

## 다결정 알루미나에서 결정립 크기 분포를 포함하는 Bridging 응력함수의 해석적 모델링

손기선 · 이성학 · 백성기  
포항공과대학교 재료금속공학과  
(1994년 7월 11일 접수)

### An Analytical Modeling for Bridging Stress Function Involving Grain Size Distribution in a Polycrystalline Alumina

Kee-Sun Sohn, Sunghak Lee and Sunggi Baik  
Department of Materials Science and Technology  
Pohang University of Science and Technology  
(Received July 11, 1994)

#### 요 약

본 연구에서는 다결정 알루미나에서 결정립 크기 분포가 R-curve 거동에 미치는 영향을 정량적으로 예측할 수 있는 bridging 응력함수모델을 개발하였으며, 이 모델의 타당성을 조사하고 정확한 bridging 응력 분포를 산출하기 위해서 균열열림변위 측정법을 수행하였다. 주사전자현미경 진공챔버내에 설치된 in-situ 파괴기기에 의해 시편에 일정한 하중을 가한 후 정지한 균열선단으로부터 거리에 따라 균열열림변위를 측정하였고, 그 결과로부터 사전에 결정된 bridging 응력함수를 포함하는 fitting 함수를 이용하여 수치해석에 의해 정확한 bridging 응력 분포를 구하였다. 이 때 bridging 응력함수로서 기존의 경험적인 power law 함수와 함께 새로운 bridging 응력함수모델을 적용하여 이에 따른 각각의 결과를 비교, 분석함으로써 새로운 모델의 타당성을 입증하였다. 이러한 이론적인 모델의 정립으로 미세조직학적 인자 즉 결정립 크기 분포가 bridging 응력 분포에 큰 영향을 미친다는 것을 밝혔으며, 이를 토대로 다결정 알루미나의 파괴현상을 미세구조와 연계하여 정량적으로 해석할 수 있었다.

#### ABSTRACT

A new analytical model which can describe the relationship between the bridging stress and the crack opening displacement was proposed to investigate the microstructural effect on the R-curve behavior in a polycrystalline alumina. The crack opening displacement according to the distance behind the stationary crack tip was measured using in-situ fracture technique in an SEM, and then used for a fitting procedure to obtain the distribution of bridging stress. The current model and an empirical power law relation were introduced into the fitting procedure. The results indicated that the bridging stress function and R-curve computed by the current model were consistent with those computed by the power law relation. The microstructural factor, e.g., the distribution of grain size, was also found to be closely related to the bridging stress. Thus, this model explained well the interaction effect between the distribution of bridging stress and the local-fracture-controlling microstructure, providing important information for the systematic interpretation of microfracture mechanism including R-curve behavior of a monolithic alumina.

#### 1. 서 론

다결정 알루미나에서 일어나는 R-curve 거동은 실측<sup>1-10</sup> 또는 직접적인 관찰<sup>4,5,11</sup>에 의해 명확히 규명되어 있다. R-curve 거동을 일으키는 주된 원인은 결정립에

의한 bridging으로 알려져 있으며<sup>1-10</sup>, 최근에는 bridging에 의해 유발되는 균열단합응력을 구하는데 많은 관심이 집중되고 있다. Reichl과 Steinbrech<sup>6</sup>은 처음으로 bridging 응력을 계산하여 약 29 MPa임을 발표하였으며, 그 후 많은 연구자들에 의해 여러 방법으로 bridging

응력이 구해졌다<sup>7,11-15</sup>). Bridging 응력을 구하기 위해서는 bridging 응력, 균열열림변위(crack opening displacement ; COD), 균열선단으로부터의 거리 사이의 관계를 나타내는 함수의 도입이 필수적이다. 이와 같은 함수의 정확한 형상에 대해서는 아직까지 밝혀진 바 없지만, 다결정 알루미늄에서와 같이 결정립계와 균열측면의 기지와와 마찬가지로 bridging의 주된 기구가 되는 경우에는 strain-softening 형태, 즉 power law 함수로 설명하는 것이 널리 통용되고 있으며<sup>7-11</sup>), 따라서 bridging 응력,  $P(u)$ 는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$P(u) = P_M \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right)^n \quad (1)$$

- $u$  : crack opening displacement
- $P_M$  : the peak stress
- $u_\infty$  : crack opening displacement corresponding to the end of bridging zone
- $n$  : strain-softening exponent

여기서  $n$ 은 결정립에 의한 bridging이 주된 기구로 작용할 때는  $n=1$ <sup>16</sup>), 세라믹 복합재료에서 fiber pull-out으로 toughening되는 경우에는  $n=1$ <sup>17</sup>), 철근 시멘트재료에서는  $n=2$ <sup>18</sup>)로 계산되는 등 이  $n$ 값은 재료와 toughening 기구에 따라 서로 달라져 정확한  $n$ 값에 대해서는 여러 주장들이 난립하고 있다. 그러나 실제  $n$ 값은 간단히 toughening 기구에 의해 결정되는 것이 아니라 재료의 미세구조와 밀접한 관계를 가지는 것으로 추정되고 있다<sup>12,19</sup>). 이러한  $n$ 값의 난립은  $P_M$ 값의 혼란을 야기시켜 지금까지 보고된  $P_M$ 값들이 20 MPa에서 70 MPa에 걸친 다양한 값들을 나타내는 결과를 낳았다.

실례로서 Hu 등<sup>14</sup>)은 wake zone의 영향으로 인한 compliance의 변화를 측정하고 power law 함수를 이용하여 bridging 응력을 구하였으며,  $P_M$ 은 56 MPa,  $n$ 은 2.1임을 보고하였다. Rödel 등<sup>11</sup>)은 Barenblatt식<sup>20</sup>)을 도입하고 in-situ SEM 관찰방법으로 균열의 각 위치에 따른 COD를 측정하였으며, 이로부터 컴퓨터 수치해석방법을 사용하여  $P_M=70$  MPa,  $n=2.5$ 로 계산하였다. 또한 Mai 등<sup>21</sup>)은  $n$ 을 고정시키고  $P_M$ 값을 계산하였는데, Swain의 R-curve data<sup>21</sup>)에 대입하여  $n=0$ 일 때  $P_M=25$  MPa,  $n=1$ 일 때  $P_M=40$  MPa,  $n=2$ 일 때  $P_M=55$  MPa의 값을 얻었다. 이와 비슷한 방법으로 Steinbrech 등<sup>13</sup>)은  $P_M$ 값이 33 MPa ( $n=2$ ), 46 MPa( $n=3$ ), 60 MPa( $n=4$ )인 계산결과를 산출하였다. 또한 최근에 Hay와 White<sup>13,19</sup>)는 새로운 실험 방법인 PFT(post fracture tensile)를 개발하여 34~46 MPa의 bridging 응력을 직접적으로 구하였으며, brid-

ging 응력 분포와 결정립 크기에 따른 누적면적분포를 연결시킴으로써 재료의 결정립 크기 분포가 bridging 응력함수의 형상과 관계가 있음을 시사하였다. 이러한 방법은 다른 연구자들의 방법들이 모두 간접적인 방법인데 반하여, 보다 직접적으로 실제 bridging 응력을 구할 수 있다는 장점이 있으나,  $P_M$ 값을 구하는 방법으로 여전히 power law 함수를 이용하여 외삽하는 방법을 사용한다는 점에서 그 한계를 넘지 못하고 있다.

결국 이론적으로는 재료의 미세구조에 영향을 받지 않는<sup>16</sup>) 재료상수로서 유일한 값을 가져야 하는  $P_M$ 이 크게 혼란된 결과를 보이는 이유는 경험식으로 도입한 power law식 자체에 문제가 있기 때문이다. 이를 해결할 수 있는 이론적 모델의 정립이 필수적이다. 최근 Bennisson 등<sup>10</sup>)은 이론적인 bridging 응력함수모델을 개발하였으나, 그 함수의 형상이 직선적이어서 대부분의 측정결과들이 곡선적이라는 점에 주목한다면 그 응용에 제약이 따른다. 따라서 실제의 현상을 잘 설명하면서도 이론적인 근거를 갖는 모델의 정립이 필수적이다.

본 연구에서는 bridging 응력함수에 결정립 크기 분포를 포함시킨 새로운 모델을 정립하고, 이를 Rödel 등<sup>11</sup>)의 방법에 적용함으로써 정확한 bridging 응력분포를 구하였으며, 그 결과를 기존의 power law 함수를 적용한 경우의 결과와 비교, 분석하였다. 결정립 크기 분포를 포함한 모델을 사용한 본 연구의 방법은 직접적으로 bridging 응력분포를 구할 수 있어 이론에 기초를 두지 않은 단순한 경험적인 기존의 power law 함수를 대체할 수 있을 것으로 기대된다. 이를 위하여 비교적 미세한 결정립을 갖는 다결정 알루미늄을 double cantilever beam (DCB) 형태의 시편으로 가공한 후 특별히 디자인된 in-situ 파괴시험기기를 이용하여 균열의 각 위치에서 COD를 측정하였으며, 그 결과로부터 regression fitting 방법을 이용하여 bridging 응력을 구하였다.

## 2. 실험방법

### 2.1. 시편 제작

본 연구에 사용된 알루미늄은 고순도(99.999%)의 분말을 1700°C에서 소결하여 제조한 것으로 평균 결정립 크기는 약 5.9 μm(면적에 대한 평균크기)이다. 시편은 Freiman 등<sup>22</sup>)이 제시한 바 있는 DCB 시편형태이며, COD 측정용 시편의 치수는 6 mm×1.4 mm×20 mm,  $K_{Ic}$  측정용 시편의 치수는 4 mm×1.4 mm×23 mm이다. 이 DCB 시편들에는 균열이 직선적으로 진행할 수 있도록 중앙에 폭 300 μm의 홈(groove)을 가공하였으며, 이 홈

부위에 폭 150  $\mu\text{m}$ 의 다이아몬드 휠로 날카로운 노치를 도입하였다. 그 후 시편 중앙의 홈 부분을 포함한 모든 면을 다이아몬드 paste로 연마하였으며, 노치선단에 1kg 하중의 indenter로 1분, 3분, 5분간 indentation하여 여러 길이의 균열을 만들었다. 이렇게 준비된 시편들을 가공시 발생한 표면의 잔류응력장을 해소시키기 위해 약 500  $^{\circ}\text{C}$ 에서 약 1시간 동안 annealing하였다.

### 2.2. In-situ SEM 파괴시험용 기기

Fig. 1(a)~(b)는 주사전자현미경(scanning electron microscope ; SEM)의 진공 챔버내에서 파괴가 일어나는 과정을 직접 관찰하거나 여러가지 정량분석을 병행할 수 있는 in-situ 파괴시험용 기기를 보여준다. 이 기기는 Cambridge사로부터 구입한 SEM용 tensile stage를 개조하여 DCB 방법(Fig. 1(a)) 또는 AMDCB(applied moment DCB ; Fig. 1(b)) 방법으로 시험할 수 있도록 새롭게 제작한 것이다<sup>24)</sup>. 하중은 챔버 밖으로 연결되어 있는 knob을 통해 직접 수동으로, 또는 감속기 및 step motor를 이용하여 자동으로 일정한 속도를 유지하면서 가할 수 있으며, 이 때 load cell에 의해 측정된 하중값을 display와 recorder에 의해 정확하게 기록할 수 있다. 또한 이 기기는 SEM 외부에 설치된 video tape recorder (VTR)과도 연결되어 있어 균열이 전파하는 과정을 VTR에 기록한 후 frame by frame 분석을 할 수 있다.

### 2.3. COD 측정시험

COD의 측정은 직접 하중에 의한 DCB법을 이용하였다(Fig. 1(a)). 정지상태의 균열에 applied stress intensity factor( $K_A$ )가 4  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ 가 되도록 하중을 가하고, 균열이 완전히 멈춘 것을 재확인한 후 균열선단으로부터 약 100  $\mu\text{m}$ 까지의 거리를 30,000배의 높은 배율로 연속사진촬영하였다. 100  $\mu\text{m}$ 에서 300  $\mu\text{m}$ 까지의 거리는 2.2절에서 설명하였듯이 SEM과 연결된 VTR을 이용하여 기록한 후 VTR 모니터에서의 정지된 상으로부터 COD를 측정하였다. 이 때 COD의 측정은 하중방향과 정확히 수직인 균열부만으로 한정하였으며, 간혹 발견되는 bridge의 근처에서는 COD값이 현격히 작은 값을 나타내기 때문에 그 부근에서의 측정은 피하였다.

### 2.4. $K_{IC}$ 측정시험

$K_{IC}$ (long crack fracture toughness)는 Fig. 1(b)에서 보듯이 AMDCB 방법을 이용하여 측정되었다. 이 AMDCB법은 균열을 어느 정도까지 안정하게 전파시킬 수 있으며, 균열길이에 상관없이 stress intensity factor가

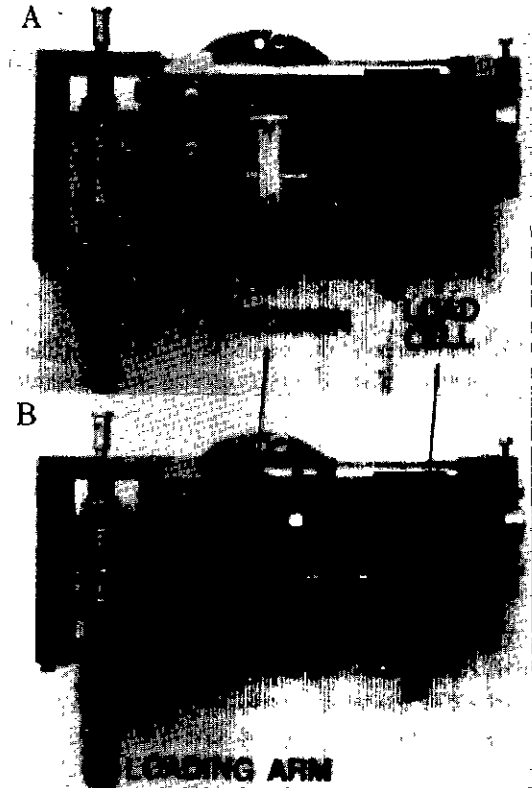


Fig. 1. The in-situ fracture stage which was inserted into the vacuum chamber of an SEM, showing (a) the applied load double cantilever beam (ALDCB) specimen set-up and (b) the applied moment double cantilever beam (AMDCB) specimen set-up to measure crack opening displacement (COD) and  $K_{IC}$  (long crack toughness), respectively.

정의되기 때문에 하중값만 측정하면  $K_{IC}$ 를 바로 얻을 수 있는 장점이 있다<sup>22)</sup>.  $K_{IC}$  측정시험 중 하중을 일정한 속도로 가하기 위해 감속기 및 step motor를 이용하였으며, crosshead speed를 약 10  $\mu\text{m}/\text{min}$ 로 고정하였다.

## 3. 결정립 크기 분포에 따른 Bridging 응력함수모델

Bennison 등<sup>16)</sup>은 결정립의 평균 크기를 이용한 bridging 응력 모델을 개발하였으며, 이 모델로부터 bridging 응력함수는 COD 혹은 균열선단으로부터의 거리에 직 선적으로 감소하는 형태를 갖는다고 보고하였다. 이는 다른 여러 방법에 의해 계산되거나 실측된 결과들이 n

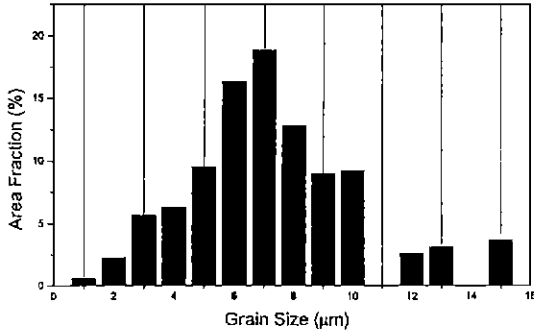


Fig. 2. Distribution of the grain size of a polycrystalline alumina. The average grain size was measured to be 5.9 μm.

승꼴(n=2~3)로 감소하는 것<sup>11,14)</sup>과 큰 차이를 보이는 것이다. 또한 최근 Hay 등<sup>13)</sup>은 보다 직접적인 방법을 이용하여 bridging 응력 분포를 구함으로써 곡선적으로 감소하는 bridging 응력 분포의 형상을 확인하였다. 따라서 본 연구에서는 평균 결정립 크기를 사용한 Bennison의 기존 모델에 결정립 크기의 면적분율의 분포를 도입함으로써 개선하고, 직선이 아닌 실제의 bridging 응력함수와 가장 가까운 곡선을 나타내는 모델을 제시하고자 하였다.

Fig. 2은 영상분석기(image analyzer)를 사용하여 측정 한 다결정 알루미늄의 결정립 크기에 대한 면적분율의 도표이다. 결정립 크기는 모델 전개의 편의상 각 결정립을 정사각형으로 가정하고 그 한번의 길이를 나타낸 것이며, 1 μm 단위로 구분하여 각 구간의 중간값을 대표값으로 취하였다. 여기서 볼 수 있듯이 알루미늄은 unimodal하고 16 μm 이하의 비교적 미세한 결정립 분포를 가지고 있음을 알 수 있다. 각 1 μm 간격의 결정립 집단들이 서로 독립적으로 bridging에 기여한다고 가정한다면, i μm 크기의 i번째 집단의 결정립들만을 따로 분리함으로써 Bennison 등<sup>16)</sup>이 제시한 응력평형조건을 다음과 같이 변형하여 나타낼 수 있다.

$$\sigma_R(f_i - l_i^2/2d_{br,i}^2) = -\sigma_{\bar{R}}(l_i^2/2d_{br,i}^2) \quad (2)$$

$\sigma_R$  : local residual internal tensile stress

$-\sigma_{\bar{R}}$  : local residual internal compressive stress

$f_i$  : area fraction of the ith grain group

$l_i$  : grain size of the ith grain group

$d_{br,i}$  : characteristic bridge spacing of the ith grain group

여기서  $l_i^2/2d_{br,i}^2$ 은 i번째 집단의 결정립들 중 bridging에

기여하는 결정립의 전체 결정립의 총 면적에 대한 면적분율을 나타낸다. 가령 i번째 집단의 총 결정립 개수의 분율, m만큼만이 bridging에 기여한다면

$$l_i^2/2d_{br,i}^2 = f_{br,i} = mf_i \quad (0 < m < 1) \quad (3)$$

와 같은 관계를 얻을 수 있으며, 식 (2)는  $\sigma_R(1-m) = -\sigma_{\bar{R}}(m)$ 이 된다.

한편 i번째 결정립 집단에 의한 bridging의 기여는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_i(u) = \lambda_i(2u_{\infty,i} - 2u)\mu(-\sigma_{\bar{R}})/2d_{br,i}^2 \quad (4)$$

$\lambda_i$  : circumferential distance around the grain

$u_{\infty,i}$  : characteristic rupture separation of the ith grain

$\mu$  : friction coefficient

식 (4)에 식 (2)과 식 (3)을 대입하면,

$$P_i(u) = P_M f_i \left(1 - \frac{u}{u_{\infty,i}}\right)$$

$$P_M = \frac{\lambda_i}{l_i} \frac{u_{\infty,i}}{l_i} \mu \sigma_R (2 - 2m) \quad (5)$$

와 같은 식을 최종적으로 얻을 수 있다.

이상과 같은 결과를 토대로 실제 재료의 bridging 응력, P(u)는 각각의 P<sub>i</sub>(u)들을 모두 합하여 구할 수 있으며, 이는 널리 사용되고 있는 경험적인 power law 함수와 같은 형상을 나타내게 될 것이다. Fig. 3(a)는 Fig. 2의 결정립 크기 분포의 결과(i=1, 2, ..., 15)에 대한 여러 P<sub>i</sub>(u)를 표시한 것이며, 이 P<sub>i</sub>(u)를 모두 합한 P(u)를 Fig. 3(b)에 나타내었다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$P(u) = \sum_{i=1}^N P_i(u) = \sum_{i=1}^N P_M f_i \left(1 - \frac{u}{u_{\infty,i}}\right), \text{ when } 0 \leq u < u_{\infty,1}$$

$$P(u) = \sum_{i=2}^N P_i(u) = \sum_{i=2}^N P_M f_i \left(1 - \frac{u}{u_{\infty,i}}\right), \text{ when } u_{\infty,1} \leq u < u_{\infty,2}$$

$$\vdots$$

$$P(u) = \sum_{i=N-1}^N P_i(u) = \sum_{i=N-1}^N P_M f_i \left(1 - \frac{u}{u_{\infty,i}}\right), \text{ when } u_{\infty,N-1} \leq u < u_{\infty,N} (=u_{\infty}) \quad (6)$$

정체된 균열에서 COD(u)와 균열선단으로부터의 거리(y)의 관계는 균열선단 부근에서는 거의 직선적으로 가정해도 큰 무리가 없기 때문에<sup>12)</sup> 식 (6)의 u와 u<sub>∞,i</sub>는 각각 균열선단으로부터의 거리(y)와 i번째 집단의 bridging zone size(C<sub>∞,i</sub>)로 대체할 수 있다. 또한 결정립 크기와

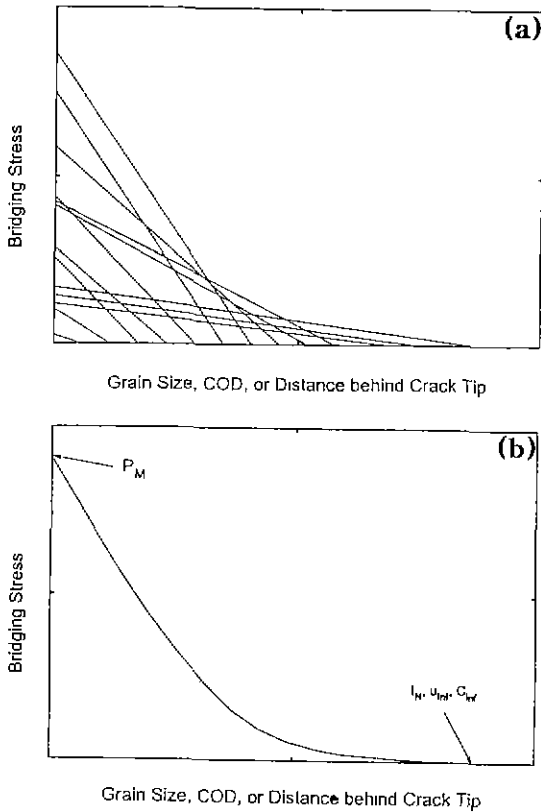


Fig. 3. (a) Distribution of the bridging stress behind the crack tip for each grain group ( $i=1, 2, 3, \dots, 15$ ) and (b) distribution of the total bridging stress obtained by superposing all the curves in (a).

그에 해당하는 bridging zone size도 직선적인 관계에 있다고 가정하면<sup>10)</sup>,  $C_{\infty}$ 는 다시  $iC_{\infty}/N$ 로 표현할 수 있으며, 이에 따라 식 (6)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$P(y) = \sum_{i=1}^N P_M f_i \left(1 - \frac{Ny}{iC_{\infty}}\right), \text{ when } 0 \leq y < \frac{C_{\infty}}{N}$$

$$P(y) = \sum_{i=2}^N P_M f_i \left(1 - \frac{Ny}{iC_{\infty}}\right), \text{ when } \frac{C_{\infty}}{N} \leq y < \frac{2C_{\infty}}{N}$$

⋮

$$P(y) = \sum_{i=N-1}^N P_M f_i \left(1 - \frac{Ny}{iC_{\infty}}\right), \text{ when } \frac{(N-1)C_{\infty}}{N} \leq y < C_{\infty}$$

(7)

식 (7)을 간단히 줄여서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(Y_j) = \sum_{i=1}^N P_M f_i \left(1 - \frac{NY_j}{iC_{\infty}}\right),$$

$$\text{when } \frac{(j-1)C_{\infty}}{N} \leq Y_j < \frac{jC_{\infty}}{N}, j=1 \sim N. \quad (8)$$

Fig. 3(b)는 Fig. 2의 결정립 분포를 식 (8)에 대입하여 얻은 최종적인 bridging 응력함수이며, Bennison의 모델에서의 달리 bridging 응력함수가 곡선적으로 감소하는 형태를 가지는 것을 알 수 있다. 이를 다시 기존의 power law 함수에 fitting시키면,  $n$ 값이 약 2.7임을 계산할 수 있다. 따라서 power law 함수의 지수  $n$ 값은 결정립 크기의 분포를 나타내는 상수이며, 본 연구에 사용된 알루미늄과 같이 unimodal한 결정립 크기 분포를 나타내는 경우에는  $n$ 값이 2~3 정도임을 추정할 수 있다.

#### 4. COD 측정 및 Regression Fitting

일반적으로 bridging 응력함수를 구하는 방법으로는 간단하게는 DCB, SENB(single edge notch bending)법이나 indentation-strength 방법에 의해 R-curve를 구한 후 이로부터 bridging 응력 함수를 역산하는 방법<sup>7,12,24)</sup>으로부터 renotching에 의한 compliance 차이로부터 구하는 방법<sup>14)</sup>, PFT(Post fracture tensile)법<sup>13,19)</sup>, COD 측정에 의한 방법<sup>11)</sup> 등을 들 수 있다. 본 연구에서는 Rodel 등<sup>11)</sup>에 의해 보고된 바 있는 COD 측정방법에 의해 bridging 응력함수를 구했으며, 이로부터 R-curve를 산출하였다.

완전한 탄성재료에서 어떠한 bridging도 일어나지 않는다면, COD는 균열선단으로부터의 거리의 1/2승에 비례하는 다음의 Irwin식<sup>25)</sup>으로 나타낼 수 있다.

$$u(x) = (8x/n)^{1/2} K_A / E' \quad E' = E / (1 - \nu^2) \quad (9)$$

여기서  $K_A$ 는 시편에 가해진 응력확대계수로서 본 연구에서는  $4 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ 로 고정시켰다.  $E$ 는 알루미늄의 Young률로서 약 400 GPa이며,  $\nu$ 는 Poisson비로서 0.2의 값을 취하였다. 그러나 R-curve 거동을 보이는 재료의 경우 균열 측면의 단층 효과에 의해 실제 COD는 식 (9)에 의해 예측된 값보다 훨씬 작은 값을 가진다. 대부분의 연구<sup>7,8,15,16,21)</sup>에서는 이를 조정하기 위해 식 (9)에  $K_A$  대신 intrinsic toughness( $K_0$ )를 대입하였으며, Rödel 등<sup>11)</sup>은 Barenblatt<sup>20)</sup>의 수식을 이용한 방법을 도입하였다. 이 Rödel 등의 방법은 bridging 응력함수를 구할 수 있다는 점에서 매우 흥미를 끄는데, 이를 수식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

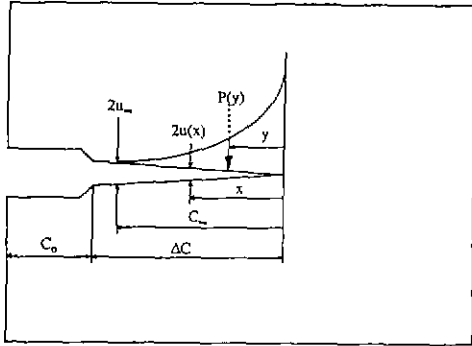


Fig. 4. Schematic diagram showing the bridging stresses  $P(y)$  at the distance from the crack tip ( $y$ ). Here,  $C_0$ ,  $\Delta C$ ,  $C_\infty$ ,  $u_\infty$ , and  $u(x)$  are notch length, crack extension, bridging zone size, crack opening displacement corresponding to  $C_\infty$ , and crack opening displacement at the distance ( $x$ ), respectively.

$$u(x) = (8x/\pi)^{1/2} K_{II} / E' - (2/\pi E') \int_0^{\Delta C} P(y) \ln \left| \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \right| dy \quad (10)$$

$P(y)$ 는 균열선단으로부터 거리  $y$ 만큼 떨어진 곳에서의 bridging 응력을 나타내며,  $x$ 는 COD가 측정된 위치를 나타낸다. 한편  $\Delta C$ 는 균열의 길이로서 본 연구에서 사용된 시편의 경우 1.3 mm로 고정시켰다. 이러한 사항은 Fig. 4에 도식적으로 자세히 나타내었다.

본 연구에서는 실제 측정된 실험결과와 식 (10)을 이용하여 computer fitting 방법으로  $P(y)$ 를 구하였으며, 이때  $P(y)$ 에는 Part 3에서 도입한 새로운 모델 또는 일반적으로 많이 사용되는 Mai 등<sup>7)</sup>의 power law 경험식을 대입하였다. 또한 bridging zone size( $C_\infty$ )가 시편의 균열길이( $\Delta C$ )인 1.3 mm보다 큰 경우와 1.3 mm보다 작은 경우에 식 (10)을 각각 달리 활용하였다. 즉 식 (10)은 bridging zone size( $C_\infty$ )가 시편의 균열길이( $\Delta C$ )보다 크다는 가정을 전제한 것이다. 따라서 식 (10)의 마지막 항의 적분상한은 균열길이( $\Delta C$ )가 된다. 반면 bridging zone size( $C_\infty$ )가 시편의 균열길이( $\Delta C$ )보다 작을 경우에는 식 (10)의 적분상한은 bridging zone size( $C_\infty$ )로 바뀌어야 한다. 그러나 실제  $C_\infty$ 를 구하기 전에는  $C_\infty$ 와  $\Delta C$ 의 대소관계를 알 수 없으므로 우선은 위의 두 경우를 모두 적용하여 각기 다른 결과를 산출한 후 적절한 기준에 의해 보다 신뢰성 있는 결과를 선택하였다. 따라서 본 연구에서는 2 가지의 bridging 응력함수를 도입하고 동시에 bridging zone size( $C_\infty$ )와 시편의 균열길이( $\Delta C$ )

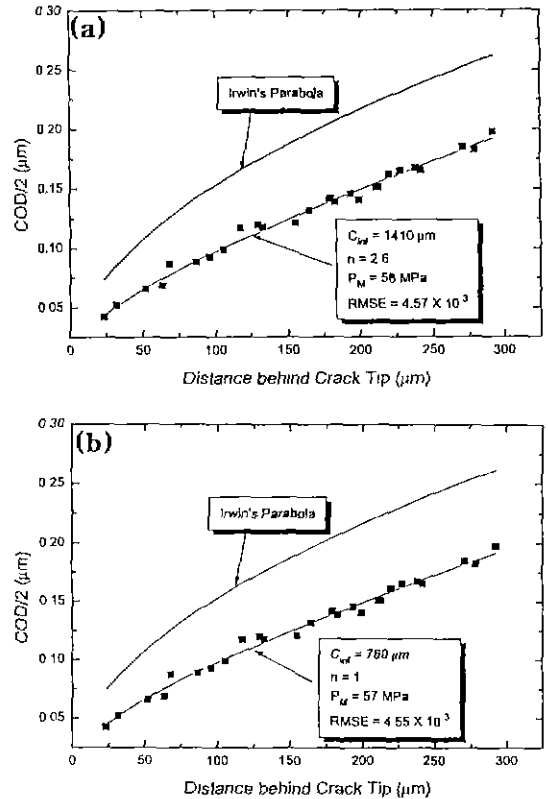


Fig. 5. Measured and predicted crack opening displacements vs the distance behind the crack tip. The straight lines in (a) and (b) represent respectively the COD's predicted by equations (11) and (12) which are based on the power law functions, and are compared with the measured COD's (solid square dots) and Irwin's parabola<sup>25)</sup> (thick solid line).

의 대소에 따른 2가지 fitting 식을 적용함으로써 총 4 가지의 fitting을 실시하였으며, 각각의 경우에 대하여 다음과 같이 비교, 분석하였다.

Case 1( $C_\infty > \Delta C$ , Power Law 경험식을 적용한 경우)

Bridging zone 크기가 시편의 균열길이보다 크고, power law 함수를 적용한 경우 식 (10)은 다음과 같이 표현된다.

$$u(x) = (8x/\pi)^{1/2} K_{II} / E' - (2/\pi E') \int_0^{\Delta C} P_M (1 - y/C_\infty)^n \ln \left| \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \right| dy \quad (11)$$

여기서 적분상한은 균열길이가 되어야 하므로 Rödel 등<sup>11)</sup>의 fitting 방법과 같이 식 (10)에  $\Delta C$ 으로 시편의

균열길이인 1.3 mm를,  $K_A$ 로 4 MPa $\sqrt{m}$ 을 대입한 후 least square method를 이용하여 fitting하였다.  $C_\infty$ 은 1.3 mm에서 3 mm까지 10  $\mu$ m 간격으로 증가시키고, 각각의  $C_\infty$ 에 대해 n은 1에서 4까지 0.1씩 증가시키기는 incremental searching 방법을 사용하여  $C_\infty$ 과 n을 구하였다.  $P_M$ 은 각 ( $C_\infty$ , n)쌍에서 잔차제곱항(root mean square error, RMSE)를 최소로 하는 값으로 golden section searching 방법<sup>20</sup>에 의해 결정되었다.

이상과 같은 방법으로 잔차제곱항 4.57  $\times 10^{-3}$ 의 범위에서  $C_\infty = 1410 \mu$ m, n=2.6,  $P_M = 58$  MPa의 결과를 얻었으며, Fig. 5(a)에 그 결과를 나타내었다. 그림에서 위 곡선은 bridging 효과가 없는 완전한 탄성체의 경우에 대한 포물선 형태의 곡선(Irwin's parabola)을 아래 곡선은 regression fitting 결과를 각각 나타낸 것이며, 실험값과 fitting 결과가 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

Case 2( $C_\infty < C$ , Power Law 경험식을 적용한 경우)  
이 경우 식 (10)은

$$u(x) = (8x/\pi)^{1/2} K_A/E' - (2/\pi E') \int_0^{C_\infty} P_M (1-y/C_\infty)^n \ln \left| \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \right| dy \quad (12)$$

과 같이 변형되며, 여기서  $C_\infty$ 은  $\Delta C$ 보다 작으므로 식 (12)에서는 균열길이와는 무관하게 fitting이 수행된다. 이 경우에도 Case 1에서와 마찬가지로  $C_\infty$ 과 n에는 incremental searching 방법이( $C_\infty$ 은 160  $\mu$ m에서 1300  $\mu$ m까지 10  $\mu$ m 간격으로 증가),  $P_M$ 에는 golden section searching 방법이 적용되었다.

식 (12)에 의한 fitting 결과는  $C_\infty = 760 \mu$ m, n=1,  $P_M = 57$  MPa이었으며, Fig. 5(b)에 fitting 결과를 나타내었다. 이 때 잔차제곱항은 4.55  $\times 10^{-3}$ 으로서 Case 1에서의 4.57  $\times 10^{-3}$ 과 비슷하며, Fig. 5(b)에서도 fitting 결과와 실측치는 잘 맞는 것을 볼 수 있으므로 잔차제곱항 차이로만 결과의 정확성을 결정할 수는 없을 것으로 생각된다.

Case 3( $C_\infty > \Delta C$ , 새로운 모델에 적용한 경우)

Part 3에서 제시한 결정립 크기 분포를 기초로한 새로운 bridging 응력함수는 Bennison 등<sup>16</sup>의 모델을 수정한 것으로 이 응력함수를 이용하여 fitting하는 경우 n을 포함하지 않으므로 기존의 power law 함수를 이용하는 경우에 비해 간단하고 효과적으로 fitting 결과를 얻을 수 있다. 식 (8)을 식 (10)에 대입하면,

$$u(x) = (8x/\pi)^{1/2} K_A/E' - (2/\pi E') \sum_{i=1}^{i_m-1} \int_0^{C_\infty} P_M i (1 - \frac{Ny}{iC_\infty}) \ln \left| \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \right| dy$$

$$- (2/\pi E') \sum_{i=i_m}^N \int_0^{\Delta C} P_M i (1 - \frac{Ny}{iC_\infty}) \ln \left| \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \right| dy \quad (13)$$

이며,  $i_m$ 은 다음과 같은 기준에 의해 결정된다.

$$(i_m - 1) \frac{C_\infty}{N} < \Delta C < i_m \frac{C_\infty}{N} \quad (14)$$

여기서  $i < i_m$ 일 때 적분상한은 각 집단의 bridging zone 크기( $iC_\infty/N$ )가 되며,  $i > i_m$ 일 때에는 적분상한으로 균열길이( $\Delta C$ )를 도입하여야 한다. Fitting 과정은 Case 1에서와 마찬가지로  $C_\infty$ 은 1.3 mm에서 3 mm까지 10  $\mu$ m씩 증가시키는 incremental searching 방법으로,  $P_M$ 은 golden section searching 방법으로 수행되었으며,  $\Delta C = 1300 \mu$ m에서  $C_\infty = 1750 \mu$ m,  $P_M = 54$  MPa의 결과를 얻었다. 잔차제곱항은 4.49  $\times 10^{-3}$ 이므로서 Case 1 및 Case 2보다 낮은 값을 나타내며, 계산된 fitting 결과와 실측치가 일치함을 알 수 있다(Fig. 6(a)).

Case 4( $C_\infty < \Delta C$ , 새로운 모델에 적용한 경우)

이 경우 fitting은 다음 식에 의해 이루어진다.

$$u(x) = (8x/\pi)^{1/2} K_A/E' - (2/\pi E') \sum_{i=1}^N \int_0^{C_\infty/N} P_M i (1 - \frac{Ny}{iC_\infty}) \ln \left| \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} \right| dy \quad (15)$$

여기서 적분상한은 균열의 길이와 상관없는 각 그룹의 bridging zone의 크기이며, fitting 과정은 Case 2와 같은 방법을 따랐다. Fitting 결과 잔차제곱항 4.59  $\times 10^{-3}$ 에서  $C_\infty = 1300 \mu$ m,  $P_M = 57$  MPa를 얻었는데, 이 결과는 앞의 Case 1~Case 3의 결과에 비해 약간 큰 값이기는 하지만, Fig. 6(b)에서 볼 수 있듯이 실측치와 거의 일치한다. Case 4에서 주목할 것은 fitting 결과가 초기값의 경계치(상한값)인  $C_\infty = 1300 \mu$ m에서 결정되었다는 점이다. 이 경우는 Case 2에서와 같이 bridging zone의 크기가 시편의 균열길이인 1300  $\mu$ m보다 작은 구간에서 fitting하는 것이기 때문에  $C_\infty = 1300 \mu$ m은 그 상한값인 동시에 균열 길이에 해당한다. 이와 같이 fitting 결과가 초기값의 경계(상한값)에서 결정되었을 때에는 그 이상의 영역에서 더욱 잘 맞는 최적치가 있을 수 있으며, 더우기 Case 4에서는 잔차제곱항도 Case 3보다 크기 때문에 Case 4의 결과는 의미가 없다.

이상과 같이 4가지 방법에 의하여 fitting 결과가 산출되었으며, 그 결과는 모두 Fig. 5(a)~(b)와 Fig. 6(a)~(b)에서 보듯이 실험치와 잘 일치하였다. 또한 각 경우에서 계산된  $P_M$ 값은 54, 57, 58, 69 MPa로서 이제까지 다른 연구자들의  $P_M$ 값이 20~70 MPa로 다양하게 계산된

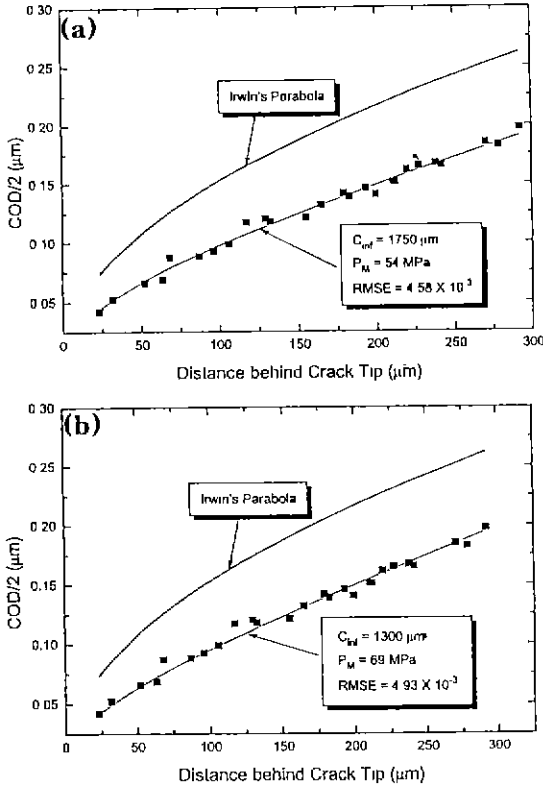


Fig. 6. Measured and predicted crack opening displacements vs the distance behind the crack tip. The straight lines in (a) and (b) represent respectively the COD's predicted by equations (13) and (14) which are based on the current model functions, and are compared with the measured COD's (solid square dots) and Irwin's parabola<sup>25)</sup> (thick solid line).

것을 감안하면<sup>7,11-14,17)</sup>, 신뢰성 있는 결과를 얻었다고 할 수 있다.

Fig. 7은 fitting 결과들을 이용하여 구한 bridging 응력함수들을 나타낸 것으로 Case 2의 조건에서는 직선의 형태를, 나머지 경우에는 곡선의 형태를 나타내나, 모든 함수들은 거의 비슷한 범위의 값을 보인다. Fig. 8는 다음과 같은 Green의 식<sup>25)</sup>을 이용하여 얻은 각 경우에 대한 R-curve들을 보여준다.

$$\Delta K(\Delta C) = 2\sqrt{(C_0 + \Delta C)/\pi} \int_0^{\Delta C} \frac{P(y)}{\sqrt{(C_0 + \Delta C)^2 - (C_0 + \Delta C - y)^2}} dy \quad (16)$$

$C_0$  : initial notch length

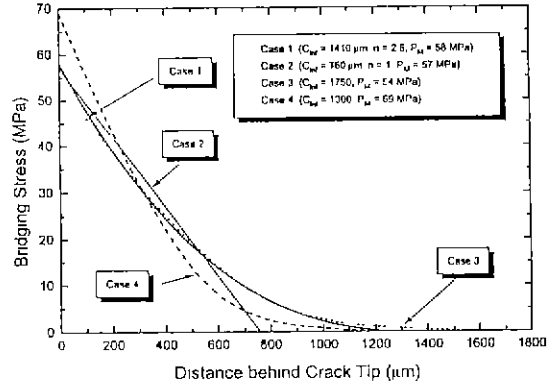


Fig. 7. Bridging stress functions predicted by the power law functions (Case 1 and Case 2) and the current model functions (Case 3 and Case 4) vs the distance behind the crack tip.

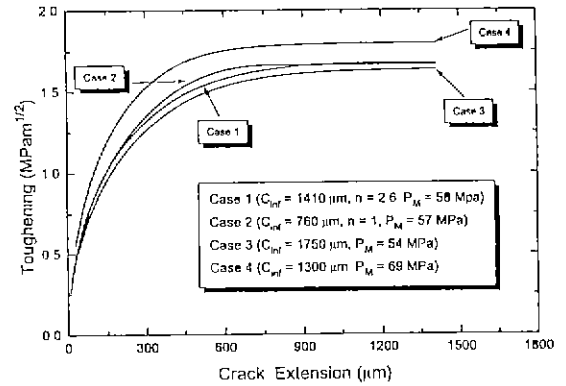


Fig. 8. Crack resistance curves predicted by the power law functions (Case 1 and Case 2) and the current model functions (Case 3 and Case 4) vs the crack extension. Curves were obtained using equation (16).

$\Delta C$  : crack extension

Fig. 8에서 볼 수 있듯이 Case 4에 대한 R-curve는 약간 다른 형태를 나타내나, 다른 경우에 대한 R-curve 들은 거의 비슷하다. 또한 R-curve의 saturation toughening( $\Delta K(C_\infty)$ )값은 약 1.6~1.7  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ 로 나타나는데, 다결정 알루미늄의 대략적인 intrinsic toughness( $K_{I0}$ )값이 약 1.5~2.5  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ 임을 감안하면<sup>3,7,12,20)</sup>, saturation toughness( $K_{IC}$ )는  $K_{IC} = K_{I0} + \Delta K(C_\infty)$ 의 관계식에 의해 3.1~4.2  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  정도로 추정된다. 2.4절에서 설명한 AM-DCB 방법으로 실측한 saturation toughness( $K_{IC}$ )값은  $4.1 \pm 0.15 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ 로 나타나므로 추정된 값과 실제 측



정된 값은 비슷한 범위내에 존재하는 것을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서 사용된 다결정 알루미늄의  $K_{IC}$  값은 약  $2.5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  정도임을 유추할 수 있으며, 이러한 본 연구의 결과는 전체적으로 타당한 범위의 값을 가짐을 보여 준다.

그러나 산출된 결과들 중 어떤 결과가 보다 신뢰성이 있는가를 판단하여야 할 필요가 있으며, 일반적으로 결과의 신뢰성은 잔차제곱항으로 판단하는 경우가 많으나, 본 연구에서는 그 차이가 작아 판단하기 어려우므로 새로운 판단기준을 결정해야 한다. 우선 Case 4는  $C_{\infty} < \Delta C$ 를 전제로 한 fitting한 결과인데, 앞에서 언급한 바 있듯이 fitting된 값이 상한경계인  $1300 \mu\text{m}$ 에서 결정되고, 이 때의 잔차제곱항도 Case 3에서보다 크며, 결정된  $P_M$  값도 나머지 세 경우와 차이가 있으므로 Case 4의 결과의 신뢰도는 많이 떨어진다. 더우기 Fig. 9에서 보듯이 Case 4의 R-curve도 나머지 세 경우에 비해 그 형상이 다르다. 한편, power law 함수를 이용한 fitting시, 즉 Case 1과 Case 2는 각기 다른 결과를 산출했으나, 이 두 결과의 잔차제곱항은 모두 낮은 값을 나타내고, 두 결과에 의한 R-curve도 거의 같다(Fig. 8). 따라서 fitting 과정에 power law 함수를 이용할 경우에는 Case 1과 Case 2와 같이 각기 다른 두 개의 국부적인 최적상태(local optimum state)가 존재하므로 보다 타당한 결과를 선택하기 매우 어렵다. 즉  $P_M$ 은 같지만( $P_M$ 은 재료의 미세구조와 상관없는 재료상수이므로 변하지 않는 것이 이치에 맞는다<sup>19)</sup>),  $C_{\infty}$ 과  $n$ 이 서로 조화 있게 변하면서 같은 COD profile과 R-curve를 갖는 두 쌍의  $C_{\infty}$ 과  $n$ 를 산출하는 것이다. 그러나 본 연구의 목적은 결정립 크기 분포를 도입한 bridging 응력함수모델을 정립하고 이의 타당성을 조사하는 것이므로, 직선적인 형태의 함수를 나타내는 Case 2보다는 큰  $C_{\infty}$ 을 가지고 곡선적으로 감소하는 형태의 함수를 나타내는 Case 1의 결과가 보다 타당한 것으로 판단된다. 또한 이는 Steinbrech 등<sup>6)</sup>의 bridging zone 크기( $C_{\infty}$  또는  $u_{\infty}$ )에 대한 가설, 즉 COD와 결정립 크기 사이의 관계( $u_{\infty} = l_{\text{ave}}/8$ )에 얼마나 잘 일치하는가에 근거를 두고 있기도 하다. 본 연구에서 bridging zone 크기는  $C_{\infty}$ 으로 구해지므로 다시  $u_{\infty}$ 로 환산하기 위해서 평형상태에서 bridging zone의 끝부분( $C_{\infty}$ )에서의 균열열림값을 나타내는 다음 식을 도입하였다.

$$u_{\infty}(C_{\infty}) = (8C_{\infty}/\pi)^{1/2} K_{IC}/E' \\ - (2/\pi E') \int_0^{C_{\infty}} P(y) \ln \left| \frac{\sqrt{y}\sqrt{C_{\infty}}}{\sqrt{y}-\sqrt{C_{\infty}}} \right| dy \quad (17)$$

이 식은 식 (10)에서의  $x$ 를  $C_{\infty}$ 로, 또한 평형상태를

나타내기 위해  $K_A$ 를  $K_{IC}$ 로 대체하여 변형한 것이며, AM-DCB법으로 측정된  $K_{IC}$ (long crack toughness)값인 약  $4.1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ 을 식 (17)에 대입하여  $u_{\infty}$ 를 계산한 결과 Case 1에서는 약  $0.64 \mu\text{m}$ , Case 2에서는 약  $0.37 \mu\text{m}$ 의 값을 얻었다. 본 연구에서 사용된 다결정 알루미늄의 평균 결정립 크기는  $5.9 \mu\text{m}$ 이고, 이에 해당하는  $u_{\infty}$ 는 약  $0.7 \mu\text{m}$ 이므로 Case 1이 Steinbrech 등<sup>6)</sup>의 가설에 잘 맞는 것을 알 수 있다. 따라서 Case 2의 결과를 Case 1의 결과와 비교할 때, Case 2의 결과는 잔차제곱항 및 R-curve면에서는 거의 비슷하나, bridging 응력함수의 형태 및 Steinbrech의 가설에의 적합성면에서 Case 1에 비해 신뢰도가 떨어진다.

이상의 결과로부터 결정립 크기 분포를 도입한 모델에 의한 결과인 Case 3와 power law 함수를 이용한 결과인 Case 1은 Fig. 7에서와 같이 잘 일치하므로 Part 3에서 새롭게 구한 모델의 타당성을 확인하였으며, 이에 따라 bridging 응력함수는 재료의 미세구조, 즉 결정립 크기 분포와 밀접한 상관관계가 있음을 알 수 있다. 이러한 결과는 unimodal한 분포를 가지는 한 종류의 재료만을 사용하여 얻은 것이므로 모델의 신뢰도를 높이기 위해서는 평균 결정립 크기는 같으나 다른 크기 분포를 가진 여러 재료에 대한 bridging 응력 함수를 구하고, 이에 대한 결과들을 비교, 분석하는 것이 필요하다. 또한 bridging 응력함수를 구하기 위해서 균열선단으로부터의 위치에 따른 COD를 측정하였는데, 이러한 방법은 대단히 복잡한 방법이므로 차후 보다 직접적이고 간단한 bridging 응력함수를 구하는 방법에 대한 연구가 계속되어야 할 것으로 생각된다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 다결정 알루미늄의 결정립 크기 분포를 bridging 응력함수에 포함시킨 새로운 해석 모델이 제시되었다. 평균 결정립 크기가 약  $5.9 \mu\text{m}$ 인 다결정 알루미늄에서 균열의 각 위치에 따라 측정된 COD값을 기존 power law 함수 및 새로운 모델 함수를 도입한 Barrenblat<sup>20)</sup>식에 fitting함으로써 bridging 응력 분포를 계산하였다. 새로운 모델로 fitting한 결과 power law 함수의 결과와 거의 비슷하게 일치하는 bridging 응력 함수 및 R-curve를 얻을 수 있었으며, 따라서 알루미늄에서 일어나는 bridging시의 응력 분포 및 이에 따른 R-curve 현상은 미세구조, 즉 결정립 크기 분포와 밀접한 관계가 있음을 알 수 있었다. 이 새로운 bridging 응력 함수 해석 모델은 bridging 응력함수가 곡선형태를 가

지며, 기존의 power law 모델에서 설명하지 못한 미세 조직과의 상관관계를 잘 설명한다. 또한 본 모델은 R-curve 현상을 균열선단으로부터의 거리에 따른 bridging 응력으로부터 정량적으로 결정할 수 있는 도구를 제공하며, 이렇게 결정된 bridging 응력의 분포 함수는 세라믹 재료의 미세파괴기구의 체계적인 해석에 중요한 자료를 제공할 것으로 기대된다.

REFERENCES

1. H. Hübner and W. Jillek, "Subcritical Crack Extension and Crack Resistance in Polycrystalline Alumina," *J. Mater. Sci.*, **12**, 117-125 (1977).
2. R. Knehans and R. Steinbrech, "Memory Effect of Crack Resistance during Slow Crack in Notched Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Bend Specimens," *J. Mater. Sci. Lett.*, **1**(8), 327-329 (1982).
3. R.F. Krause, Jr., "Rising Fracture Toughness from the Bending Strength of Indented Alumina Beams," *J. Am. Ceram. Soc.*, **71**(5), 338-343 (1988).
4. G. Vekinis, M.F. Ashby, and P.W.R. Beaumont, "R-Curve Behavior of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> Ceramics," *Acta Metall. Mater.*, **38**(6), 1151-1162 (1990).
5. P.L. Swanson, C.J. Fairbanks, B.R. Lawn, Y.W. Mai, and B.J. Hokey, "Crack-Interface Grain Bridging as a Fracture Resistance Mechanism in Ceramics: I, Experimental Study on Alumina," *J. Am. Ceram. Soc.*, **70**(4), 279-289 (1987).
6. A. Reichl and R. Steinbrech, "Determination of Crack-Bridging Forces in Alumina," *J. Am. Ceram. Soc.*, **71**(6), C299-C301 (1988).
7. B.R. Lawn and Y.W. Mai, "Crack-Interface Grain Bridging as a Fracture Resistance Mechanism in Ceramics: II. Theoretical Fracture Mechanics Model," *J. Am. Ceram. Soc.*, **70**(4), 289-294 (1987).
8. R.F. Cook, C.J. Fairbanks, B.R. Lawn and Y.W. Mai, "Crack Resistance by Interfacial Bridging: Its Role in Determining Strength Characteristics," *J. Mater. Res.*, **2**(3), 345-356 (1987).
9. R.M.L. Foote, Y.W. Mai, and B. Cotterell, "Crack Growth Resistance Curves in Strain-Softening Materials," *J. Mech. Phys. Solids*, **34**(6), 593-607 (1986).
10. C.-H. Hsueh and P. Becher, "Evaluation of Bridging Stress from R-Curve Behavior for Nontransforming Ceramics," *J. Am. Ceram. Soc.*, **71**(5), C234-C237 (1988).
11. J. Rödel, J.G. Kelly, and B.R. Lawn, "In Situ Measurement of Bridged Crack Interfaces in the Scanning

- Electron Microscope," *J. Am. Ceram. Soc.*, **73**(11), 3313-3318 (1990).
12. R.W. Steinbrech, A. Reichl, and W. Schaarwachter, "R-Curve Behavior of Long Cracks in Alumina," *J. Am. Ceram. Soc.*, **73**(7), 2009-2015 (1990).
13. J.C. Hay and K.W. White, "Grain-Bridging Mechanisms in Monolithic Alumina and Spinel," *J. Am. Ceram. Soc.*, **76**(7), 1849-1854 (1993).
14. X.-Z. Hu, E.H. Lutz, and M. Swain, "Crack-Tip-Bridging Stresses in Ceramic Materials," *J. Am. Ceram. Soc.*, **74**(8), 1828-1832 (1991).
15. B.S. Majumdar, A.R. Rosenfield, and W.H. Duckworth, "Analysis of R-Curve Behavior of Non-Phase-Transforming Ceramics," *Eng. Frac. Mech.*, **31**(4), 683-701 (1987).
16. S.J. Bannison and B.R. Lawn, "Role of Interfacial Grain-Bridging Sliding Friction in the Crack-Resistance and Strength Properties of Nontransforming Ceramics," *Acta Metall. Mater.*, **37**(10), 2659-2671 (1989).
17. A.G. Evans, A.H. Heuer, and D.L. Porter, "The Fracture Toughness of Ceramics", pp. 529-56 in *Fracture*, Vol. 1, University of Waterloo Press, Ontario, Canada, 1977.
18. R. Ballarini, S.P. Sah, and L.M. Keer, "Crack Growth in Cement-Based Composites," *Eng. Fract. Mech.*, **20**(3), 433-445 (1984).
19. J.C. Hay and K.W. White, "Crack Face Bridging Mechanisms in Monolithic MgAl<sub>2</sub>O<sub>4</sub> Spinel Microstructures," *Acta Metall. Mater.*, **40**(11), 3017-3025 (1992).
20. G.I. Barenblatt, "The Mechanical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture," *Adv Appl Mech.*, **7**, 55-129 (1962).
21. M.V. Swain, "R-Curve Behavior in a Polycrystalline Alumina Material," *J. Mater. Sci. Lett.*, **5**(8), 1313-1315 (1986).
22. S.W. Freiman, D.R. Mulville, and P.W. Mast, "Crack Propagation Studies in Brittle Materials," *J. Mater. Sci.*, **8**, 1527-1533 (1973).
23. 류길열, 이성학, 손기선, "천자현미경형용 세라믹 시편 균열발생장치." 실용신안등록출원 제 25401호 (1992).
24. P. Chantikul, S.J. Bannison, and B.R. Lawn, "Role of Grain Size in the Strength and R-Curve Properties of Alumina," *J. Am Ceram. Soc.*, **73**(8), 2419-2427 (1990).
25. B.R. Lawn and T.R. Wilshaw, "Fracture of Brittle Solids", Cambridge University Press, London, U.K. (1976).
26. M. Avriel, "Nonlinear Programming," Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1988).