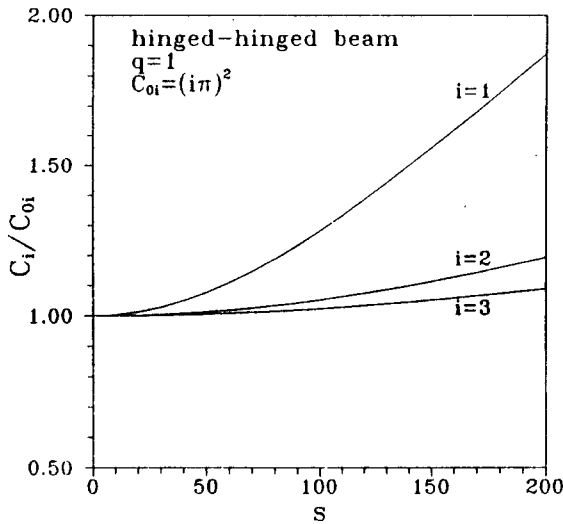


Fig. 5  $C_i/C_{0i} - s$  curve(hinged-hinged beam)

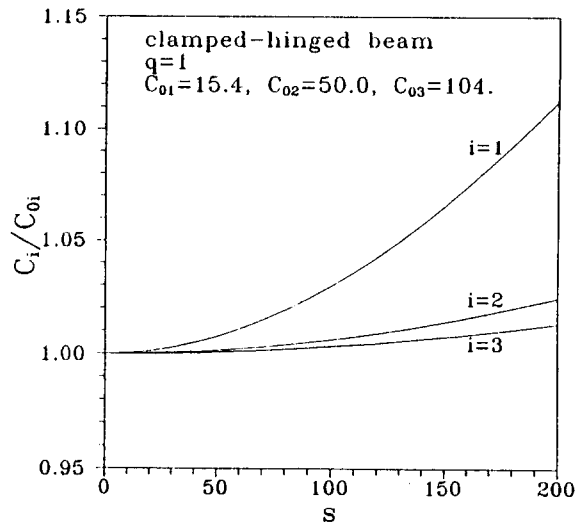


Fig. 7  $C_i/C_{0i} - s$  curve(clamped-hinged beam)

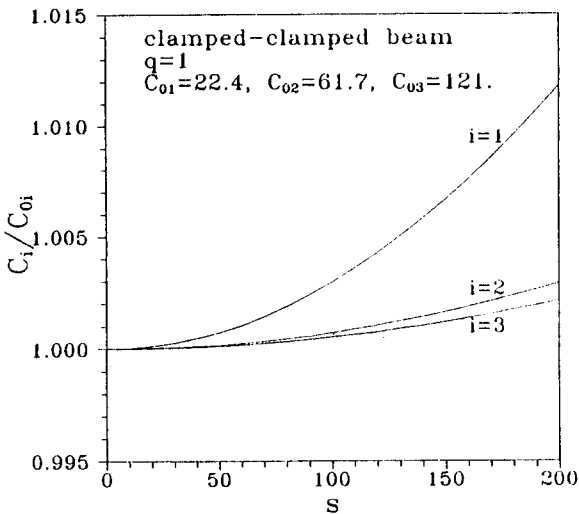


Fig. 6  $C_i/C_{0i} - s$  curve(clamped-clamped beam)

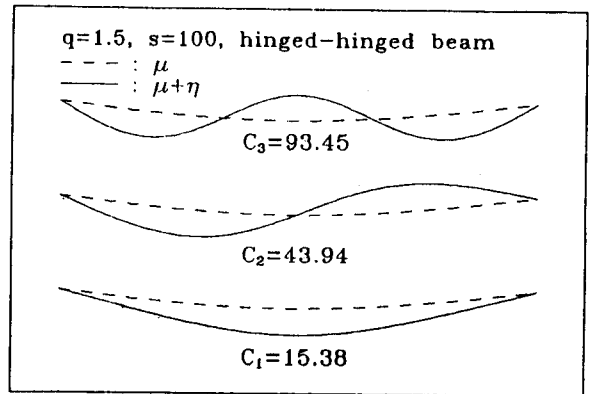


Fig. 8 Example of mode shapes(hinged-hinged beam)

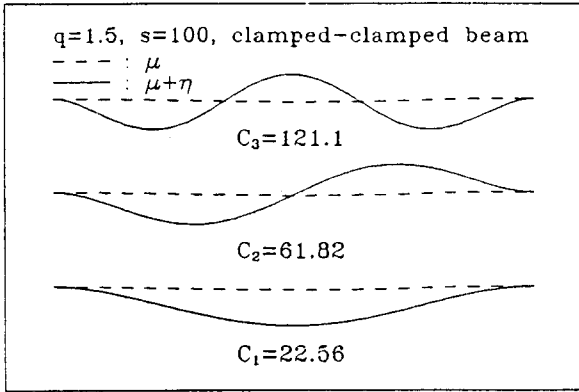


Fig. 9 Example of mode shapes(clamped-clamped beam)

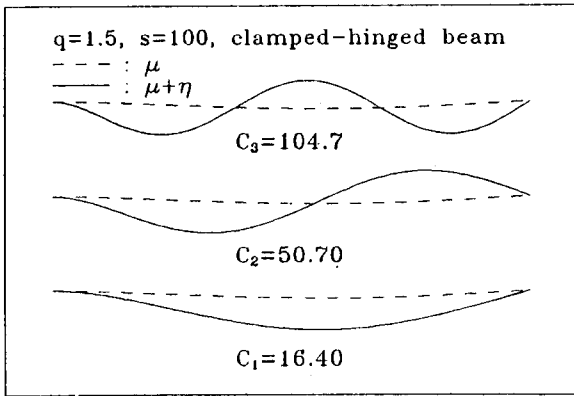


Fig. 10 Example of mode shapes(clamped-hinged beam)

형을 나타내고 있다. 정적 처짐을 고려하지 않는 경우의 진동형도 이와 같은 결과를 보이고 있으며 특히 진동형에서  $\eta=0$  되는  $\xi$ 값도 본 연구와 참고문헌 (12)의 결과가 정확하게 일치하여 정적 처짐이 자유진동의 진동형에는 영향을 못 미친다고 생각한다. 또한 고정-힌지보에서 진동형은 단부조건에 의하여 대칭진동형도 역대칭진동형도 아니며,  $\eta=0$  되는  $\xi$  값은 역시 본 연구와 문헌값이 서로 일치하였다.

### 6. 결 론

이 연구는 등분포 사하중에 의한 정적 처짐을 갖는 보의 자유진동을 해석한 논문이다. 이 논문에서는 참고문헌 (8)에서 유도한 편미분방정식을 이용하여 사하중에 의한 정적 처짐을 갖는 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 일련의 수치해석 예제를 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었

다.

- (1) 사하중에 의한 정적 처짐은 고유진동수를 증가시킨다.
- (2) 정적 처짐의 영향은 고차모드에서 보다 저차 모드에서 더 크다.
- (3) 정적 처짐의 영향은 작은 세장비에서 보다 큰 세장비에서 더 크다.
- (4) 정적 처짐의 영향은 힌지-힌지보 > 고정-힌지보 > 고정-고정보의 순서로 크다.

이 논문에서 정적 처짐이 자유진동에 미치는 영향은 등분포 사하중을 받는 등단면보의 자유진동으로 국한하였지만, 임의 분포 사하중을 받는 변단면 보의 자유진동에 대한 영향은 이후의 연구과제로 삼는다.

### 참 고 문 헌

- (1) H.C. Wang, 1967, "Generalized Hypergeometric Function Solutions on the Transverse Vibration of a Class of Non-Uniform Beams", Journal of Applied Mechanics, Vol. 136, pp. 702~708.
- (2) A.C. Heidebrecht, 1967, "Vibration of Non-Uniform Simply-Supported Beams", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 93, No. EM2, pp. 1~15.
- (3) W.Y. Tseng, 1969, Nonlinear Vibration of Straight and Buckled Beams under Harmonic Excitation, Ph. D Thesis, M. I. T., U.S.A.
- (4) A.K. Gupta, 1975, Vibration Analysis of Linearly Tapered Beams using Frequency-Dependent Stiffness and Mass Matrix, Ph. D Thesis, Utah State University, Logan, Utah, U.S.A.
- (5) A.K. Gupta, 1985, "Vibration of Tapered Beams", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 11, No. 1, pp. 1~15.
- (6) 이병구, 오상진, 최규도, 1991, "변단면 보의 자유진동 해석", 대한토목학회 논문집, 제11권 제4호, pp. 37~46.
- (7) B.K. Lee and S.J. Oh, 1994, "Free Vibrations and Buckling Loads of Beam-Columns on Elastic Foundations", Proceeding of the International Conference on Vibration Engineering, ICVE'94, Beijing, pp. 73~77.
- (8) Hideo Takabatake, 1991, "Effect of Dead Loads on Natural Frequencies of Beams", ASCE,

Journal of Structural Engineering, Vol. 117, No. 4.  
pp. 1039~1052.

(9) John M. Biggs, 1982, Introduction to Structural  
Dynamics, McGraw-Hill, Inc., pp. 150~153.

(10) J. M. Gere and S.P. Timoshenko, 1984,  
Mechanics of Materials, Wadworth, Inc., pp. 351

~428.

(11) B. K. Lee and J. F. Wilson, 1990, "Free Vibra-  
tions of Arches with Variable Curvature", Journal of  
Sound and Vibration, Vol. 136, No. 1, pp. 75~89.

(12) Mario Paz, 1991, Structural Dynamics, Van  
Nostrand Reinhold, pp. 441~450.