

〈論 文〉

# 독립된 모달공간에서 양 위치피드백 제어기법의 강인성

Robustness of Positive Position Feedback Control in the Independent Modal Space

황 재 혁\* · 백 승 호\*\*

Jai-Hyuk Hwang and Seong-Ho Baek

〈1994년 2월 7일 접수 ; 1994년 5월 9일 심사완료〉

## ABSTRACT

In this study, the effect of parameter errors on the closed-loop behavior of flexible structure is analyzed for IMSC(Independent Modal Space Control) with PPF(Positive Position Feedback). If the control force designed on the basis of structure model with the parameter errors is applied to control the actual system, the closed-loop performance of the actual system will be degraded depending on the degree of the errors. An asymptotic stability condition has been derived, using Lyapunov approach, which is independent of the dynamic characteristics of the structure being controlled. The extent of deviation of the closed-loop performance from the designed one is also derived and evaluated using operator techniques. It has been found that the extent of the deviation is proportional to the magnitude of the parameter errors, and that the proportional coefficient depends on the control algorithm.

## 1. 서 론

우주구조물과 같은 큰 구조물의 진동을 제어할 때, 어려운 문제중의 하나는 제어기의 대역폭 내에 제어하지 않는 혹은 모델링 되지 않은 진동모드가 존재하는 경우이다. 이러한 모드의 존재는 스피로버(spill-over)<sup>(1)</sup> 현상을 일으키게 되고, 따라서 잔류모드의 일부가 안정성을 잃게되는 경우가 발생한다. 이러한 스피로버 현상을 해결하기 위해 많은 연구가 수행되었으며, 그 중 가장 대표적인 것은 속도를 직접 피드백하는 병치제어 기법이다<sup>(1,2)</sup>. 이 방법은 작동기 동역학이 없다고 가정하면 무조건적으로 안정한 제어기법<sup>(3)</sup>이나 작동기 동역학이 존재하면 시스템이 불안정해질 수 있으므로 주의해야 한다. Goh와

Caughey<sup>(4)</sup>에 의하면 작동기의 고유진동수 부근 모드들의 안정성은 구조물의 감쇠비에 민감하게 의존하고 있다. 더욱이 이 감쇠비는 대부분의 경우에 있어서 정확하게 파악하기 힘든 값이다.

이러한 속도피드백 병치제어 기법의 대안으로 Goh와 Caughey<sup>(4)</sup>는 양 위치피드백(Positive Position Feedback) 제어기법을 처음으로 제안하였다. 이 기법은 스피로버를 효과적으로 해결할 수 있을 뿐 아니라, 작동기 동역학에 의해 시스템이 불안정해지지 않는다. 물론 이 제어기법은 무조건적으로 안정한 방법은 아니나 안정조건이 계의 파라미터에 의존하지 않으므로 매우 유용하다. 또한 양 위치피드백 제어기법에서는 다만 변위만 측정하면 되므로 센서의 수를 줄일 수 있고 스트레인 측정장치 등을 쉽게 사용할 수 있다. Fanson과 Caughey<sup>(5)</sup>는 이 양 위치피드백 제어기법과 PVDF 압전작동기 및 감지기를 사용하여 알루미늄 보의 진동제어를 연구하였다.

\*정회원, 한국항공대학교 항공기계공학과

\*\*한국항공대학교 대학원

Meirovitch와 공동연구자<sup>(6~11)</sup>들은 구조물의 진동 제어를 위해 독립된 모달공간에서 제어를 간단하고 쉽게 설계할 수 있는 독립모달공간 제어기법 (Independent Modal Space Control)을 연구하였다. 이 기법은 모달행렬을 변환행렬로 하여 구조물의 운동방정식을 모달좌표계의 비결합된 방정식으로 분리시킨 후 모달공간에서 제어를 설계한다. 이 경우, 제어기의 설계는 각 모드별로 모달 상태를 이용하여 독립적으로 수행되므로 모델의 자유도 수에 관계없이 설계가 항상 간단하다. 이 제어기법에서는 모달 제어력을 먼저 설계하고, 좌표변환을 통해 실제 제어력을 계산하게 된다. 독립모달공간 제어기법에서 제어하고자 하는 모드의 수와 작동기의 수만 같으면 가제어성은 항상 만족하고 제어 스펙오버는 존재하지 않는다. 또한 제어하고자 하는 모드를 추정 (Identification)하기에 충분한 갯수의 감지기와 모달 필터를 사용하면 관측 스펙오버도 방지할 수 있다. 그러나 이 기법을 사용하여 구조물의 진동을 제어하고자 할 때 제어하고자 하는 모드의 변위 및 속도 모두를 측정하여야 한다.

Baz와 Poh 그리고 Fedor<sup>(12)</sup>는 양 위치피드백 제어기법의 장점과 독립모달공간 제어기법의 장점을 모두 이용하는 기법을 제안하였다. 지금부터 Baz 및 공동연구자<sup>(12)</sup>의 제어방법을 편의상 Baz의 방법이라 부르기로 한다. Baz가 사용한 양 위치피드백 제어방법은 Goh와 Caughey<sup>(4)</sup>가 제안한 방법과 다른점이 많다. 그중 가장 큰 차이점은 Baz의 방법의 경우 위치신호가 1차필터 (first order filter)로 피드백되며, Goh와 Caughey의 방법에서는 위치신호가 2차필터 (second order filter)로 피드백된다. 따라서 Baz의 방법은 Goh와 Caughey의 방법에 비해 제어를 설계할 때 결정해야 하는 변수의 수를 약 1/3으로 줄일 수 있는 장점을 갖고 있다. 다른 큰 차이점으로 Baz의 방법은 독립된 모달공간에서 양 위치피드백 제어기법을 사용하므로 비결합된 (decoupled) 개루프 방정식이 제어기 포함후에도 여전히 비결합되어 있는데 비해, Goh와 Caughey의 방법에서는 처음에는 비결합된 개루프 방정식이 제어법칙에 의해 결합된 폐루프 방정식으로 된다. 그러나, 플랜트 모델의 불확실성에 대한 Baz의 방법의 강인성에 대한 연구는 지금까지 이루어지지 않았다.

따라서 본 연구에서는 독립모달공간 제어기법의 장점과 양 위치피드백 제어기법의 장점을 모두 활용하는 Baz의 방법의 강인성을 연구하고자 한다. 일반적으로 강인성의 해석을 위한 모델의 불확실성은 파

라미터 오차와 unmodelled 동역학으로 크게 나눌 수 있다. 본 연구에서 다루는 제어기법이 독립된 모달공간에서 설계되므로 unmodelled 동역학에 의한 스펙오버 현상 등은 배제할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 운동방정식을 얻을 때 발생하는 파라미터 오차와 고유해를 계산할 때 발생하는 오차가 폐루프의 안정성 및 성능에 미치는 영향을 해석하고자 한다. 고유해를 계산할 때 발생하는 오차의 모양이 파라미터 오차와 동일하므로 본 논문을 통해 모두 파라미터 오차라 부르며, 따라서 파라미터 오차는 2종류의 오차를 포함하고 있다. 본 연구에서는 먼저 파라미터 오차가 폐루프의 안정성에 미치는 영향을 고찰하였고, Lyapunov 점근안정성 (asymptotic stability)을 얻기 위한 필요충분 조건을 유도하였다. 또한 파라미터 오차가 존재할 때 폐루프의 성능이 설계치로부터 벗어나는 응답오차의 상한 (upper bound)을 연산자이론 (operator techniques)을 사용하여 유도하였다. 본 연구를 통해 폐루프의 응답오차의 상한은 파라미터 오차의 크기에 비례하고 있으며, 비례상수는 제어기의 구조에 의존하고 있음을 확인하였다.

## 2. 독립된 모달공간에서 양 위치피드백 제어기법

독립된 모달공간에서 양 위치피드백 제어기법<sup>(12)</sup>을 다음과 같이 기술할 수 있다. Fig. 1에서 나타낸 바와 같이 모달변위  $q_i(t)$ ,  $i=1,2,\dots,n$ 을 시정수  $\tau_i$ 를 갖는 각각의 1차필터에 피드백시킨다. 여기서  $n$ 은 제어하고자 하는 모드의 수이다. 이 때 필터출력  $y_i(t)$ 는 기준 모달변위  $v_{Ri}$ 와 합하여지고 비례제어게인  $K_i = \gamma_i \omega_i^2$  만큼 증폭시킨다. 여기서  $\omega_i$ 는  $i$ 번째 모드의 고유진동수이며,  $\gamma_i$ 는 정상상태 오차를 0으로 만드는 조건을 이용하여 결정되는 상수이다. 이렇게 증폭된 모달제어력  $f_i$ 는 구조물의  $i$ 번째 모드를 제어하는 힘으로 작용하게 된다. 이상과 같이 얻어진 모달제어력을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$f(t) = K_p y(t) \tag{1}$$

$$\dot{y}(t) = -A y(t) + A q(t) \tag{2}$$

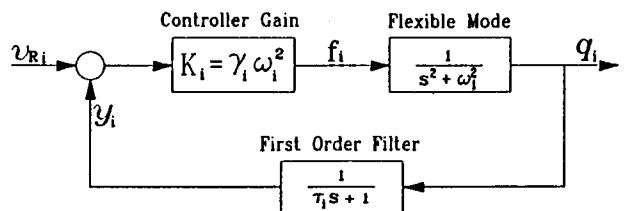


Fig. 1 Block diagram of the IMSC with PPF controller

여기서  $K_p$ 와  $A$ 는 다음과 같이 표현되는 크기가  $n$ 인 대각행렬들이다.

$$K_p = \text{diag}(\gamma_1 \omega_1^2, \dots, \gamma_n \omega_n^2),$$

$$A = \text{diag}(1/\tau_1, \dots, 1/\tau_n) \quad (3)$$

또한 필터출력  $y(t)$ 와 모달변위벡터  $q(t)$  및 모달제어력 벡터  $f(t)$ 의 크기는  $n \times 1$ 이다. 식 (1)을 구할 때  $\nu_{Ri}, i=1,2,\dots,n$ 은 모두 0으로 가정하였다.  $\nu_{Ri}$ 가 0일 때는 진동제어를 뜻하며,  $\nu_{Ri} \neq 0$ 일 때는 구조의 모양제어에 해당된다. 제어기의 설계과정에서 모든  $\gamma_i$ 는 정상상태 오차를 0으로 만드는 조건을 부과하여 0.5로 선정하였다. 이 값은 구조-필터계의 점근안정성의 범위( $\gamma_i < 1$ )에 속하고 있다. 각 필터의 시정수  $\tau_i$ 의 최적값은 페루프의 감쇠비를 최대가 되도록 조정할 때 다음과 같이 결정된다.

$$\tau_i = \frac{1}{1.18\omega_i}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (4)$$

식 (4)와 같이 필터의 시정수를 결정하면 모든 진동모드가 동일한 감쇠비를 갖게된다.

필터출력 벡터의 초기값  $y(0)$ 을 0으로 가정하고 식 (2)의 해를 구하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(t) = \int_0^t G(t-\tau)q(\tau)dt = (G * q)(t) \quad (5)$$

이 식에서  $G(t-\tau)$ 는 일종의 커널함수(kernel function)로서  $G(t-\tau) = e^{-A(t-\tau)}A$ 으로 정의된다. 또한  $G * q$ 는 함수  $G(t)$ 와  $q(t)$ 의 컨볼루션적분(convolution integral)을 의미한다. 여기서  $A$ 가 대각행렬이므로 함수  $G(t)$ 을 구하는 계산도 매우 간단하게 된다. 식 (5)를 식 (1)에 대입하면 모달 제어력 벡터는 다음과 같이 된다.

$$f(t) = K_p(G * q)(t) \quad (6)$$

다음 모달공간에서 구조물의 운동방정식은 일반적으로 다음과 같이 기술된다.

$$I_n \ddot{q}(t) + \Lambda q(t) = f(t) \quad (7)$$

여기서  $I_n$ 는 크기가  $n$ 인 단위행렬이며,  $\Lambda$ 는 대각성분이 고유진동수의 제곱으로 구성된 대각행렬이다. 즉  $\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$ 이다. 이 식에서  $q(t)$ 는 제어기의 설계시 사용되는 모달변위 벡터이다. 또한 식 (7)을 얻는 과정에서 구조물의 감쇠력은 없으므로 간주하였다. 이 가정은 구조물의 진동특성 해석시 및 진동제어기 설계시 보편적으로 받아드러지고 있다. 그러나 구조물의 감쇠력을 고려하는 경우에서도 본 연구의 안정성에 대한 결과는 동일하게

적용될 수 있다.

다음으로, 식 (7)을 유도하는데 활용된 수학적 모델이 만일 서론에서 언급한 파라미터 오차를 포함하고 있다면, 원래 시스템의 운동방정식은 다음과 같은 형태로 표현될 수 있다<sup>(7)</sup>. 여기서 강인성을 해석하기 위해 파라미터의 크기를 임의의 알려진 값으로 가정하였다.

$$M\ddot{\nu}(t) + K\nu(t) = f(t) \quad (8)$$

이 식에서는 모델의 모달변위벡터와 구분하기 위해 다른 변수  $\nu$ 를 사용하였다. 여기서  $M$ 과  $K$ 는 더 이상 대각행렬은 아니나, 대칭이며 양한정(positive definite)하다. 파라미터 오차가 비교적 적을 때는  $M$ 과  $K$ 는 각각  $I_n$ 과  $\Lambda$ 에 가깝게 접근하게 된다. 만일 파라미터 오차와 같은 모델링 오차를 갖고 있는 시스템을 근거로 하여 독립된 모달공간에서 양 위치 피드백 제어기, 즉 식 (6)을 설계하여 사용할 때 원래 구조물은 안정성과 성능면에서 좋은 강인성을 갖게 될 것인지 의심이 생기게 된다. 따라서 본 연구의 목적은 플랜트의 모델의 불확실성(본 연구의 경우 파라미터 오차)에 대한 Baz의 제어방법의 강인성을 연구하고자 한다. 파라미터 오차를 갖고 있는 계에서 적당한 성능이 만족되도록 Baz의 제어방법을 적용하여 제어기가 설계되었을 때, 그 페루프 계의 운동방정식은 식 (6)과 (7)로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$I_n \ddot{q}(t) + \Lambda q(t) - K_p(G * q)(t) = 0 \quad (9)$$

이렇게 설계된 제어기를 실제 계에 적용했을 때 실제 계의 페루프 운동방정식은 식 (6) 및 식 (8)에서 구할 수 있다.

$$M\ddot{\nu}(t) + K\nu(t) - K_p(G * \nu)(t) = 0 \quad (10)$$

### 3. 제어시스템의 강인성

본 절에서는 플랜트 모델의 파라미터 오차가 Baz의 방법으로 설계한 페루프 시스템에 어떠한 영향을 미치는지를 고찰하고자 한다. 일반적으로 플랜트 모델의 파라미터 오차는 실제 구조물의 거동을 원래 설계된대로 일어나지 않게 한다. 또한 식 (10)에서 보듯이 실제 구조물의 페루프 시스템은 파라미터 오차 때문에 엄격한 관점에서 독립한 모달공간에서의 제어기법이 되지 못한다. 따라서 실제 구조물의 페루프 시스템은 그 성능이 저하될 것이며, 그 정도는 파라미터 오차의 크기에 의존하게 된다.

먼저 파라미터 오차가 실제 구조물의 안정성에 미치는 영향을 보기위해 식 (10)을 다음과 같이 2개의 식으로 표현한다.

$$M\ddot{y} + K\nu - K_p y = 0 \quad (11)$$

$$\dot{y} - A\nu + Ay = 0 \quad (12)$$

식 (11)과 (12)에서 대칭성을 갖도록 하기위해, 비특이(nonsingular) 좌표변환  $y = K_p^{-1/2} A^{1/2} \psi$ 을 수행하고, 식 (12)에 대해  $A^{-T/2} K_p^{T/2}$ 을 앞에서 곱하면 식 (11) 및 (12)는 각각 다음과 같이 된다.

$$M\ddot{\psi} + K\nu - K_p^{1/2} A^{1/2} \psi = 0 \quad (13)$$

$$\dot{\psi} - A^{T/2} K_p^{T/2} \nu + A\psi = 0 \quad (14)$$

이 식에서  $\psi$ 는 변환된 좌표이다. 시스템 (13), (14)의 점근안정성을 갖게하는 조건식을 Lyapunov함수의 개념을 이용하여 구하고자 한다. 먼저 식 (13), (14)에 대해 다음과 같은 함수를 정의할 때

$$V(t) = \frac{1}{2} \dot{\psi}^T M \dot{\psi} + \frac{1}{2} [\nu, \psi]^T \begin{bmatrix} K - K_p^{1/2} A^{1/2} \\ -A^{T/2} K_p^{T/2} A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu \\ \psi \end{Bmatrix} \quad (15)$$

만일 식 (15)의 우변의 두번째 항이 양한정하다고 가정하면 함수  $V(t)$ 는 양한정하게 된다. 이는 전절에서 언급하였듯이,  $M, K$ 는 대칭이며 양한정인 행렬이고, 또한  $A, K_p$ 는 양한정인 대각행렬임을 고려하면 쉽게 이해할 수 있다. 여기서 식 (15)의 시간에 대한 미분  $\dot{V}(t)$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\dot{V}(t) = \dot{\psi}^T M \ddot{\psi} + [\nu, \psi]^T \begin{bmatrix} K - K_p^{1/2} A^{1/2} \\ -A^{T/2} K_p^{T/2} A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\nu} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

식 (13) 및 (14)를 식 (16)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 간단하게 된다.

$$\dot{V}(t) = -\psi^T A^2 \psi - \nu^T K_p A \nu \quad (17)$$

이 식으로부터  $\dot{V}(t)$ 는 음의 반한정(negative semidefinite)임을 알 수 있다. 이는  $A, K_p$ 가 각각 양한정 대각행렬이며,  $\dot{V}(t)$ 의 값이  $\dot{\nu} \neq 0, \nu = \psi = 0$ 일때 0이 되기 때문이다. 따라서  $V(t)$ 가 동역학시스템 (13), (14)의 상태 전영역에 대해 양한정하고  $\dot{V}(t)$ 가 음의 반한정하므로  $V(t)$ 는 Lyapunov함수가 되고 실제구조물의 페루프 방정식(13), (14)는 Lyapunov 안정성을 갖게 된다. 그러나 식 (13), (14)계에서 Invariant Set<sup>(14)</sup>은  $\dot{\nu} = \nu = \psi = 0$ 일때만 해당되므로 La Salle의 Invariant Set Theorem에 의해 실제구조물의 페루프 방정식은 점근안정성을 갖

게 됨을 알 수 있다. 이제 지금까지의 결과를 요약하면 다음의 정리로 나타낼 수 있다.

정리 1 :

식 (13), (14)가 Lyapunov 점근안정성을 갖기 위한 필요충분조건은  $K - K_p > 0$ 이다. 즉 양한정해야 한다.

증명 :

이는 식 (15)의 우변 두번째항이 양한정되기 위한 필요충분조건이  $K - K_p > 0$ 임을 증명하면 된다. 먼저 충분조건을 증명하기 위해 식 (15)의 우변 두번째항이 양한정되는 경우를 고려해 보자.

$$[\nu, \psi]^T \begin{bmatrix} K & D \\ D^T & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu \\ \psi \end{Bmatrix} > 0 \quad (18)$$

여기서,  $D = -K_p^{1/2} A^{1/2}$ 이다. 식 (18)을 전개하면 다음과 같다.

$$\nu^T K \nu + \psi^T A \psi + \nu^T D \psi + \psi^T D^T \nu > 0 \quad (19)$$

이 식에  $\nu^T D A^{-1} D^T \nu$ 을 한번 더하고 뺀후 정리하면 다음식을 얻게된다.

$$\begin{aligned} & \nu^T (K - D A^{-1} D^T) \nu + (A^{-T/2} D^T \nu + A^{1/2} \psi)^T \\ & \times (A^{-T/2} D^T \nu + A^{1/2} \psi) > 0 \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)의 두번째 항은 항상 0보다 크거나 같으므로 식 전체가 양이되기 위해서는 첫번째 항이  $\nu$ 의 어떤 값에 대해서도 양이 되어야 한다. 따라서

$$K - D A^{-1} D^T > 0 \quad (21)$$

이 되며, 위에서 정의한  $D = K_p^{-1/2} A^{1/2}$ 을 대입하면 다음식을 얻는다.

$$K - K_p > 0 \quad (22)$$

또한 필요조건은 비슷한 방법으로 쉽게 증명할 수 있다.

본 연구의 결과로부터 실제구조물의 안정성은 구조물의 내부감쇠특성에 의존하지 않음을 알 수 있다. 또한 식 (22)를 만족하기 위해서는 필터게인행렬  $K_p$ 가 매우 크지 않아야 한다.

다음 플랜트 모델의 파라미터 오차가 실제구조물의 페루프 성능에 미치는 영향을 고찰해 보기로 한다. 이를위해 식 (8)의 계수행렬  $M, K$ 를 다음과 같이 표현한다.

$$M = I + \Delta M, \quad K = \Lambda + \Delta K \quad (23)$$

이 식에서  $\Delta M$ 과  $\Delta K$ 는 실제계와 플랜트 모델사이 에 존재하는 파라미터 오차에 기인하는 행렬이다.

만일 파라미터 오차가 매우 작다면, 행렬  $\Delta M$  및  $\Delta K$ 의 각 요소는 0에 가깝게 되며 아울러  $I$ 와  $\Lambda$ 의 대각요소에 비해 상대적으로 매우 작게된다. 실제계의 변위벡터  $\nu$ 와 모델의 변위벡터  $q$ 의 차이를  $e = \nu - q$ 라고 정의할 때,  $e$ 에 관한 지배방정식은 식 (10)에서 식 (9)를 빼면 얻을 수 있다.

$$I\ddot{e}(t) + \Lambda e(t) - K_p(G * e)(t) = -\Delta M \ddot{\nu}(t) - \Delta K \nu(t) \quad (24)$$

이 식에서  $e(t) = [e_1(t), \dots, e_n(t)]$ 이며,  $e(t)$ 는 파라미터 오차  $\Delta M, \Delta K$ 에 의해 가진되고 있음을 알 수 있다. 만일 모델의 파라미터 오차가 0이면,  $\Delta M = \Delta K = 0$ 이 되며 실제계의 변위벡터는 모델의 변위벡터와 일치하게 된다. 즉  $e(t) = 0, t \geq 0$ 이 된다. 또한 식 (24)로부터  $e(t)$ 의 거동은 독립된 모달공간에서 사용되는 제어 알고리즘의 종류에 의존하고 있음을 알 수 있다. 따라서 동일한 파라미터 오차에 대해 벡터  $e(t)$ 를 최소화하는 제어법칙을 찾아내는 연구는 현재 수행중에 있다.

본 연구에서 주어진 파라미터 오차에 대해  $e(t)$ 의 상한을 얻기 위해, 다음과 같은  $L_\infty$ -놈(norm)을 정의한다.

$$\|h(t)\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \geq 0} |h_i(t)| \quad (25)$$

여기서  $h(t)$ 는  $n$ 개의 성분을 가지는 임의의 벡터함수  $h(t) = [h_1(t), \dots, h_n(t)]$ 이다. 식 (24)에 대해 라플라스 변환을 적용하고, 초기조건  $e(0) = \dot{e}(0) = 0$ 을 사용하면 다음 식을 얻는다.

$$\bar{e}(s) = -[Is^2 + \Lambda - K_p G(s)]^{-1} (\Delta M s^2 - \Delta K) \bar{\nu}(s) \quad (26)$$

이 식에서  $\bar{e}(s), \bar{\nu}(s)$ 는 각각  $e(t)$ 와  $\nu(t)$ 의 라플라스 변환된 벡터이다. 다음과 같은  $n \times n$  행렬을 정의하면

$$\bar{H}_1(s) = -[Is^2 - \Lambda - K_p G(s)]^{-1} \Delta M s^2 \quad (27a)$$

$$\bar{H}_2(s) = -[Is^2 - \Lambda - K_p G(s)]^{-1} \Delta K \quad (27b)$$

식 (26)은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{e}(s) = [\bar{H}_1(s) + \bar{H}_2(s)] \bar{\nu}(s) \quad (28)$$

식 (27)에서 정의된 행렬  $\bar{H}_1(s)$ 와  $H_2(s)$ 의  $i$ -번째 행은 다음과 같다.

$$\frac{-s^2(s+1.18\omega_i)}{s^3+1.18\omega_i s^2+\omega_i^2 s+0.59\omega_i^3} \times [m_{i1}, \dots, m_{ii}, \dots, m_{in}] \quad (29a)$$

$$\frac{-(s+1.18\omega_i)}{s^3+1.18\omega_i s^2+\omega_i^2 s+0.59\omega_i^3} [k_{i1}, \dots, k_{ii}, \dots, k_{in}] \quad (29b)$$

이 식들에서  $m_{ij}$  및  $k_{ij}$ 는 각각 행렬  $\Delta M$ 과  $\Delta K$ 의 요소이며, 이 식을 얻을 때  $\tau_i = 1/(1.18\omega_i), \gamma_i = 0.5, i=1, \dots, n$ 을 이용하였다. 이제 식 (28)은 다음과 같은 컨볼루션적분으로 나타낼 수 있다.

$$e(t) = (H_1 * \nu)(t) + (H_2 * \nu)(t) = \int_0^t [H_1(t-\tau) + H_2(t-\tau)] \nu(\tau) d\tau \quad (30)$$

식 (30)에서  $H_1 = L^{-1}[\bar{H}_1(s)], H_2 = L^{-1}[\bar{H}_2(s)]$ 이다. 지금까지  $e(t)$ 에 대해 유도과정에서 아무런 근사화 과정이 없었다. 식 (30)을 간단히 표현하기 위해 다음과 같은 두개의 선형연산자(linear operator)를 정의한다.

$$\hat{H}_1(\nu) = (H_1 * \nu)(t) \quad (31a)$$

$$\hat{H}_2(\nu) = (H_2 * \nu)(t) \quad (31b)$$

식 (30)과 (31)을 이용하여  $e(t)$ 의 상한,  $\|e(t)\|$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\|e(t)\| = \|\hat{H}_1(\nu) + \hat{H}_2(\nu)\| \leq (\|\hat{H}_1\| + \|\hat{H}_2\|) \|\nu\| \quad (32)$$

여기서  $\|\hat{H}_1\|, \|\hat{H}_2\|$ 는 각각 선형연산자  $\hat{H}_1, \hat{H}_2$ 의  $L_\infty$ -유도놈(induced norm)이다.  $L_\infty$ -유도놈  $\|\hat{H}_1\|, \|\hat{H}_2\|$ 는 Desoer와 Vidyasaga<sup>(15)</sup>의 결과를 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\|\hat{H}_1\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_{1i} \int_0^\infty |h_{1i}(\tau)| d\tau \quad (33a)$$

$$\|\hat{H}_2\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_{2i} \int_0^\infty |h_{2i}(\tau)| d\tau \quad (33b)$$

이 식에서  $\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, i=1, \dots, n$ 은 각각 행렬  $\Delta M, \Delta K$ 에서  $i$ 번째 행에서 각 요소의 절대값의 합이다. 즉

$$\sigma_{1i} = \sum_{j=1}^n |m_{ij}|, \quad \sigma_{2i} = \sum_{j=1}^n |k_{ij}| \quad (34)$$

그리고 함수  $h_{1i}(t), h_{2i}(t)$ 는 다음과 같다.

$$h_{1i}(t) = L^{-1} \left[ \frac{-s^2(s+1.18\omega_i)}{s^3+1.18\omega_i s^2+\omega_i^2 s+0.59\omega_i^3} \right] = -0.217\omega_i \exp(-0.831\omega_i t) + 1.06\omega_i \exp(-0.174\omega_i t) \cdot \sin(0.823\omega_i t + 0.205) \quad (35a)$$

$$h_{2i}(t) = L^{-1} \left[ \frac{-(s+1.18\omega_i)}{s^3+1.18\omega_i s^2+\omega_i^2 s+0.59\omega_i^3} \right] = -\frac{0.314}{\omega_i} \exp(-0.831\omega_i t)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1.399}{\omega_i} \exp(-0.174\omega_i t) \cdot \sin(0.823\omega_i t) \\
 & -\frac{0.321}{\omega_i} \exp(-0.174\omega_i t) \cdot \sin(0.823\omega_i t) \\
 & -1.362) \quad (35b)
 \end{aligned}$$

식 (35)와 식 (33)을 사용하여  $\|\hat{H}_1\|$ ,  $\|\hat{H}_2\|$ 에 대한 적분을 해석적으로 수행하기는 매우 어려우나, 수치적 적분은 쉽게 수행할 수 있다. 수치적분의 수렴성은 함수  $h_{1i}(t)$ ,  $h_{2i}(t)$ ,  $i=1, \dots, n$ 가 지수적으로 감소하는 함수이므로 쉽게 확인할 수 있다.  $L_\infty$ -유도놈의 정의에 의해, 식 (32)는 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다<sup>(16)</sup>.

$$\|e(t)\| \leq m \|v\| \quad (36)$$

여기서  $m$ 은  $\|\hat{H}_1\| + \|\hat{H}_2\|$ 를 뜻한다. 또한  $\|\hat{H}_1\|$ 과  $\|\hat{H}_2\|$ 는 각각  $\sigma_{1i}$ 와  $\sigma_{2i}$ 에 의존하고 있으며, 모두 고유진동수  $\omega_i$ 에 의존하고 있다. 이 식들에서 파라미터 오차의 크기가  $\|e(t)\|$ 에 미치는 영향을 확인할 수 있다. 만일 질량행렬에 나타나는 파라미터 오차  $\sigma_{1i}$ 가 매우 적다면  $\|\hat{H}_1\|$ 의 값은 매우 적게 되고, 강성행렬에 나타나는 파라미터 오차  $\sigma_{2i}$ 가 적다면  $\|\hat{H}_2\|$ 의 값이 매우 적게 된다. 따라서 전반적인 파라미터 오차가 적다면  $\|e(t)\|$ 도 매우 적게 됨을 알 수 있다. 또한 식 (24)와 식 (33)에서 알 수 있듯이,  $\|e(t)\|$ 와 파라미터 오차의 크기 사이에는 선형관계를 이루고 있으며, 비례계수는 제어기법의 구조에 의존하고 있다. 아울러 식 (36)이 의미하는 바를 다음과 같이 설명할 수 있다. 모델링오차 ( $\Delta M$ ,  $\Delta K$ )가 있는 시스템에서 제어기를 설계하면, 실제 페루프 구조물의 성능은 설계값에 비해 변화가 있으며, 그 크기는 항상  $m\|v\|$ 보다 적으며 따라서  $e(t)$ 는 항상  $\pm m\|v\|$ 의 밴드 안에 있게 된다. 본 절에서 유도한 안정성의 조건 및 성능변화의 상한값의 계산결과는 제어력  $f(t)$ 와 더불어 외란 입력  $d(t)$ 가 존재하여도 동일하게 적용될 수 있다.

#### 4. 예 제

본 절에서는 지금까지 얻어진 결과를 설명하기 위해 6개의 자유도로 모델링한 구조물을 예제로 사용하였다. 구조물의 수학적 모델을 근거로 하여 Baz의 제어방법으로 제어기를 설계했을 때, 식 (9)는 다음과 같이 된다고 가정한다.

$$I_n \ddot{q}(t) + \Lambda q(t) - K_p (G * q)(t) = 0 \quad (37)$$

여기서

$$\Lambda = \text{diag}[0.1554, 2.494, 12.6243, 39.904, 97.4166, 202.061]$$

$$K_p = \text{diag}[0.0777, 1.247, 6.312, 19.952, 48.708, 101.03]$$

이며, 따라서 커널함수  $G(t-\tau)$ 에 사용되는 행렬  $A$ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$A = \text{diag}[0.4652, 1.8636, 4.193, 7.454, 11.647, 16.773]$$

또한 설계된 제어기를 사용한 실제계의 페루프 방정식 (10)의 질량행렬 및 강성행렬은 다음과 같이 3종류가 있다고 가정한다.

Case (i)

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.8294 & -0.0019 & -0.0007 & 0.0037 & -0.075 & -0.0076 \\ -0.0019 & 0.8322 & -0.0669 & 0.0055 & -0.0005 & 0.0027 \\ -0.0007 & -0.0669 & 0.8271 & 0.0036 & -0.007 & 0.0725 \\ 0.0037 & 0.0055 & 0.0036 & 0.8265 & 0.0746 & -0.074 \\ -0.075 & -0.0005 & -0.007 & 0.0746 & 0.8265 & 0.0039 \\ -0.0076 & 0.0027 & 0.0725 & -0.074 & 0.0039 & 0.8266 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 167.836 & -0.0086 & -0.0156 & 0.3196 & -10.479 & 0.3846 \\ -0.0086 & 0.1291 & -0.0418 & 0.0138 & -0.0027 & 0.0051 \\ -0.0156 & -0.0418 & 2.065 & 0.0386 & -0.1098 & 0.4069 \\ 0.3196 & 0.0138 & 0.0386 & 32.998 & 4.6496 & -1.6604 \\ -10.479 & -0.0027 & -0.1098 & 4.6496 & 80.54 & 0.1399 \\ 0.3846 & 0.0051 & 0.4069 & -1.6604 & 0.1399 & 10.4441 \end{bmatrix}$$

Case (ii)

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1.0569 & 0.00004 & 0.0002 & -0.0012 & 0.0247 & -0.0025 \\ 0.00004 & 1.0558 & 0.0223 & -0.0018 & 0.0002 & -0.0009 \\ 0.0002 & 0.0223 & 1.0576 & -0.0012 & 0.0023 & -0.0241 \\ -0.0012 & -0.0018 & -0.0012 & 1.0578 & -0.0248 & 0.0247 \\ 0.0247 & 0.0002 & 0.0023 & -0.0248 & 1.0578 & -0.0013 \\ -0.0025 & -0.0009 & -0.0241 & 0.0247 & -0.0013 & 1.0578 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 213.469 & 0.0028 & 0.0052 & -1.0654 & 3.493 & -0.1282 \\ 0.0028 & 0.1646 & 0.0134 & -0.0046 & 0.0009 & -0.0017 \\ 0.0052 & 0.0134 & 2.6373 & -0.0129 & 0.0366 & -0.1352 \\ -1.0654 & -0.0046 & -0.0129 & 42.205 & -1.5495 & 0.5535 \\ 3.493 & 0.0009 & 0.0366 & -1.5495 & 103.042 & -0.0467 \\ -0.1282 & -0.0017 & -0.1352 & 0.5535 & -0.0467 & 13.3536 \end{bmatrix}$$

Case (iii)

$$M_3 = M_2,$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 160.80 & -0.0856 & -0.1561 & 3.1964 & -15.7 & 3.846 \\ -0.0856 & 0.10 & -0.418 & 0.1385 & -0.027 & 0.051 \\ -0.1561 & -0.418 & 2.0 & 0.3864 & -1.098 & 4.69 \\ 3.1964 & 0.1358 & 0.1864 & 30.6 & 10.6 & -10.4 \\ -15.7 & -0.027 & -1.098 & 10.6 & 70.6 & 1.4 \\ 3.846 & 0.051 & 4.69 & -10.4 & 1.4 & 6.4 \end{bmatrix}$$

먼저 3종류의 실제계의 페루프 방정식의 안정성을 고려하기 위해, 본 연구에서 유도한 안정성의 필요 충분조건  $K-K_p$ 의 양한정성(식 (22))을 검토한다. 그 결과 Case (i)과 (ii)에서는  $K-K_p$ 가 양한정하나 Case (iii)의 경우는 실제계의 페루프 방정식이 불안정하게 됨을 알 수 있다. 이러한 안정성은 페루프 방정식의 고유치를 계산해 봄으로써 역시 판별할 수 있다. 수학적 모델을 사용한 경우와 3종류의 실제계의 페루프 고유치는 Table 1에 나타내었다. 본 절에서 언급한 예제와 함께 다른 많은 예제에 본 연구에서 유도한 안정성에 대한 판별식을 적용한 결과 판별식 (22)는 매우 효과적으로 사용할 수 있음을 확인하였다.

페루프 방정식의 고유치는 Table 1에서 나타낸 바와 같이 구조물의 고유치와 1차필터의 고유치로 나누어지며, 만일 제어하고자 하는 모드위 수를  $n$ 이라 할 때 총 고유치의 수는  $3n$ 이 된다. 실제계의 페루프 고유치는 모델의 파라미터 오차에 의해 원래 설계된 값으로부터 변화가 있다. 이 고유치의 변화의 크기는 파라미터 오차  $\Delta M, \Delta K$ 의 크기에 의존하고 있으며,  $\Delta M, \Delta K$ 의 크기가 증가함에 따라 고유치의 변화가 모노토닉(monotonic)하게 증가하고 있음을 수치적으로 확인하였다. 실제계의 페루프 고유치에

$\Delta M, \Delta K$ 가 미치는 영향은 Table 1에서 보는 바와같이 크게 두가지로 구분할 수 있다. 이는 안정성이 좋아지는 방향으로 혹은 나빠지는 방향으로 영향을 미친다. 모델의 파라미터 오차  $\Delta M, \Delta K$ 가 구조물의 고유치의 이동에 미치는 영향은  $\Delta M, \Delta K$ 를 형성시키는 실제 구조물의 파라미터 오차의 특성을 고찰함으로써 설명할 수 있다. 예를 들면 구조물의 수학적 모델이 실제 구조물보다 더 두껍고 강한 것으로 모델링되면 모델의 진동을 제어하도록 설계된 제어력은 실제 구조물의 진동을 제어하는데 충분하게 된다. 따라서 실제 구조물의 진동의 감쇠율은 증가하게 되며 이 경우가 본 예제의 Case (i)에 해당한다. 이 반대의 경우는 모델의 진동을 제어하도록 설계된 제어력이 실제 구조물의 진동을 제어하는데 부족하게 되며 진동의 감쇠율은 설계된 값보다 작게 나타나며 본 예제의 Case (ii)의 경우에 해당된다. 또한 구조물의 고유치가 안정성이 증가하는 쪽으로 이동할 때는 필터의 고유치는 안정성이 나빠지는 쪽으로 이동하는 것을 Table 1에서 알 수 있다. 그 반대로 구조물의 고유치가 안정성이 나빠지는 쪽으로 이동할 때는 필터의 고유치는 좋은 쪽으로 이동한다. 본 예제의 Case (iii)는 모델의 파라미터 오차의 크기를 증가시킴에 따라 필터의 안정성이 나빠져 전체 계의 페루프가 불안정하게 되는 경우이다. 본 예제에서 사용한 3종류의 실제계에 대한 시간영역 응답을 Fig. 2~4에 나타내었다. 이 응답을 구할 때 모든 경우에 동일한 초기조건을 사용하였으며, Case (i)과 (ii)의 시간응답은 안정하며 Case (i)의 응답이 Case (ii)에 비해 감쇠가 더 빠르게 나타났다.

Table 1 Comparison of the closed-loop eigenvalue between model and actual systems

	Model	Actual system-case (i)	Actual system-case (ii)	Actual system-case (iii)
Structure modes	-0.0688 ± 0.3250i	-0.0973 ± 0.3037i	-0.0633 ± 0.3301i	-0.3078 ± 0.1841i
	-0.2756 ± 1.3018i	-0.4013 ± 1.2274i	-0.2541 ± 1.3194i	-0.4842 ± 1.4758i
	-0.6200 ± 2.9280i	-0.9102 ± 2.7685i	-0.5717 ± 2.9688i	-4.7994 ± 2.4488i
	-1.1023 ± 5.2073i	-1.6210 ± 4.9266i	-1.0170 ± 5.2767i	-1.4196 ± 3.5807i
	-1.7223 ± 8.1362i	-2.5301 ± 7.6836i	-1.5885 ± 8.2468i	-1.6758 ± 5.5191i
	-2.4804 ± 11.718i	-3.3892 ± 11.050i	-2.2849 ± 11.874i	-2.7167 ± 9.2703i
Filter modes	-0.3276	-0.2716	-0.3385	0.1107
	-1.3124	-1.0558	-1.3554	-1.3478
	-2.9526	-2.3387	-3.0493	2.5947
	-5.2494	-4.1483	-5.4203	-3.5178
	-8.2020	-6.5777	-8.4695	-6.6048
	-11.8126	-10.1053	-12.2034	-10.823

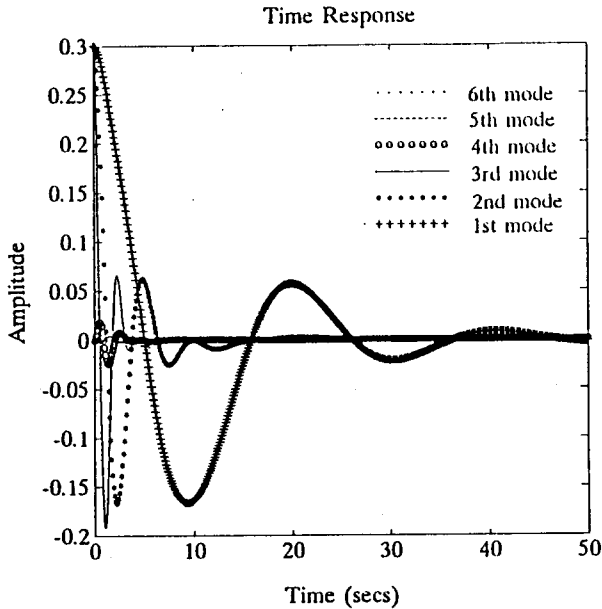


Fig. 2 Time responses of actual system — Case (i)

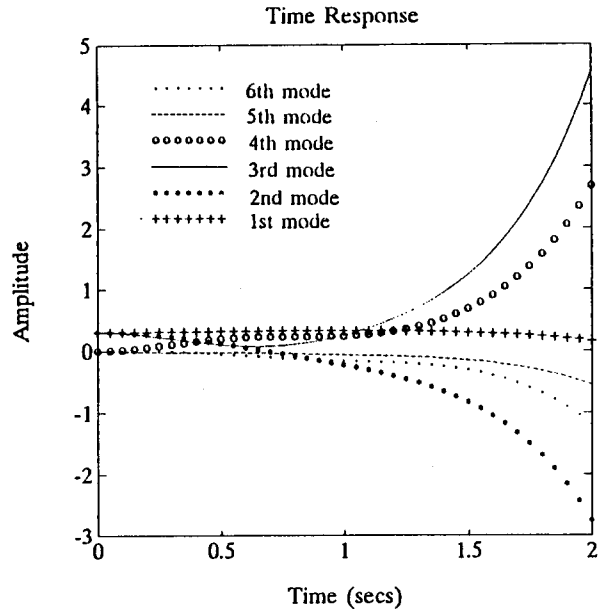


Fig. 4 Time responses of actual system — Case (iii)

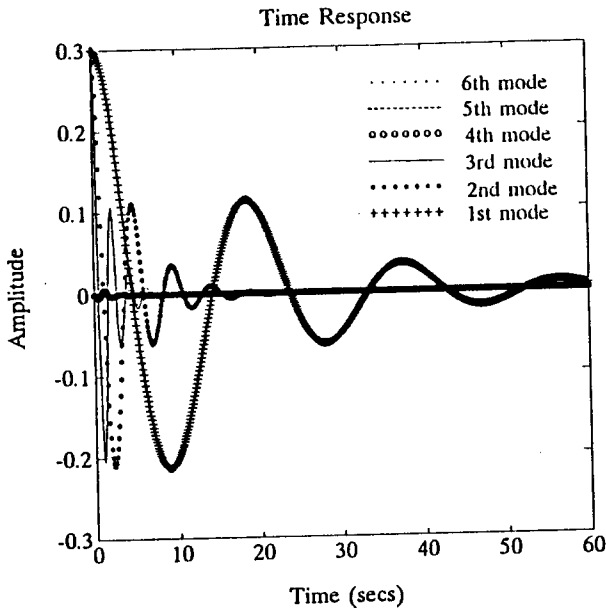


Fig. 3 Time responses of actual system — Case (ii)

Table 2 Upper bounds of the deviation vector  $\|e(t)\| \geq m\|v\|$

Actual system case (i)	Actual system case (ii)
$m=4.35$	$m=1.475$

Case (iii)의 시간응답은 예측된대로 불안정함을 알 수 있다.

모델의 파라미터 오차  $\Delta M, \Delta K$ 가 실제 구조물의 페루프의 성능에 미치는 영향을 평가하기 위해, 본 연구에서 유도한 오차벡터  $e(t)$ (실제 계의 변위벡터-모델의 변위 벡터)의 상한을 식 (36)을 이용하여 구하면 Table 2에서 나타난 바와 같다. 이 오차벡터의 상한  $\|e(t)\|$ 은 모델의 파라미터 오차  $\Delta M, \Delta K$ 가 존재할 때 실제 계의 성능과 모델의 설계된 성능과의 차이의 상한을 의미한다. 식 (33) 및 식 (36)에서 알 수 있듯이 파라미터 오차  $\Delta M, \Delta K$ 의 크기와  $\|e(t)\|$ 의 관계는 선형관계에 있으며 이는 본 예제의 수치계산에서도 확인할 수 있다. 그 비례상수는 식 (33)으로 표시되며, 이는 독립된 모달공간에서 사용되는 제어기법의 형태에 의존하고 있다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 독립모달공간 제어기법의 장점과 양 위치피드백 제어기법의 장점을 모두 이용하는 독립된 모달공간에서 양 위치피드백 제어기법<sup>(12)</sup>의 강인성을 해석하였다. 이 방법은 Baz가 제안한 방법으로 구조물의 진동을 제어하는데 효과적으로 활용될 수 있다. 본 논문에서 이 방법으로 제어기를 설계할 때, 모델의 파라미터 오차가 실제계의 페루프 안정성과 성능에 미치는 영향을 해석하였으며 연구의 주



결과는 다음과 같이 요약된다.

(1) 실제계의 페루프 방정식이 Lyapunov 점근안정성을 갖기위한 필요충분 조건식 (22)를 유도하였다. 실제계의 안정성에 영향을 미치는 파라미터 오차는  $\Delta K$ , 즉 강성행렬에 존재하는 파라미터 오차임을 보였다.

(2) 파라미터 오차  $\Delta M$ ,  $\Delta K$ 는 실제계의 각 진동모드의 감쇠비를 원래 설계된 값보다 증가시키거나 혹은 감소시키게 된다.

(3) 실제계의 페루프 방정식의 불안정성은 구조진동모드 혹은 제어기의 필터모드에서 발생한다.

(4) 모델의 파라미터 오차  $\Delta M$ ,  $\Delta K$ 가 존재할 때, 연산자이론을 적용하여 실제계의 응답과 설계된 모델의 응답과의 차이인 오차의 상한식을 유도하였다. 이 결과는 안정성에 대한 강인성 해석과 더불어 Baz의 제어방법의 강인성을 나타내는 하나의 지표로 활용할 수 있다.

(5) 오차벡터의 상한은, 즉  $\|e(t)\|$ 는 파라미터 오차  $\Delta M$ ,  $\Delta K$ 의 크기에 선형적으로 비례하고 있으며, 비례계수는 모달공간에서의 제어기법의 구조(예, Baz의 방법)에 의존하고 있다.

### 참 고 문 헌

(1) Balas, M. J., 1979, "Direct Velocity Feedback Control of Large Space Structures," J. Guidance and Control, Vol. 2, pp. 252~253.  
 (2) Balas, M. J., 1978, "Active Control of Flexible System," J. Optimization Theory and Applications, Vol. 25, pp. 415~436.  
 (3) Chen, C. L., 1982, "Direct Output feedback Control of Large Structures," Dynamics Laboratory Report DYNL-82-1, Cal Tech., Pasadena, CA.  
 (4) Goh, C. J. and Caughey, T. D., 1985, "On the Stability Problem Caused by Finite Actuator Dynamics in the Collocated Control of Large Space Structures," Int. J. Control, Vol. 41, 1985, pp. 787~802.

(5) Fanson, J. L. and Caughey, T. K., 1990, "Positive Position Feedback Control for Large Space Structures," AIAA J., Vol. 28, pp. 717~724.  
 (6) Meirovitch, L. and Baruh, H., 1982, "Control of Self-Adjoining Distributed-Parameter Systems," J. Guidance and Control, Vol. 5, pp. 60~66.  
 (7) Meirovitch, L. and Baruh, H., 1983, "Robustness of the Independent Modal-Space Control Method," J. Guidance and Control, Vol. 6, pp. 20~25.  
 (8) Meirovitch, L., 1990, Dynamics and Control of Structures, John Wiley & Sons, New York.  
 (9) Meirovitch, L., Baruh, H. and Oz, H., 1983, "A Comparison of Control Techniques for Large Flexible Systems," J. Guidance and Control, Vol. 6, pp. 302~310.  
 (10) Hale, A. L. and Rahn, G. A., 1984, "Robust Control of Self-Adjoint Distributed Parameter Structures," J. Guidance and Control, Vol. 7, pp. 265~273.  
 (11) Baruh, H. and Silverberg, L., 1985, "Robust Natural Control of Distributed Systems," J. Guidance and Control, Vol. 6, pp. 717~724.  
 (12) Baz, A., Poh, S. and Fedor, J., 1992, "Independent Modal Space Control With Positive Position Feedback," ASME J. Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 114, pp. 96~103.  
 (13) Inman, D. J., 1989, Vibration with Control, Measurement and Stability, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.  
 (14) Slotine, J. E., Li, W., 1991, Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.  
 (15) Desoer, C. A. and Vidyasaga, M., 1975, Feedback systems: Input-Output Properties, Academic Press, New York.  
 (16) Stakgold, I., 1979, Green's Functions and Boundary Value Problems, Wiley Interscience, New York.