

〈論 文〉

제한 최소 자승오차법

The Constrained Least Mean Square Error Method

나희승* · 박영진*

Hee-Seung Na and Youngjin Park

〈1993년 12월 16일 접수 ; 1994년 2월 18일 심사완료〉

ABSTRACT

A new LMS algorithm titled 'constrained LMS' is proposed for problems with constrained structure. The conventional LMS algorithm can not be used because it destroys the constrained structures of the weights or parameters. Proposed method uses error-back propagation, which is popular in training neural networks, for error minimization. The illustrative examples are shown to demonstrate the applicability of the proposed algorithm.

1. 서 론

실험을 통한 특정시스템의 수학적모델 도출 혹은 매개변수추출은 대부분 비실시간적(off-line)으로 행하여지나 시스템이 시변(time-varying)인 경우 실제 구현에 어려움이있다. 이런 문제점을 해결하고자 실시간방법인 적응신호처리(Adaptive Signal Processing)⁽¹⁾ 기법을 사용하기 시작하였으며 디지털 신호처리(Digital Signal Processing) 보드의 속도가 빨라지면서 더욱 각광을 받고 있다. 알고리즘에는 FIR 필터(Finite Impulse Response Filter)를 사용하는 LMS(Least Mean Square) 알고리즘과 IIR 필터(Infinite Impulse Response Filter)를 사용하는 RLMS(Recursive LMS) 알고리즘이 있으며, 비교적 간단하고 안정정도도 있어 통신, 레이다, 의공학, 기계시스템진단, 적응제어 등 많은 분야에 응용되고

있다.

기존의 적응신호처리 기법은 모델링하려는 시스템을 미지의 시스템(Black Box System)으로 보고, 폐루프 적응화(Closed-Loop Adaptation)로 이 시스템을 모델링한다. 그러므로 시스템에 대한 사전정보 또는 특성을 알고있을 경우라도 이를 이용할 수 없다. 본 논문에서는 시스템이 갖고 있는 기본적인 성질을 이용하여, 효과적이면서 신속하게 시스템을 모델링할 수 있는 새로운 LMS알고리즘을 제안하고자 한다. 여기에서는 임의 시스템이 갖는 기본적인 성질을 제한조건(constrained condition)으로 나타낼 수 있다고 가정하였으며, 실제로 우리가 다루는 문제의 상당수는 이러한 제한조건을 갖고있다. 기존의 LMS알고리즘과는 달리 적응화과정에서도 제한조건을 유지할 수 있고, 보다 신속하면서도 안정성을 갖는 새로운 CLMS(Constrained Least Mean Square) 알고리즘을 다음장에서 유도한다. 제안한 CLMS알고리즘의 간단한 응용 예제를 다루어 보고, 그 효율성을 검토한다.

*정회원, 한국과학기술원 기계공학과 소음 및 진동제어 연구센터(NOVIC)

2. 본 론

2.1 제한조건을 갖는 시스템에 적합한 제한 최소 자승오차법(Constrained Least Mean Square)

Fig. 1은 페루프 적응화(Closed-Loop Adaptation)를 나타내는 블록선도이다. 이러한 방법은 예전기(predictor), 잡음제거기(noise canceling), 시스템 규명(system identification), 역모델링(inverse modeling) 등의 많은 분야에 적용되고 있다. 페루프 적응화에는 대부분의 경우 LMS알고리즘이 사용되고 있다. LMS알고리즘은 적응화 과정에서 단지 순간 자승오차(Instantaneous Squared Error) 신호와 기준입력신호만으로 시행되므로 비교적 간단하며, 처리시간을 줄일 수 있는 장점이 있다.

미지의 시스템을 모델링할때, 많은 경우 그 시스템이 갖는 기본적인 성질을 알 수 있다. 예를 들면 정적(Static), 동적(Dynamic), 대칭성(Symmetric), 인과성(Causality), 입력신호의 성질등 다양할 것이다. 이러한 기본적인 성질들은 하나의 제한조건들로 볼 수 있으며, 이러한 제한조건을 적절히 사용하면 적응화를 효과적으로 수행할 수 있을 것이다. 따라서 이 논문의 목적은 미지의 시스템을 FIR 또는 IIR필터 시스템으로 모델링할 경우, 필터의 가중치(weight)들 사이의 제한조건을 이용하여 이 시스템을 효과적으로 모델링하려는 데 있다. 만약 가중치들 사이의 상호관계를 모델링하려는 미지의 시스템의 특성으로부터 유추할 수 있다면, 독립적인 가중치의 수를 그 상호관계의 수만큼 줄일 수 있다. 따라서 각 가중치를 최적화가 이루어지는 공간의 한 차원으로 볼 때, 독립적 가중치의 감소는 수렴곡면의 차원을 줄임으로써 적응시간을 감소시킬 수 있을 것이다.

어떤 시스템이 여러개의 선형시스템(linear system)으로 구성되어 있고, 그중 일부는 알고 있으며 전체 시스템의 입력(input) x 와 출력(output) T 만을 측정할 수 있는 경우 이들의 페루프 적응화 블록선도는 Fig. 2(a), (b)와 같이 나타내어진다. 시스템이 FIR이나 IIR로 구성된 Fig. 2(a), (b)는 Fig. 2(c)와 같이 일반적인 형태로 다시 표현될 수 있다. Fig. 2(c)의 부블럭중 몇개는 기지의 블럭이고 나머지는 미지의 블럭이라 가정한다. 본 논문에서는 Fig. 2(c)와 같이 FIR이나 IIR로 나타내어지는 블럭들로 이루어진 선형시스템의 가중치들 사이에 등가제한조

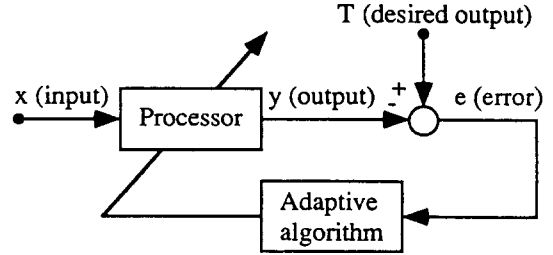


Fig. 1 Closed-Loop Adaptation

건(equality constraint conditions)만이 있을 경우를 다루기로 한다. 제한조건을 다루기 위하여 현재 많은 분야에 응용되고 있는 신경회로망(Neural Networks)의 개념을 이용하기로 한다. Fig. 3은 신경회로망중 가장 널리 사용되고 있는 다층퍼셉트론(Multi-layer Perceptron) 모델이다.⁽²⁾ 이 모델은 뉴런속의 비선형 함수(nonlinear function; sigmoid function)와 뉴런간의 가중치(weight)로 임의의 비선형 시스템을 모델링할 수 있다. 학습 방법으로는 오류 역전파(Error-Backpropagation) 알고리즘이 널리 사용되며, 이 알고리즘의 특징은 오차를 역방향으로 전파할 수 있다는 것이다.⁽²⁾ 이러한 오류역전파 학습방법은 LMS알고리즘과 상당히 유사성을 보이고 있다. 따라서 이 학습방법을 Fig. 2와 같은 선형시스템 모델링에 이용해 보기로 한다. 먼저 Fig. 3과 같은 다층 퍼셉트론을 선형화시키기 위해 뉴런속의 비선형함수(nonlinear function)를 모두 선형(linear function) 함수로 바꾸고, 출력층을 전체시스템 출력의 시계열(time series)로 지정하면 한층의 출력들이 서로 연결되어 있는 Fig. 4와 같은 네트워크로 구성할 수 있다. 이 경우 새로운 적응알고리즘의 간단한 유도를 위하여, 출력값간의 인과관계(causality)로 인해서 출력들이 서로 완전연결(fully connected)되어 있지않다고 가정한다. 이렇게 선형화된 네트워크의 한층(one layer)은 한개의 선형 시스템을 모델링할 수 있다. 그러므로 임의의 r 개의 직렬연결된 선형시스템을 모델링하려면 r 개의 층이 필요하다. Fig. 2(c)의 한 시스템은 Fig. 4의 한층에 해당된다. 이 시스템의 장점은 r 개의 시스템 사이의 입출력을 알 수 없어도 두 x, y, T 신호만으로 오차를 역방향으로 전파⁽²⁾할 수 있다는 것이다. 여기서 미지의 블럭이 2개 이상 연결되어 있을 경우 시스템 규명(system identification) 입장에서는 해가 유일하지 않으므로 주의를 요한다. 또한 미지의 시스템 사이에 알고있는 시스템이 있을 경우, 알고있는 시스

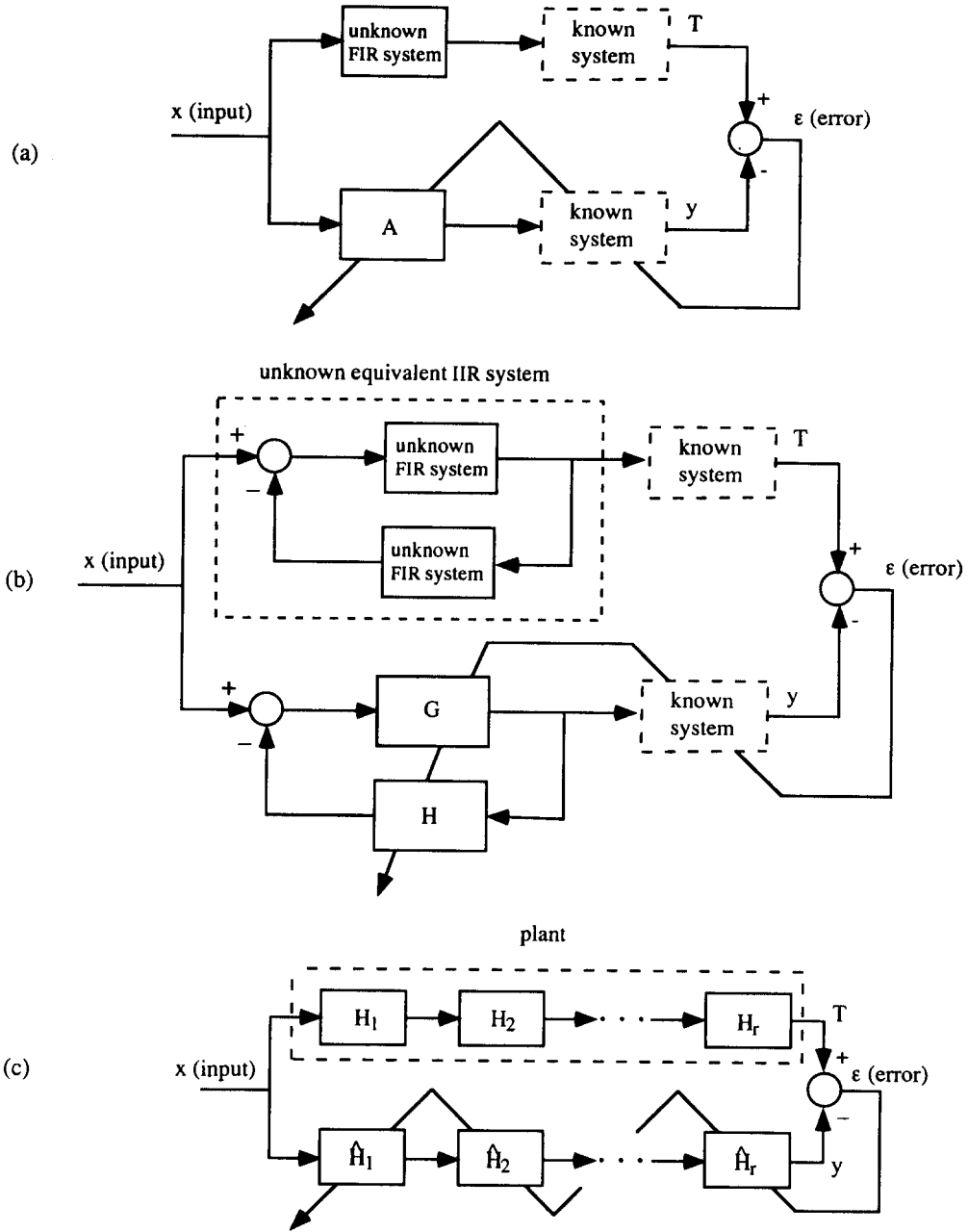


Fig. 2 Block diagram of multi-system modeling

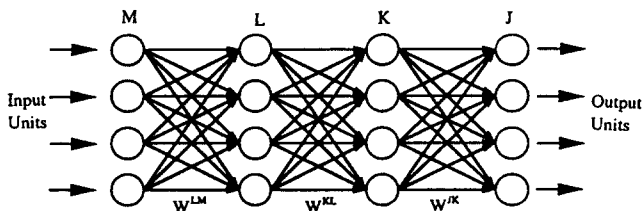


Fig. 3 Multi-layer Perceptron

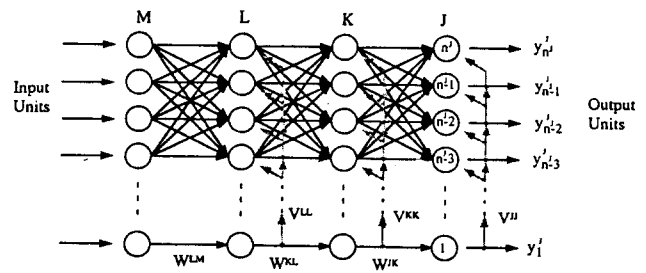


Fig. 4 Constrained LMS network structure

템의 역행렬을 구하지 않아도 페루프 적응화로 온라인 모델링이 가능하다. 다음은 r 개의 선형시스템이 각각 주어진 제한조건을 갖는다고 가정해 보자. 이러한 경우 Fig. 4의 네트워크는 각층마다 가중치들 사이에 등가제한조건(equality constraint conditions)을 갖는다고 볼 수 있으며, 한층의 모든 가중치는 몇개의 독립적인 가중치로 구성된 벡터 $\tilde{\omega}$ 로 나타낼 수 있다. 보다 일반적인 경우로, 제한조건들이 각층사이에도 작용하는 경우의 CLMS(Constrained Least Mean Square)알고리즘은 제한 신경회로망(Constrained Neural Networks)의 학습알고리즘을 선형화하여 유도할 수 있다.⁽³⁾ 각 층간의 가중치행렬 W 의 요소 W_{pq} 가 m 개의 독립적인 가중치로 구성된 벡터 $\tilde{\omega}$ 로 정의된다고 하자. 이것은 시스템이 갖는 모델 변수(parameter)로 직접 표현되는 등가제한조건(equality constraint conditions)으로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 W_{pq}^J &= W_{pq}^J(\omega_1^J, \omega_1^J, \omega_2^J, \omega_3^J, \dots, \omega_m^J) \\
 &= W_{pq}^J(\tilde{\omega}^J) \quad (p=1, 2, \dots, n^J \quad q=1, 2, \dots, n^J) \\
 W_{pq}^{KK} &= W_{pq}^{KK}(\omega_1^{KK}, \omega_1^{KK}, \omega_2^{KK}, \omega_3^{KK}, \dots, \omega_m^{KK}) \\
 &= W_{pq}^{KK}(\tilde{\omega}^{KK}) \\
 &\quad (p=1, 2, \dots, n^K \quad q=1, 2, \dots, n^K) \\
 W_{pq}^{LL} &= W_{pq}^{LL}(\omega_1^{LL}, \omega_1^{LL}, \omega_2^{LL}, \omega_3^{LL}, \dots, \omega_m^{LL}) \\
 &= W_{pq}^{LL}(\tilde{\omega}^{LL}) \\
 &\quad (p=1, 2, \dots, n^L \quad q=1, 2, \dots, n^L) \quad (1) \\
 W_{pq}^{JK} &= W_{pq}^{JK}(\omega_1^{JK}, \omega_1^{JK}, \omega_2^{JK}, \omega_3^{JK}, \dots, \omega_m^{JK}) \\
 &= W_{pq}^{JK}(\tilde{\omega}^{JK}) \\
 &\quad (p=1, 2, \dots, n^J \quad q=1, 2, \dots, n^K) \\
 W_{pq}^{KL} &= W_{pq}^{KL}(\omega_1^{KL}, \omega_1^{KL}, \omega_2^{KL}, \omega_3^{KL}, \dots, \omega_m^{KL}) \\
 &= W_{pq}^{KL}(\tilde{\omega}^{KL}) \\
 &\quad (p=1, 2, \dots, n^K \quad q=1, 2, \dots, n^L) \\
 W_{pq}^{LM} &= W_{pq}^{LM}(\omega_1^{LM}, \omega_1^{LM}, \omega_2^{LM}, \omega_3^{LM}, \dots, \omega_m^{LM}) \\
 &= W_{pq}^{LM}(\tilde{\omega}^{LM}) \\
 &\quad (p=1, 2, \dots, n^L \quad q=1, 2, \dots, n^M) \quad (2)
 \end{aligned}$$

여기서, 상첨자, J, K, L, M 은 각 층을 나타내는 첨자이며, 하첨자 p, q 는 각 유닛트를 나타내는 첨자이다. 앞첨자는 지정된 가중치를 가진 연결이 시작되는 점을 나타내며, 뒤첨자는 끝나는 점을 각각 나타낸다. 따라서, $W_{pq}^J, W_{pq}^{KK}, W_{pq}^{LL}$ 은 서로 같은 층에 있는 유닛트들 사이의 연결가중치이며, $W_{pq}^{JK}, W_{pq}^{KL}, W_{pq}^{LM}$ 은 서로 다른 층에 있는 즉, J 와 K, K 와 L, L 과 M 사이의 유닛트들 사이의 연결가중치이다. ($\tilde{\omega}^J \in R^{m^J}, \tilde{\omega}^{KK} \in R^{m^{KK}}, \tilde{\omega}^{LL} \in R^{m^{LL}}, \tilde{\omega}^{JK} \in$

$$R^{m^{JK}}, \tilde{\omega}^{KL} \in R^{m^{KL}}, \tilde{\omega}^{LM} \in R^{m^{LM}}, W^J \in R^{n^J \times n^J}, W^{KK} \in R^{n^K \times n^K}, W^{LL} \in R^{n^L \times n^L}, W^{JK} \in R^{n^J \times n^K}, W^{KL} \in R^{n^K \times n^L}, W^{LM} \in R^{n^L \times n^M}$$

독립적인 가중치의 적응알고리즘만 유도할 수 있다면, 제한 조건에 의해 모든 가중치의 변화량을 연쇄법칙(chain rule)에 의하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 DW_{pq}^J &= -\eta \sum_{i=1}^{m^J} \left(\frac{\partial W_{pq}^J}{\partial \omega_i^J} \right)^{-1} D\omega_i^J \\
 (p=1, 2, \dots, n^J \quad q=1, 2, \dots, n^J) \\
 DW_{pq}^{JK} &= -\eta \sum_{i=1}^{m^{JK}} \left(\frac{\partial W_{pq}^{JK}}{\partial \omega_i^{JK}} \right)^{-1} D\omega_i^{JK} \\
 (p=1, 2, \dots, n^J \quad q=1, 2, \dots, n^K) \quad (3)
 \end{aligned}$$

여기서 η 은 수렴상수이다. DW_{pq}^J 는 J 층의 p 번째와 J 층의 q 번째 유닛트 사이의 가중치의 변화량이며, DW_{pq}^{JK} 는 J 층의 p 번째와 K 층의 q 번째 유닛트 사이의 가중치의 변화량이다. 가중치의 변화량으로부터 가중치의 적응화 과정은 최적화 기법의 하나인 최급하강법(steepest descent)에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 W_{pq}^J(t+1) &= W_{pq}^J(t) + DW_{pq}^J \\
 W_{pq}^{JK}(t+1) &= W_{pq}^{JK}(t) + DW_{pq}^{JK} \quad (4)
 \end{aligned}$$

식 (3), (4)를 CLMS알고리즘이라 정의한다.

다음에서는 식 (3)에서 $D\omega_i^J, D\omega_i^{JK}$ 의 유도과정을 보기로 한다. 수식을 간단히 표현하기 위하여 알고리즘은 Fig. 4와 같이 입력층 M 을 제외하고 L, K, J 3개의 층이 있는 경우에 대하여 유도하기로 한다. 오차함수 또는 에너지 함수 E 를 다음과 같이 정의한다.

$$E = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n^J} [T_p - y_p^J]^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n^J} e_p^{J^2} \quad (5)$$

여기서 y_p^J 는 마지막층 유닛트에서의 출력값을 나타낸다. 일반적으로 초기에 실제출력값 y_p^J 는 목표값 T_p 와 일치하지 않을 것이다. J 층 유닛트에서의 출력값은 다음과 같이 K 층과 J 층 유닛트의 출력값으로 표시된다고 가정한다.

$$\begin{aligned}
 y_p^J &= \sum_{q=1}^{n^K} W_{pq}^{JK} y_q^K + \sum_{q=1}^{p-1} W_{pq}^J y_q^J \\
 (p=1, 2, \dots, n^J; W_{p0} &= 0)
 \end{aligned}$$

독립적인 가중치벡터중 (i) 번째항인 $\omega_{(i)}^J$ 와 $\omega_{(i)}^{JK}$ 에 대한 에너지 함수 E 를 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^J} = -\sum_{p=1}^{n^J} e_p^J \frac{\partial y_p^J}{\partial \omega_{(i)}^J} \quad (i=1, 2, \dots, m^J) \quad (6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} = -\sum_{p=1}^{n^J} e_p^J \frac{\partial y_p^J}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} \quad (i=1, 2, \dots, m^{JK}) \quad (7)$$

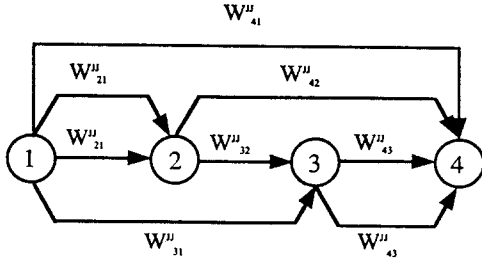


Fig. 5 Possible Path Flow

먼저 식 (6)으로부터 다음을 유도할 수 있다. 유도 과정은 부록에 기술하였다.

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^K} = \sum_{p=2}^{n'} \Delta_p^K \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\partial W_{pq}^{KK}}{\partial \omega_{(i)}^K} y_q^K \quad (8)$$

여기서,

$$\Delta_p^K = - \sum_{p=p}^{n'} e_i^t R_{ip}^u \quad (\text{임의의 } p \text{ 유니트에 대해})$$

R_{pq}^u : J 층의 임의 유니트 p 와 q 에서 가능한 모든 경로 가중치 곱의 합

$$R_{pq}^u = 1, \quad p=q$$

$$R_{pq}^u = \sum_{i=0}^{p-q-1} p_{-q-1} C_i^u, \quad p \neq q$$

예를 들면 p 와 q 사이의 임의의 한 유니트를 지나는 가능한 경로 가중치 곱 $p_{-q-1} C_i^u$ 은 다음과 같이 정의한다.

$$p_{-q-1} C_1^u = \sum_j W_{pi}^u W_{jq}^u \quad (p < i < q)$$

임의의 두 유니트를 지나는 경우,

$$p_{-q-1} C_2^u = \sum_{i,j} W_{pi}^u W_{ij}^u W_{jq}^u \quad (p < i, j < q)$$

가능한 모든 유니트를 지나는 경우,

$$p_{-q-1} C_{p-q-1}^u = \sum_{i,j,\dots,k} W_{pi}^u W_{ij}^u \dots W_{kq}^u \quad (p < i, j, \dots, k < q)$$

으로 정의한다.

만약 $p=4, q=1$ 이면

$$R_{p,q}^u = \sum_{i=0}^2 C_i^u$$

$$= W_{41}^u + W_{42}^u W_{21}^u + W_{43}^u W_{31}^u + W_{43}^u W_{32}^u W_{21}^u$$

이다. 이 경우의 가능한 경로흐름을 Fig. 5에 도시하였다.

다시 식 (7)로부터 다음을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^K} = \sum_{p=1}^{n'} \Delta_p^K \sum_{q=1}^{n'} \frac{\partial W_{pq}^{KK}}{\partial \omega_{(i)}^K} y_q^K \quad (9)$$

여기서,

$$\Delta_p^K = - \sum_{i=p}^{n'} e_i^t R_{ip}^u$$

이다. (임의 p 유니트에 대해)

마찬가지로, K 층 유니트에서는 위와 동일한 방법으로 다음과 같이 순차적(recursively)으로 유도된다.

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{KK}} = \sum_{p=2}^{n'} \Delta_p^K \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\partial W_{pq}^{KK}}{\partial \omega_{(i)}^{KK}} y_q^K \quad (10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{KL}} = \sum_{p=1}^{n'} \Delta_p^K \sum_{q=1}^{n'} \frac{\partial W_{pq}^{KL}}{\partial \omega_{(i)}^{KL}} y_q^L \quad (11)$$

여기서, K 층의 임의 p 유니트에서 정의되는 오류 역전(Error Back)은

$$-e_p^K = \sum_{q=1}^{n'} \Delta_q^K W_{qp}^K \quad (12)$$

이다.

적용화 과정이란 수학적으로 총 에너지 함수를 최소화하는 가중치를 구하는 것이다. 수렴곡면이 전체적으로 오목(globally concave)하다면 최급하강법(steepest descent)을 사용하여 가중치를 변화시켜 최소점으로 찾아갈 것이다. 따라서 독립적인 가중치의 변화량은 다음과 같다.

$$D\omega_{(i)}^u = \frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^u} \quad (13)$$

$$D\omega_{(i)}^K = \frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^K} \quad (14)$$

이와같이 독립적인 가중치의 변화량을 구한 후, 제한 조건에 의해 모든 가중치의 변화량은 식 (3)과 식 (4)에서 구할 수 있다.

이상에서 유도한 CLMS 알고리즘은 적용하고자 하는 문제에 따라 간략화할 수 있다. 일례로 각 부블럭들이 FIR로 표현 가능하다면 다음과 같은 제한조건과 식 (3), (4), (9), (11)로 제한 최소 자승 오차법을 간략화할 수 있다.

$$R_{pq}^u = 1, \quad p=q$$

$$R_{pq}^u = 0, \quad p \neq q \quad (15)$$

다른 예로 만약 네트워크의 가중치가 모두 독립적인 변수일 경우, 특정 (p) 유니트와 (q) 유니트 사이의 가중치의 변화량은 다음과 같다.

$$DW_{(p)(q)}^u = -\eta \frac{\partial E}{\partial W_{(p)(q)}^u} = -\eta \Delta_{(p)}^u y_{(q)}^u \quad (16)$$

$$DW_{(p)(q)}^K = -\eta \frac{\partial E}{\partial W_{(p)(q)}^K} = -\eta \Delta_{(p)}^K y_{(q)}^K \quad (17)$$

$$DW_{(p)(q)}^{KK} = -\eta \frac{\partial E}{\partial W_{(p)(q)}^{KK}} = -\eta \Delta_{(p)}^{KK} y_{(q)}^{KK} \quad (18)$$

$$DW_{(p)(q)}^{KL} = -\eta \frac{\partial E}{\partial W_{(p)(q)}^{KL}} = -\eta \Delta_{(p)}^{KL} y_{(q)}^{KL} \quad (19)$$

FIR로 표현가능한 한 개의 블럭만이 존재하고 가중치들 사이에 제한조건이 없을 경우, 윗 식은 기존의 LMS알고리즘과 동일하다. 이상의 식들을 정리해보면, LMS 알고리즘이 FIR 필터(Finite Impulse Response Filter)를 사용하는 LMS(Least Mean Square)알고리즘과 IIR 필터(Infinite Impulse Response Filter)를 사용하는 RLMS(Recursive LMS)알고리즘으로 나누어지듯이 식 (3), (4), (9), (11), (14), (15)는 CLMS(Constrained Least Mean Square)알고리즘으로 식 (3), (4), (8), (9), (10), (11), (13), (14)은 CRLMS(Constrained Recursive LMS)알고리즘으로 각각 정의할 수 있다.

앞에서 유도한 CLMS알고리즘의 적응화과정, $W_{pq}(t) \rightarrow W_{pq}(t+1)$ 에서 일어나는 근본적인 변화는 기존 LMS알고리즘이 식 (1), (2)와 같은 제한조건(constraint)를 만족하지 않은 반면 CLMS알고리즘은 이러한 제한조건을 만족한다는 것이다. 기존 LMS알고리즘은 전 공간(full space)에서 적용되고, CLMS알고리즘은 제한조건(Constraint)에 의하여 줄어든 부분 공간(subspace)에서 적용된다. 이러한 두 방법의 weight 변화를 전 공간(full space)에서 보면, 기존 LMS알고리즘의 가중치(weight) 변화는 전 공간(full space)의 모든 방향중 가장 가파른 방향으로 나타나고, CLMS알고리즘의 가중치(weight) 변화는 제한조건(constraint)이 만족되는 방향중에서 가장 가파른 방향으로 나타난다.

이 절에서 제안한 적응 알고리즘의 특징은 독립적인 가중치에 대한 시스템의 오차를 역방향으로 추정할 수 있고, 가중치의 제한조건을 유지하면서 페루프 적응화를 수행할 수 있다는 것이다.

2.2 제안된 CLMS(Constrained Least Mean Square)알고리즘의 응용

다음은 앞에서 제안한 CLMS알고리즘의 간단한 응용예제를 다루어 보고, 그 효율성을 검증하기로 한다.

(1) 응용 I : 단일 시스템의 모델링(modeling)

이절에서는 CLMS알고리즘의 간단한 응용예제로 이미 설계된 선형위상을 갖는 FIR시스템을 미지의 시스템으로 보고 이 시스템을 변수규명(parameter identification)하는 효율적인 알고리즘을 유도해 본다.

필터가 33개의 가중치를 갖는 FIR로 모델링 가능하다 하고 하자. Fig. 6은 미지의 시스템을 모델링하기 위한 가중치가 총 33개인 FIR형태의 네트워크이며

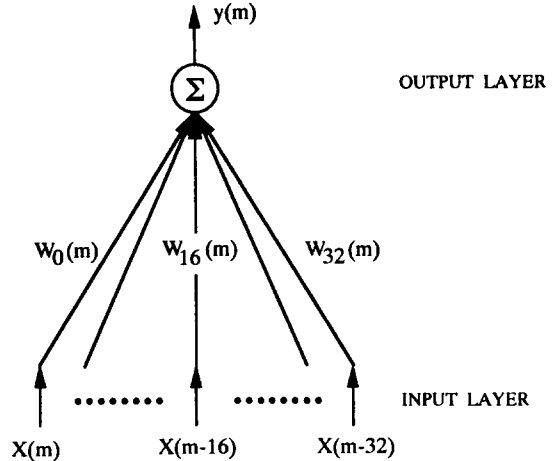


Fig. 6 FIR filter network structure

이의 입출력식은 식 (20)과 같다.

$$y(m) = \sum_{k=0}^{N-1} W_k(m) x(m-k) \quad (20)$$

여기서 W_k 는 Fig. 4의 가중치 W_{1q}^k 에 해당하며, $W_k(m)$ 은 m 번째 시간의 디지털 필터의 임펄스 응답을 나타낸다. 식 (20)에서처럼 출력 $y(m)$ 은 현재와 과거 $N-1$ 개의 입력신호 $x(m)$ 에 필터계수 $W_k(m)$ 를 곱한 값으로 구할 수 있다. 필터가 선형위상(linear phase)⁽⁴⁾을 갖기 위하여 $W_k(m)$ 는 다음의 조건을 만족해야 한다.

$$W_k(m) = W_{N-1-k}(m) \quad (21)$$

식 (21)은 시스템에 대하여 부가적으로 주어진 정보, 즉 선형위상으로부터 얻어진 하나의 제한조건으로 볼 수 있다. 그러므로 Fig. 6에서 독립적인 가중치는 $\omega_1^k = W_1 = W_{33} = \omega_1$, $\omega_2^k = W_2 = W_{32} = \omega_2$, ..., $\omega_{16}^k = W_{16} = W_{18} = \omega_{16}$ 이다. 이러한 제한조건은 미지의 시스템이 갖는 33개의 독립적 가중치를 17개로 줄인다. 결과적으로 수렴공간이 약 반으로 줄었으며, 수렴속도도 줄어들 것이다. 적응알고리즘은 식 (3), (4), (9)와 (5)에 의해 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$y(m) = \sum_{k=0}^{N/2-1} W_k(m) [x(m-k) + x(m-(N-1-k))] \quad (22)$$

$$W_k(m+1) = W_k(m) + \eta e(m) [x(m-k) + x(m-(N-1-k))] \quad (23)$$

$$(k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1)$$

$$e(m) = T(m) - y(m) \quad (24)$$

여기서 $T(m)$ 은 미지의 디지털필터에 랜덤입력을

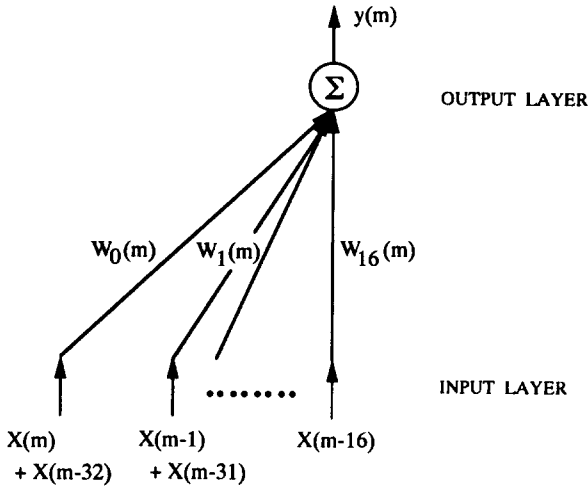


Fig. 7 Constrained FIR filter network structure

넣어 얻은 출력이며, η 는 수렴상수이다. 식 (23)이 기존의 LMS알고리즘과 다른 점은 제한조건인 가중치의 대칭성을 만족하기 위하여 대칭입력끼리 더해진다는 것이다. 결과적으로 Fig. 7의 형태로 적응화하는 것과 같다. 이런 대칭적 성질을 이용하면 곱셈의 횟수와 사용되는 메모리량을 반으로 줄일 수 있다.

(2) 응용 II : 다중 시스템의 모델링 (modeling)
다음은 Fig. 8처럼 적응기 앞에 이미 알고있는 플

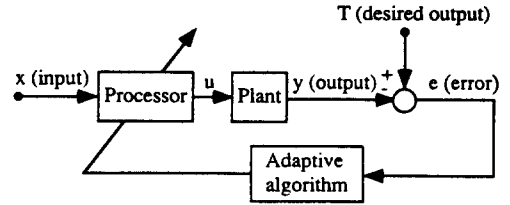


Fig. 8 Closed-Loop Adaptation placed forward of plant

랜트(known plant)가 있을 경우, 페루프 적응화에 대한 CLMS알고리즘의 응용에 대한 예제이다. 이처럼 적응기 앞에 플랜트가 있는 경우는 실제로 자동 제어 시스템 등에서 흔히 일어날 수 있는 상황이다. 이러한 경우에 LMS알고리즘으로는 일반적으로 수렴가능하지 않기 때문에 적응화과정에서 플랜트의 역모델을 구하여 오차를 온라인(on-line)으로 추정(estimation)해야하는 문제점이 있다. 그러나 앞에서 제안한 CLSM알고리즘은 플랜트의 역모델이 없어도 식 (12)에 의해 오차를 역방향으로 추정할 수 있는 장점이 있다. 만약 적응기가 동적인 인과(causal)시스템이라면 Fig. 9와 같은 네트워크로 재구성할 수 있으며, 각 가중치는 다음과 같이 표시된다.

$$W_{n^{KL}n^L}^{KL} \equiv W_0(m), \quad W_{n^{KL}-1n^L-1}^{KL} \equiv W_0(m-1), \\ W_{n^{KL}-2n^L-2}^{KL} \equiv W_0(m-2)$$

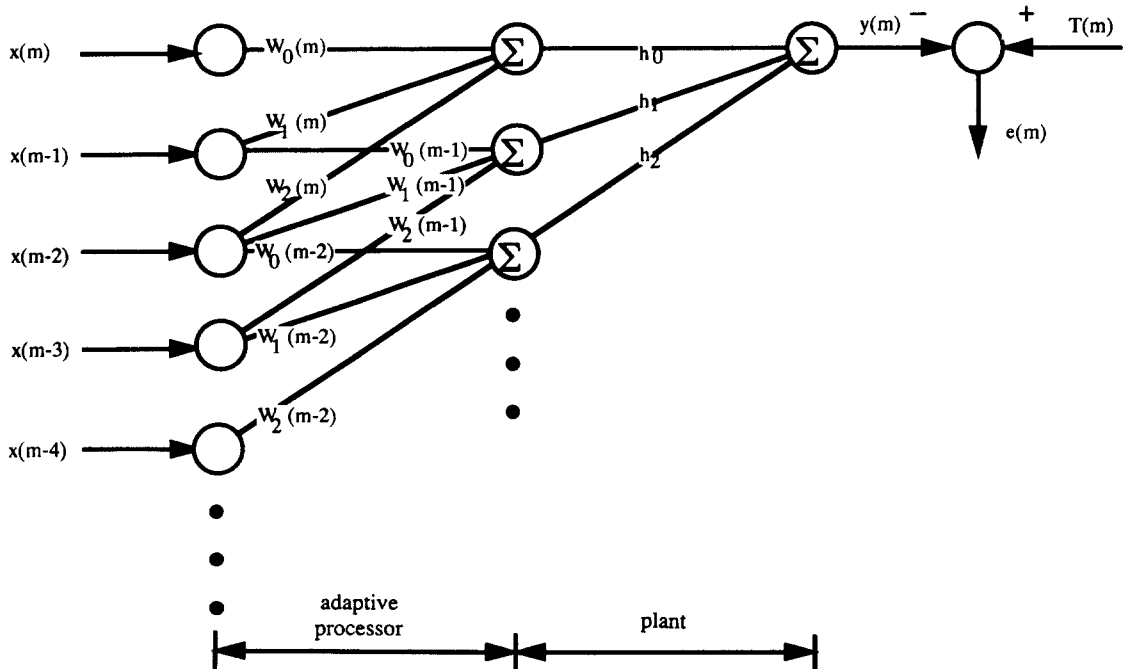


Fig. 9 Network structure for constrained condition

$$\begin{aligned}
 W_{n^k}^{KL} &\equiv W_1(m), & W_{n^k-1n^l-2} &\equiv W_1(m-1), \\
 W_{n^k-2n^l-3} &\equiv W_1(m-2) \\
 W_{n^k}^{KL} &\equiv W_2(m), & W_{n^k-1n^l-3} &\equiv W_2(m-1), \\
 W_{n^k-2n^l-4} &\equiv W_2(m-2)
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Fig. 9처럼 플랜트 H_2 는 알고 있다고 가정하였으므로 가중치를 $W_{n^k}^{KL} \equiv h_k$ 로 고정시킬 수 있다. 이 네트워크는 출력이 입력에 의해서만 결정되므로 각 층은 모두 FIR필터이다. 따라서 앞에서 제안한 CLMS알고리즘중 식 (3), (4), (9), (11), (14)와 (15)를 적응 알고리즘으로 사용한다. 제한조건을 $W_i(m-k) = W_i(m)$ 로 보았을때 Fig. 10과 같은 간단한 경우에 대해 시스템 규명을 수행해 보자. ($i=0,1,2; k=0,1,2$) 여기서 전달함수 H_1 (FIR)과 H_2 (FIR)는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 H_1(z) &= 1.0 + 1.8z^{-1} + 0.9z^{-2} \\
 H_2(z) &= 0.0 - 0.0z^{-1} + 1.0z^{-2} \\
 H_2 &= \hat{H}_2
 \end{aligned}$$

적응기알에 알고 있는 플랜트 H_2 가 있는 경우, 미지의 시스템 H_1 의 변수규명을 본 논문에서 제시된 CLMS알고리즘과 filtered-x LMS알고리즘⁽¹⁾을 사용하여 모의 실험을 하였다. Fig. 11은 모의 실험을 한 결과로 두 알고리즘의 수렴과정을 비교해보면 CLMS알고리즘이 보다 빠른 수렴속도를 보였다. 이때 변수규명은 두 경우 모두 동일한 값으로 수렴하였다. 이 네트워크는 적응화 과정에서 제한조건에 의해 현재뿐만 아니라 과거의 신호도 함께 사용한다. 따라서 적응화과정에서 계산량은 늘지만, 수렴속도가 빠르고 안정성이 향상된다.

(3) 응용 III : 능동소음제어(Active Noise Control)

능동소음제어기법은 상호간섭의 원칙에 의해 원소음과 반대위상의 음파를 스피커로 발생시켜 소음저감을 꾀하는 방법이다.⁽⁵⁾ Fig. 12는 능동소음제어기법의 기본 개념도이다. 여기서 관내의 소음전파특성은 주변환경에 따라 가변적이므로 이러한 변화에 제어기를 적응화시키기 위해서는 능동적 알고리즘이 요구된다. 따라서, 제어기의 적응화는 대부분의 경우 filtered-x LMS알고리즘을 사용하고 있다.⁽¹⁾

본절에서는 능동소음제어에 널리 이용되고 있는 filtered-x LMS알고리즘의 문제점을 보완하기 위하여 CLMS알고리즘으로부터 보다 효율적인 제한 filtered-x LMS알고리즘을 유도해 보기로 한다.⁽⁶⁾

Fig. 9와 같이 오차계가 p 차수의 FIR필터 $H = [h_0, h_1, \dots, h_p]^T$ 로 평가오차 없이 오프라인(off-line) 모델링되었다고 가정하고, q 차수의 FIR필터 $W(m) =$

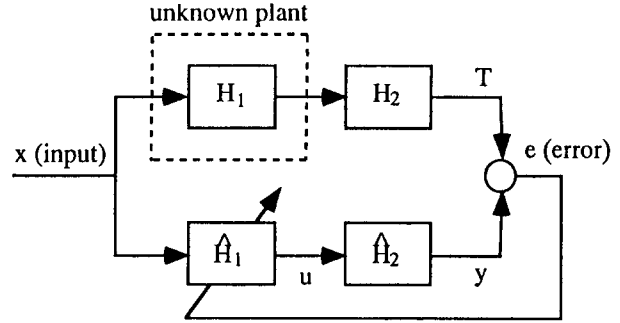
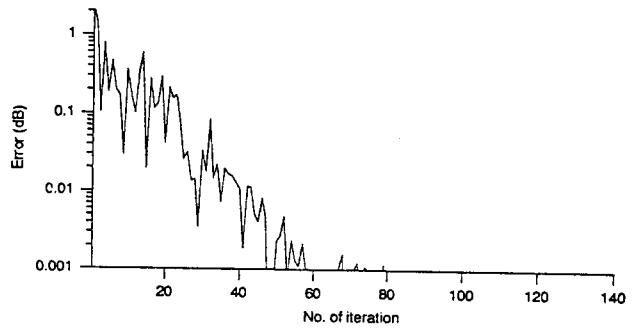
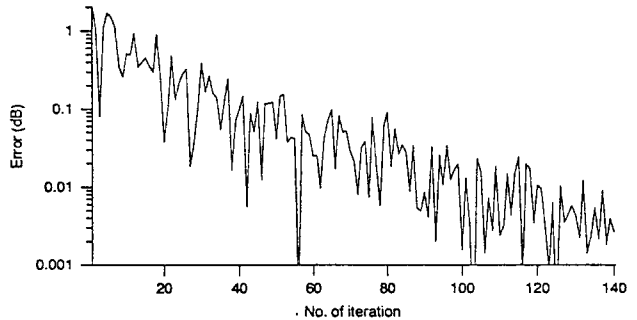


Fig. 10 Configuration for system identification



(a) CLMS algorithm



(b) filtered-x LMS algorithm

Fig. 11 Comparison of CLMS algorithm with filtered-x LMS algorithm

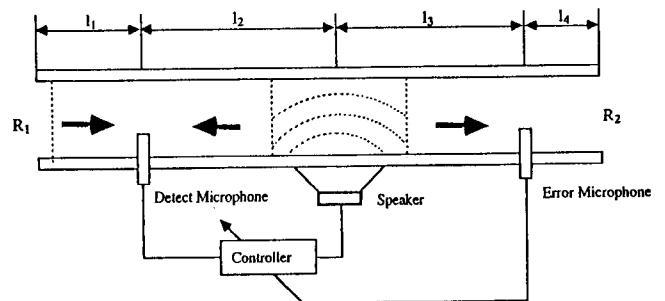


Fig. 12 Schematic diagram of active noise control system

$[w_0(m), w_1(m), \dots, w_q(m)]^T$ 를 적응제어기로 사용한다. 이 경우 음향학적 케환(acoustic feedback)은 오프라인 모델링에 의해 보상되었다고 가정한다. 만약 제어기 $W(m)$ 가 시불변(time invariant)이라고 가정하면 다음의 식이 성립된다.

$$w_i(m-k) = w_i(m) \quad (i=0, \dots, q; k=0, \dots, p) \quad (26)$$

오차마이크로폰에서 측정된 잔류소음 $e(m)$ 는 원소음 $T(m)$ 과 제어용 스피커에 의하여 발생한 2차소음의 음향학적 간섭의 결과로 다음과 같이 표현된다.

$$e(m) = T(m) - \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^q h_{ki} w_i(m-k) x(m-k-i) \quad (27)$$

그러나 이 오차신호는 시불변조건을 만족하지 않고 구해진 것이므로 식 (26)을 제한조건(constraint)으로 갖는 새로운 오차신호 $\varepsilon(m)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\varepsilon(m) = T(m) - \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^q h_{ki} w_i(m) x(m-k-i) \quad (28)$$

오차신호 $\varepsilon(m)$ 의 자승치를 최소화하기 위한 적응 알고리즘은 식 (3), (4), (9), (11), (14)와 (15)에 의해 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned} w_i(m+1) &= w_i(m) - \eta \frac{\partial \varepsilon(m)^2}{\partial w_i(m)} \\ &= w_i(m) + 2\eta \varepsilon(m) \sum_{k=0}^p h_{ki} x(m-k-i) \\ &\quad (i=0, 1, \dots, q) \end{aligned} \quad (29)$$

이를 제한 filtered-x LMS알고리즘⁽⁶⁾이라 한다. 오차신호 $\varepsilon(m)$ 는 측정가능하지 않은 신호이나 오차마이크로폰에서 측정된 잔류소음신호 $e(m)$ 로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \varepsilon(m) &= e(m) - \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^q h_{ki} w_i(m) x(m-k-i) \\ &\quad + \sum_{k=0}^p \sum_{i=0}^q h_{ki} w_i(m-k) x(m-k-i) \\ &= e(m) - \sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^q h_{ki} w_i(m) x(m-k-i) \\ &\quad + \sum_{k=1}^p h_{k0} y(m-k) \end{aligned} \quad (30)$$

여기서 $y(m-k) = \sum_{i=0}^q w_i(m-k) x(m-k-i)$, $(k=1, \dots, p)$ 이다.

식 (29)에서 알 수 있듯이 이 알고리즘은 $f(m-i) = \sum_{k=0}^p h_{ki} x(m-k-i)$ 를 입력신호로 하는 LMS알고리즘이다. 따라서, 제한 filtered-x LMS알고리즘은 LMS알고리즘과 동일한 방법으로 수렴계수 허용범위 η 를 다음과 같이 구할 수 있다.⁽¹⁾

$$0 < \eta < \frac{1}{(q+1)\sigma_f^2} \quad (31)$$

여기서, σ_f^2 는 $f(m-i)$ 신호의 분산이다.

오차계의 시간지연이 큰 경우, 제한 filtered-x LMS알고리즘의 수렴계수범위는 시간지연에 관계없으나, filtered-x LMS알고리즘의 수렴계수범위는 매우 작아진다.⁽⁷⁾ 그러므로 제한 filtered-x LMS알고리즘이 보다 빠르고 안정하다.

이밖에도 음향학적 케환계를 온라인(on-line)으로 보상하는 filtered-u LMS알고리즘의 경우에도 제한 filtered-x LMS알고리즘과 동일한 방법으로 제한 filtered-u LMS알고리즘을 유도할 수 있다.⁽⁶⁾

3. 결 론

본 논문에서는 제한조건을 갖는 미지의 시스템을 온라인으로 모델링하기 위하여 제한 최소 자승오차법을 제안하였다. 이 알고리즘은 가중치의 제한조건을 유지하면서 페루프 적응화를 수행하는 새로운 적응알고리즘이다. 간단한 응용예제들을 통해 이 알고리즘의 효율성을 검증하였으며, 앞으로 보다 다양한 시스템에 응용되리라 기대된다.

참고문헌

- (1) Widrow, B. and Stearns, S. D., 1985, "Adaptive Signal Processing," Prentice Hall.
- (2) Rumelhart, D. E. and Mc. Clelland, J. L., 1986, "Parallel Distributed Processing," MIT Press.
- (3) 나희승, 1992, "제한 신경회로망에 관한 연구," 한국과학기술원 석사학위논문.
- (4) Crochiere, R. E. and Rabiner, L. R., 1983, "Multirate Digital Signal Processing," Prentice Hall.
- (5) Roure, A., 1985, "Self Adaptive Broadband Active Sound System," J. Sound and Vibration, Vol. 101(3), pp. 429~441.
- (6) Kim, I. S., Na, H. S., Kim, K. J., Park, Y., "Constrained LMS Algorithm for the Active Con-

trol of Noise in Ducts," J. Acoust. Soc. Am.(submitted)

(7) Snyder, S. D. and Hansen, C. H., 1986, "The Influence of Transducer Transfer functions and Acoustic Time Delays on the Implementation of the LMS Algorithm in Active Noise Control Systems," J. Sound and Vibration, Vol. 141(3), pp. 409 ~ 424.

부 록

부록에서는 $n' \sim n' - \alpha$ 유닛에 대해서 유도한 후 일반적인 형태로 확장하겠다. 먼저 오차함수 또는 에너지 함수 E 를 다음과 같이 정의한다.

$$E = \frac{1}{2} \sum_{p=n'-\alpha}^{n'} e_p^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=n'-\alpha}^{n'} [T_p - y_p']^2 \quad (5)$$

여기서 y_p' 는 마지막층 유닛에서의 출력이며 α 는 임의상수이다. 일반적으로 초기에 실제출력값 y_p' 는 목표값 T_p 와 일치하지 않을 것이다. J 층 유닛에서의 출력값은 다음과 같다.

$$y_p' = \sum_{q=1}^{n_k} W_{pq}^{JK} y_q^K + \sum_{q=n'-\alpha}^{p-1} W_{pq}^{JJ} y_q'$$

독립적인 가중치벡터중 (i)번째항인 $\omega_{(i)}^{JJ}$ 와 $\omega_{(i)}^{JK}$ 에 대해 에너지 함수 E 를 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} = - \sum_{p=n'-\alpha}^{n'} e_p' \frac{\partial y_p'}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} \quad (i=1, 2, \dots, m^{JJ}) \quad (6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} = - \sum_{p=n'-\alpha}^{n'} e_p' \frac{\partial y_p'}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} \quad (i=1, 2, \dots, m^{JK}) \quad (7)$$

유도과정의 편의상 $\alpha=2$ 인 경우에 대해서만 전개해 보면 다음과 같다.

먼저 식 (6)으로부터 다음을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} &= - \sum_{p=n'-2}^{n'} e_p' \frac{\partial y_p'}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} \\ &= - \left[e_{n'}' \left(\sum_{q=n'-2}^{n'-1} \frac{\partial W_{n'q}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} y_q' + \sum_{q=n'-2}^{n'-1} \frac{\partial y_q'}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} W_{n'q}^{JJ} \right) \right. \\ &\quad \left. + e_{n'-1}' \sum_{q=n'-2}^{n'-2} \frac{\partial W_{n'-1q}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} y_q' \right] \\ &= \left[- e_{n'}' \frac{\partial W_{n'n'-1}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} y_{n'-1}' - e_{n'}' \frac{\partial W_{n'n'-2}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} y_{n'-2}' \right. \\ &\quad \left. + \left(- e_{n'}' W_{n'n'-1}^{JJ} \frac{\partial W_{n'-1n'-2}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} - e_{n'-1}' \frac{\partial W_{n'-1n'-2}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} \right) y_{n'-2}' \right] \\ &= \left[- e_{n'}' \frac{\partial W_{n'n'-1}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} R_{n'n'}^{JJ} y_{n'-1}' - e_{n'}' \frac{\partial W_{n'n'-2}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} R_{n'n'}^{JJ} y_{n'-2}' \right. \\ &\quad \left. + \left(- e_{n'}' \frac{\partial W_{n'n'-1n'-2}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} R_{n'n'-1}^{JJ} - e_{n'-1}' \frac{\partial W_{n'-1n'-2}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} R_{n'-1n'-1}^{JJ} \right) y_{n'-2}' \right] \end{aligned}$$

여기서,

R_{pq}^{JJ} : J 층의 임의 유닛 p 와 q 에서 가능한 모든 경로 가중치곱의 합

$$R_{pq}^{JJ} = 1, \quad p=q$$

$$R_{pq}^{JJ} = \sum_{i=0}^{p-q-1} C_i^{JJ}, \quad p \neq q$$

따라서

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} &= \Delta_{n'}^{JJ} \frac{\partial W_{n'n'-1}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} y_{n'-1}' + \Delta_{n'}^{JJ} \frac{\partial W_{n'n'-2}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} y_{n'-2}' \\ &\quad + \Delta_{n'-1}^{JJ} \frac{\partial W_{n'-1n'-2}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} y_{n'-2}' \\ &= \sum_{p=n'-1}^{n'} \Delta_p^{JJ} \sum_{q=n'-2}^{p-1} \frac{\partial W_{pq}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} y_q' \end{aligned}$$

이다.

여기서,

$$\Delta_p^{JJ} = - \sum_{i=p}^{n'} e_i' R_{ip}^{JJ}$$

이다. (임의 p 유닛에 대해)

따라서, $\alpha=n'-1$ 인 일반적인 경우로 나타내면

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} = \sum_{p=2}^{n'} \Delta_p^{JJ} \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\partial W_{pq}^{JJ}}{\partial \omega_{(i)}^{JJ}} y_q' \quad (8)$$

이다.

다시 식 (7)로부터 $\alpha=2$ 인 경우에 대하여 다음을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} &= - \sum_{p=n'-2}^{n'} e_p' \frac{\partial y_p'}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} \\ &= - \left[e_{n'}' \left(\sum_{q=1}^{n_k} \frac{\partial W_{n'q}^{JK}}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} y_q^K + \sum_{q=n'-2}^{n'-1} W_{n'q}^{JJ} \frac{\partial y_q'}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} \right) \right. \\ &\quad \left. + e_{n'-1}' \left(\sum_{q=1}^{n_k} \frac{\partial W_{n'-1q}^{JK}}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} y_q^K + \sum_{q=n'-2}^{n'-2} W_{n'-1q}^{JJ} \frac{\partial y_q'}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} \right) \right. \\ &\quad \left. + e_{n'-2}' \sum_{q=1}^{n_k} \frac{\partial W_{n'-2q}^{JK}}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} y_q^K \right] \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} \sum_{q=n'-2}^{n'-1} W_{n'q}^{JJ} \frac{\partial y_q'}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} &= W_{n'n'-1}^{JJ} \frac{\partial y_{n'-1}'}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} + W_{n'n'-2}^{JJ} \frac{\partial y_{n'-2}'}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} \\ &= W_{n'n'-1}^{JJ} \sum_{q=1}^{n_k} \frac{\partial W_{n'-1q}^{JK}}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} y_q^K + W_{n'n'-1}^{JJ} \\ &\quad \times W_{n'n'-2}^{JJ} \sum_{q=1}^{n_k} \frac{\partial W_{n'-2q}^{JK}}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} y_q^K \\ &\quad + W_{n'n'-2}^{JJ} \sum_{q=1}^{n_k} \frac{\partial W_{n'-2q}^{JK}}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} y_q^K, \\ \sum_{q=n'-2}^{n'-2} W_{n'-1q}^{JJ} \frac{\partial y_q'}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} &= W_{n'-1n'-2}^{JJ} \sum_{q=1}^{n_k} \frac{\partial W_{n'-2q}^{JK}}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} y_q^K \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} &= \Delta_{n'}^i \sum_{q=n^k}^1 \frac{\partial W_{n'q}^{JK}}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} y_q^K + \Delta_{n'-1}^i \sum_{q=n^k}^1 \frac{\partial W_{n'-1q}^{JK}}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} y_q^K \\ &\quad + \Delta_{n'-2}^i \sum_{q=n^k}^1 \frac{\partial W_{n'-2q}^{JK}}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} y_q^K \\ &= \sum_{p=n'-2}^{n'} \Delta_p^i \sum_{q=1}^{n^k} \frac{\partial W_{pq}^{JK}}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} y_q^K \end{aligned}$$

여기서,

$$\Delta_p^i = - \sum_{i=p}^{n'} e_i^i R_{ip}^i$$

이다. (임의 p 유니트에 대해)

따라서, $\alpha = n' - 1$ 인 일반적인 경우로 나타내면

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} = \sum_{p=1}^{n'} \Delta_p^i \sum_{q=n^k}^1 \frac{\partial W_{pq}^{JK}}{\partial \omega_{(i)}^{JK}} y_q^K \quad (9)$$

이다.

마찬가지로, K 층 유니트에서는 위와 동일한 방법

으로 다음과 같이 순차적(recursive)으로 유도된다.

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{KK}} = \sum_{p=2}^{n^k} \Delta_p^K \sum_{q=1}^{p-1} \frac{\partial W_{pq}^{KK}}{\partial \omega_{(i)}^{KK}} y_q^K \quad (10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{KL}} = \sum_{p=1}^{n^k} \Delta_p^K \sum_{q=1}^{n^L} \frac{\partial W_{pq}^{KL}}{\partial \omega_{(i)}^{KL}} y_q^L \quad (11)$$

여기서, K 층의 임의 p 유니트에서 정의되는 오류 역전(Error Back)은

$$- e_p^K \sum_{q=1}^{n'} \Delta_q^i W_{qp}^{iK} \quad (12)$$

이다. 따라서 독립적인 가중치의 변화량은 다음과 같다.

$$D\omega_{(i)}^i = \frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^i} \quad (13)$$

$$D\omega_{(i)}^{iK} = \frac{\partial E}{\partial \omega_{(i)}^{iK}} \quad (14)$$