

일반곡선 좌표계 사용시 대류항의 차분스킴에 의한 영향 평가

이 연 원*

Evaluation of the Influence of a Convective Term Caused
by Various Finite Difference Schemes in General Curvature Coordinate

Y. W. Lee

Key words : Navier - Stokes equation(유체운동방정식), Finite difference schemes(유한차분 스킴), Nonstaggered grid system(비엇갈림격자계), Checker - board type pressure oscillation(장기판 무늬 형태의 압력진동)

Abstract

To develop the new simulator for the analysis of fluid flow information, the influence of various convective difference schemes were evaluated. General curvilinear coordinate system with nonorthogonal grids was adopted for the successful analysis of various complex geometries. Computation results show that if we can not obtain full grid numbers within available computational environment, we need to use higher order finite difference schemes to keep the prediction accuracy.

서 론

대부분 실제의 공학상의 문제는 3차원적 또는 복잡한 형상에 대해서 완전한 Navier - Stokes 방정식의 해를 필요로 한다. 그러나 3차원 Navier - Stokes 방정식의 해는 대용량의 계산기 및 대규모의 CPU 시간을 필요로 한다. 이용가능한 계산기의 용량과 타당한 CPU 시간은 2차원의 경우 별로 문제가 되지 않지만, 3차원 흐름장의 경우 고려의 대상이 된다. 따라서 보다 타당한 대체방법은 대류항에 대해서 보다 정확한 고차 차분스킴을 사용하

는 것이다. 보다 정확한 고차 風上差分스킴의 필요성은 Humphrey(1977)등의 종래의 계산결과로부터 명백하게 알려져왔다. 차분스킴의 영향에 대한 많은 연구는 주로 직각직교 좌표계에 대해서 행하여져 왔으나, 일반좌표계에 대한 검토는 충분치 않으며 특히 3차원의 경우는 예가 드물다.

본 논문에서는 두개의 고차스킴 즉 Leonard (1979)의 QUICK 스킴과 2차精度的 風上差分스킴 및 두개의 저차스킴 즉 Patankar(1980)의 Hybrid 스킴과 1차精度的 風上差分을 평가한다. 많은 흐름장에 대해서 QUICK스킴은 대규모의 격

* 정회원, 부산공업대학

자를 사용하지 않고서도 1차風上差分스킴 및 HYBRID스킴에 비교해서 정확한 결과를 준다.(예로서, Freitas등(1985), Yeo등(1991))

본 계산의 목적은 유동정보 해석을 위한 새로운 시뮬레이터 개발을 위해 전종속변수를 동일한 격자점에 정의하는 nonstaggered 격자계 일반곡선 좌표계에 고차차분스킴을 적용하는 手法를 개발, 평가하는 것이다. nonstaggered 격자계에서 발생하는 數値振動을 방지하기 위하여, 격자면의 flux를 계산할때 Peric(1988)이 사용한 특수한 운동량 補間法을 사용하였다. 평가를 위한 계산의 대상으로서는 2차원 계산으로서는 Fuchs & Tillmark (1985)의 polar cavity를, 3차원 계산으로서는 Humphrey등(1977)에 의해서 실험적으로 및 수치 계산적으로 연구되었던 정사각 단면을 가진 90도 곡관을 선택하였다. 후자의 계산결과와 실험결과와 타당한 일치를 보여주고 있지만, 그러나 곡관부 입구로부터 60도 및 90도 단면에서의 실험과 수치 계산의 차이는 반드시 작다고는 할수 없고, 그 원인에 대해서도 검토해 본다.

2. 기본방정식의 좌표변환

정상, 비압축성 흐름에 대한 지배방정식을 Cartesian 좌표계 형식으로 나타내면 다음과 같다.

연속방정식 :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \quad (1)$$

운동방정식(u_i) :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (2)$$

여기서, u_i는 평균속도, p는 압력, μ는 점성계수, ρ는 밀도이다.

Cartesian 좌표계의 방정식들을 비직교 일반곡선 좌표계에서의 변환은 일반적인 nonsingular 좌표 mapping(ξ, η, ζ) → (x, y, z)을 도입하고, 또 미분의 chain rule, $\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_m}$, 을 적용하면,

Cartesian 좌표계상의 방정식은 일반곡선 좌표계로 변환이 된다. 즉

$$\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_m}(\rho u_j) = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_m}(\rho u_j u_i) &= \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\mu \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \\ &+ \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\mu \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_n} \right) - \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \end{aligned} \quad (4)$$

이러한 방정식은 CRCLF(Chain Rule conservative Law Form)라고 불리워진다. 이 변환에 의해 metric 계수는 편미분의 바깥에 위치하게 되고 방정식계는 강한 보존계의 식이 되지않는다. 그러나 CRCLF 방정식에 변환 Jacobian determinant J를 곱하고, 또 기본적인 metric identity를 사용하면 강한 보존형으로 돌아온다.

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(J \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (6)$$

이므로 다음과 같은 식으로 된다(Aris, 1962).

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m}(\rho J U_m) = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_m}(\rho J U_m u_i) &= \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\mu J g_{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\mu J \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_n} \right) - J \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial \xi_m} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, U_m=u_j ∂ξ_m/∂x_j는 反變速度이고, g_{mn}=∂ξ_m/∂x_j ∂ξ_m/∂x_j는 反變 metric tensor이다.

3. 수치계산

3.1 staggered격자 및 non-staggered격자

일반적으로 종래의 수치계산은 checker-board 형태의 압력진동을 막기 위해서, staggered격자계가 주로 사용되어져 왔다. 직각직교좌표계에서는 경계면의 반직분 격자의 생략으로 인하여 운동방

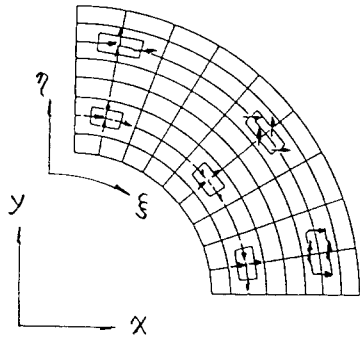


Fig. 1 Comparison of Grid System.

정식의 이산화식에는 경계면의 압력이 나타나지 않고 또 경계면에 수직한 속도성분은 일반적으로 이미 알고 있으므로 체로구배의 경계조건이 적용 가능하고 explicit한 경계압력이 필요치 않는 등의 이점이 많다. 그러나 일반좌표계를 도입하면, Fig. 1에서 보여지는 것처럼 위에서 설명한 이점이 줄어들는다. 즉, ξ, η 가 x, y 와 직교할때, 적분체적면의 속도는 면을 가로지르는 질량유속과의 관련성이 없어져, 속도좌우의 압력은 그속도를 驅動하지 않는다. 일반적인 非直交格子를 사용하는 有限體積法에서는 Cartesian 속도성분을 사용한 non-staggered 격자배열이 다른 가능성(예로서, Cartesian 속도성분을 사용한 staggered 격자배열 혹은 反變속도성분을 사용한 격자배열) 보다 이점이 많다(Rodi, 1988).

3.2 유한체적법에 의한 이산화

연속식, 운동방정식 등을 이산화하기 위하여 일반화된 형식으로 바꾸면, 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(C^m \phi - D^m \frac{\partial \phi}{\partial \xi_m} \right) = JS_\phi \quad (9)$$

각항의 상세에 대해서는 Table 1과 같다. C^m, D^m 은 각각 계산격자 면에서의 대류 및 확산 flux이다. 유한체적법에 의한 이산화는 이산화를 위해 방정식을 그림과 같은 유한개의 검사체적(이하, 격자라함)에 대해서 적분한다. Gauss정리를 이용하면 격자에 대해서 방정식의 체적적분이 면적분으로 변환되어, flux balance를 나타내는 미분방정식이

Table 1 Contributing Terms for the Generalized Equation(9)

ϕ	C^m	D^m	$S\phi$
1	$\rho J U_m$	0	0
u_i	$\rho J U_m$	$\nu_{eff} J g_{mm}$	$+ J^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\nu_{eff} J g_{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right)_{m,n}$ $+ J^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\mu J \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \right)$ $-\frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial \xi_m}$

유도된다. 이것을 위의 수송방정식의 좌변의 체적적분시 적용하면 6개면의 면적분으로 변환되어 다음과 같이 된다.

$$I_e - I_w + I_n - I_s + I_t - I_b = \int_{\Delta V} JS_\phi dV \quad (10)$$

여기서, I_e 는 면 e를 가로지르는 전 flux이다. 각면의 flux는 대류에 의한 기여분 I와 확산에 의한 기여분 I^d로 구성되어진다. 위식은 어떠한 가정도 필요없이 (9)식의 미분식의 차분표현을 나타낸다. 위식의 각항의 수치적 평가는 계산격자에 관한 기하학적인 요소의 계산과 격자점으로부터 격자면의 값을 보간하기 위해서 이산화 스킴의 도입이 필요하다. 상세한 부분은 여러문헌을 통해 알려져 있으므로 생략한다.

계산격자의 생성은 Eiseman(1985)의 stretching함수를 사용하여 대수적으로 생성하였다.

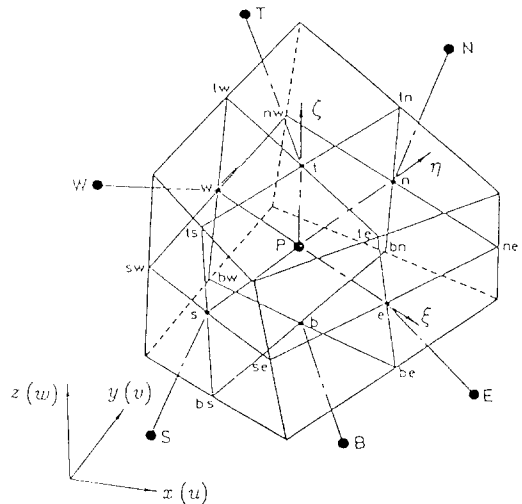


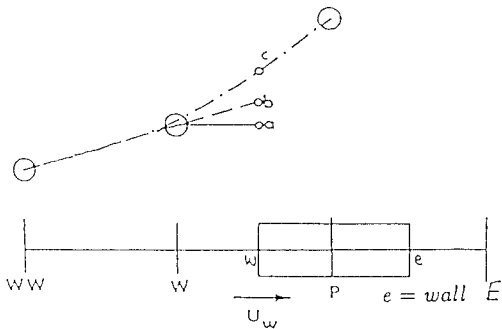
Fig. 2 Three Dimensional Control Volume.

3.2 대류항의 차분스킴

대류항의 차분스킴에 대해서는 Fig. 3을 이용하여 간단히 설명한다.

$$\int_b^c \int_s^t \int_r^m \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho J U \phi) d\xi d\eta d\zeta = [(\rho J U \phi)_r - (\rho J U \phi)_w] \Delta \eta \Delta \zeta \quad (11)$$

反變속도 U 를 구하기 위해서 Peric 특수한 운동량 보간이 사용되어졌다. 1차 풍상차분은 $\phi_w = \phi_W$ 가 된다. 이것은 ϕ_w 의 값으로서 상류측의 값을 그대로 사용하는 것을 의미한다. Hybrid 스킴은 Peclet수 ($P_{ew} = \rho U_w \Delta \xi / \Gamma_w$)가 1이하의 경우 대류항을 중심차분으로 하고, P_e 수가 2이상이면, 1차 풍상차분으로 전환하고 확산항은 무시하는 스킴이다. 2차 풍상차분은 상류측 2개의 격자점의 값을 이용하여, 선형적으로 보간치를 결정하는 방법이다. 즉 $\phi_w = C_{s1} + C_{s2}\xi$ 와 같이 된다. 또 QUICK 스킴의 경우는 2개의 상류측 격자점값과 1개의 하류측 격자점값을 연결하는 이차곡선상의 값으로 결정되며 $\phi_w = C_{q1} + C_{q2}\xi + C_{q3}\xi^2$ 과 같이 된다. 여



- 1st Order Upwinding

$$\phi_w = \begin{cases} \phi_w & U_w \geq 0 \\ \phi_p & U_w \leq 0 \end{cases}$$
- 2nd Order Upwinding

$$\phi_w = \begin{cases} \phi_w + S_w; S_w = 0.5(\phi_w - \phi_{WW}) & U_w \geq 0 \\ \phi_p + S_w; S_w = 0.5(\phi_p - \phi_E) & U_w \leq 0 \end{cases}$$
- QUICK

$$\phi_w = \begin{cases} \phi_w + S_w; S_w = \frac{1}{8}(3\phi_p - 2\phi_w - \phi_{WW}) & U_w \geq 0 \\ \phi_p + S_w; S_w = \frac{1}{8}(3\phi_w - 2\phi_p - \phi_E) & U_w \leq 0 \end{cases}$$

Fig. 3 Discretization Schemes. (a) 1st Upwinding Scheme. (b) 2nd Upwinding Scheme. (c) QUICK.(from ref. YeO(1991))

기서 C_1 등은 기하학적으로 정해진다.

3.3 경계조건

경계조건으로서는 polar cavity의 경우는 고체 벽으로 둘러싸여져 있으므로 점착조건을 사용한다. 그러나 경계면상의 미분은 2차 精度를 얻기 위해 Taylor 級數展開에 의한 다음식을 사용한다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi}|_e = -\frac{1}{3\Delta x} (9\phi_p - \phi_w - 8\phi_{wall}) + \Theta(\Delta x^2) \quad (12)$$

90도곡관의 경우, 입구에서는 수치적으로 발달시킨 값을, 출구에서는 흐름이 완전히 발달하였고 가정하여 흐름방향의 구배가 제로인 경계조건을 적용하였다. 또한, 대칭면에서는 u, v 에 대해서는 구배제로, w 에 대해서는 제로의 경계조건을 사용하였다. 고체벽에서는 polar cavity의 경우와 동일하다.

4. 계산결과 및 고찰

4.1 Polar cavity

Fig. 4는 polar cavity의 계산영역과 Reynolds 수 350, 격자수 40×40 일때의 수치계산결과의 벡터선도이다. polar cavity 내부에 둘러싸여져 있는 유체는 내부 실린더를 등각속도로 회전시키는 것에 의해서 운동이 시작된다. 흐름의 특성은 정방형 cavity와 유사하고 중심부에 큰渦가 발생하는 반면, C, D의 각 코너에서는 중심과 반대방향의 2

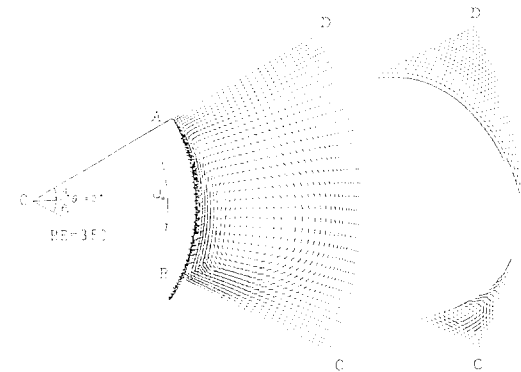


Fig. 4 Flow Pattern in a Polar Cavity.(O A=AB=BC=0.0475m, $\theta_0=0.5$ radian)

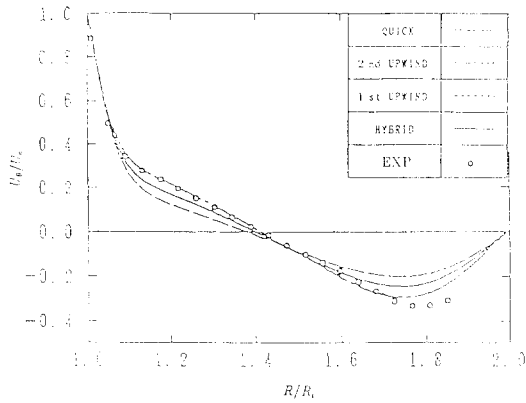


Fig. 5 Velocity Distributions Concerning Various Discretization Schemes at $\theta=0$ Degree Position.

차渦가 생성된다. 이것은 Fuchs & Tillmark(1985)의 실험결과와도 잘 일치한다. Fig. 5은 4종류의 차분스킴에 대한 $\theta=0$ 의 단면에서의 속도분포의 계산결과이다. QUICK 스킴과 2차의 風上差分 스킴과 비교해서, 1차정도의 HYBRID 스킴과 1차 風上差分 스킴은 실험결과와 차가 큰것으로 나타났다. QUICK 스킴의 결과에서도 완전한 일치가 얻어지지 않았던 것은 Fuchs & Tillmark(1985)가 지적했던 것처럼 실험장치의 3차원성에 기인하는 것으로 생각된다.

4.2 90도 곡관의 층류계산

Fig. 6은 90도 곡관의 계산영역과 격자계를 나

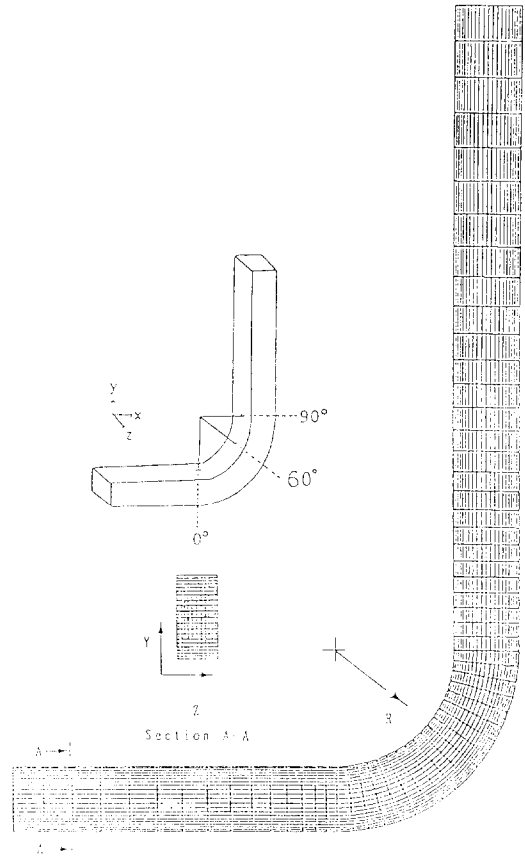


Fig. 6 Grid and Coordinate Systems in a Square Duct.

타낸다. Yeo et al(1991)는 $61 \times 21 \times 17$ 정도의 격자에서는 거의 격자의존성이 나타나지 않는다고 보고하고 있다. 이런 종류의 3차원, 대류 지배적 흐

Table 2. Previous Studies in a Square Duct of Strong Curvature.

Author	Discretization scheme et al.	Des.
Humphrey, H.A. et al.	Re= 790, De=368, Grid : $60 \times 15 \times 10$ Cal. Domain : 10d ~ +10d, Hybrid Scheme	JFM (1977)
Yanka, S.P.	Re= 790, De=368, Grid : $58 \times 15 \times 11$ Cal. Domain : 5d ~ +10d, Hybrid Scheme	AIAA J. (1985)
Kajishima, T et al.	Re=200, De=141, Grid : $161 \times 20 \times 10$ Cal. Domain : 10d ~ +50d, Central Diff.	JSME (1985)
Yamada, H. et al.	Re=790, De=368, Grid : $89 \times 20 \times 15$ Cal. Domain : ?, Power Law Scheme	CFD Sym. (1990)
Yeo, R.W. et al.	Re=790, De=368, Grid : $40 \times 17 \times 11, 61 \times 23 \times 17, 70 \times 25 \times 19$ Cal. domain : 5d ~ +10d, QUICK Scheme et al.	T. ASME (1991)
Present	Re=790, De=368, Grid : $62 \times 22 \times 14$ Cal. Domain : 5d ~ +10d, QUICK Scheme et al	

름장의 계산에서는 격자의존성을 충분히 작게 하는 것이 어렵다. Table 2는 90도 곡관의 계산에 관한 최근의 연구논문을 정리한 것이다. 충분히 발달한 곡관에서는 평균적으로는 외향 방향의 遠心力에 대항해서, 외측에서 높고 내측에서 낮은 압력구배가 생겨서 균형을 이루지만, 주류속도분포에 따라서 遠心力에도 분포가 생기므로 인하여 이차흐름이 발생한다.

Kajishima(1985)등은 風上差分에 의한 數値粘性성을 없애기 위하여 中心差分을 사용하고 있지만, 실험결과와의 비교는 되어있지 않다. 일반적으로 中心差分은 高 Reynolds수 흐름에서는 계산의 收斂에 대한 문제점이 지적되어져 있다. Yamada(1990)등은 Patankar의 멱승법칙(power law scheme)을 사용하여 Humphrey(1977)등의 계산 및 본계산의 1차精度的 계산결과와 거의 일치하는

계산결과를 얻고있다. Fig. 7은 遠心力과 반경방향의 압력구배의 差에 의한 2차흐름의 모양형태에 측정결과를 비교하고 있다. 1차精度的 결과는 하나의 큰渦를 生成하고 있는데 비해, 2차精度的 계산은 두개의渦를 生成하고 있다. 이와같은 차이는 흐름방향의 속도분포에도 크게 영향을 미친다. Fig. 8은 $z=0.0, 0.25$ 각각의 위치에서의 60 및 90도 단면에서의 흐름방향의 속도분포의 계산결과와 실험치를 나타내고 있다. QUICK 스킴 및 2차정도 風上差分의 경우가 HYBRID 스킴 및 1차風上差分보다 실험치와 비교해서 비교적 예측오차가 작다고 생각되어진다. 그러나 고차차분스킴을 사용한 계산결과에서도 실험과의 差는 반드시 작지

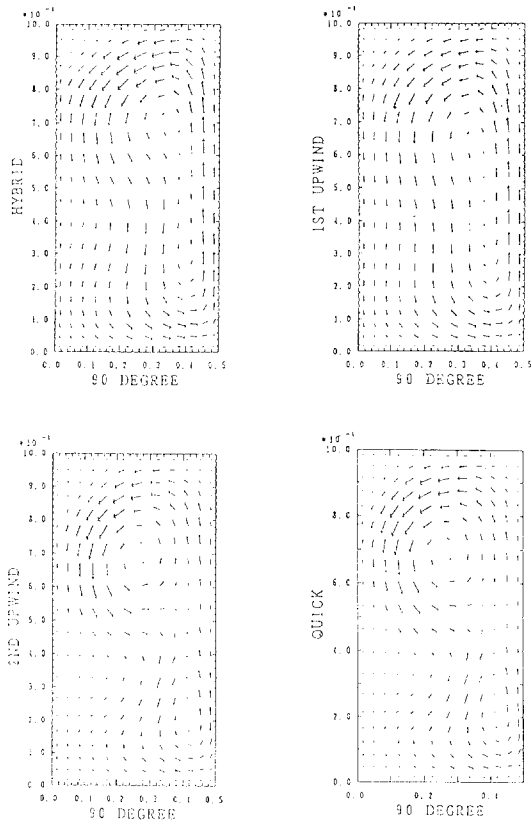


Fig. 7 Secondary Flow Patterns in a Square Duct at $\theta=90$ Degree Sections. (a) Hybrid, (b) 1st Upwind, (c) 2nd Upwind, (d) QUICK

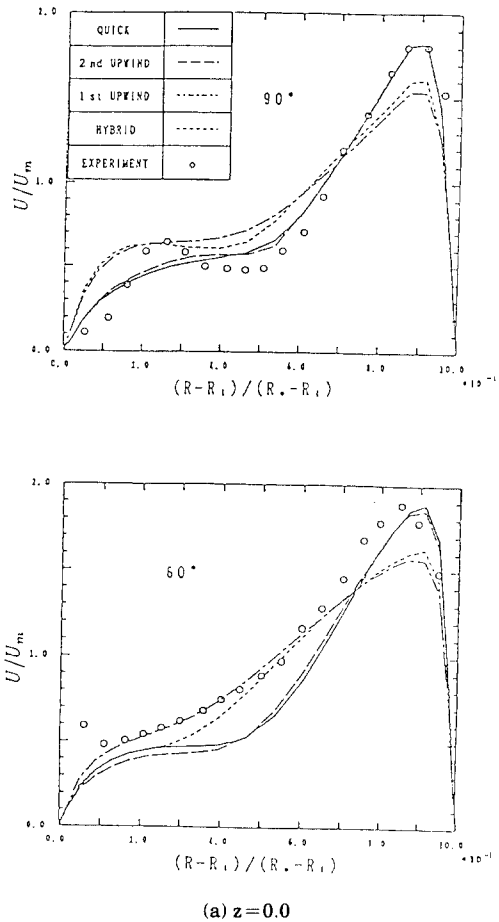


Fig. 8 Comparison of Velocities in a Square Duct of Strong Curvature.

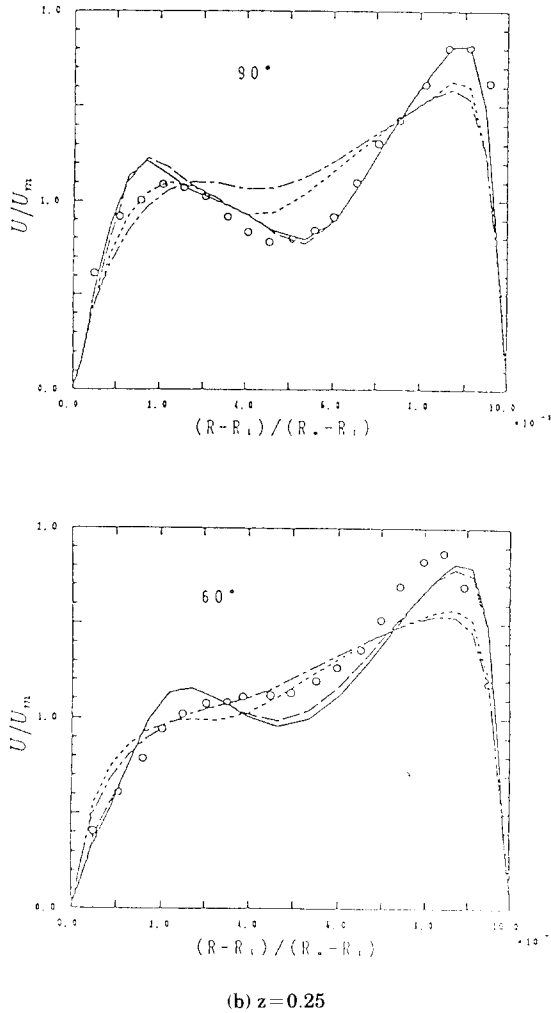


Fig. 8 Comparison of Velocities in a Square Duct of Strong Curvature.

는 않다. 이것은 격자의 수, 그 배치 혹은 수치점성의 문제 또는 Kajiyama 등의 계산에서도 지적되었듯이 上下流側の 직관부의 길이가 충분하지는 않다는 등의 문제에 起因한다고 생각되어진다. 최적의 격자수 및 그 배치탐색 및 계산의 收斂性에 관해서는 今後の 課題이다.

결론

비직교 격자계의 일반좌표계에 고차차분스킴을

적용하는 手法을 두개의 계산대상에 적용하여, 그 계산 정도등을 검토하였다. 고차차분스킴을 사용함으로써 종래의 저차수의 차분스킴보다 비교적 실험치에 가까운 예측이 가능하게 되었다. 이용 가능한 계산기의 범위에서 충분한 격자가 얻어질 수 없는 경우, 특히 3차원 흐름장의 경우에는 타당한 계산결과를 얻기 위해서는 고차차분 스킴을 사용하여 예측 정도를 보전할 필요가 있다.

참고문헌

- 1) Aris, R., Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics, Prentic - Hall, Inc. (1962).
- 2) Freitas, C. J. et al., Numerical Simulation of Three - Dimensional Flow in a Cavity, Int. J. Num. Meths. Fluids, Vol. 5, pp. 561 ~ 575(1985).
- 3) Eiseman, P. R. Alternative Direction Adaptive Grid Generation, AIAA J., Vol. 23, pp. 551 ~ 560 (1985).
- 4) Fuchs, L. and Tilmark, N. Numerical and Experimental Study of Driven Flow in a Polar Cavity, Int. J. Num. Meths. Fluids, Vol.5, pp.311 - 329 (1985).
- 5) Han, T. et al., A Comparison of Hybrid and Quadratic Upstream Differencing in High Reynolds Number Elliptic Flows, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 29, pp. 81 ~ 95(1981).
- 6) Humphrey, J.A.C., et al., Laminar Flow in a Square Duct of Strong Curvature, J. Fluid Mech., Vol. 83, part 3, pp. 509 ~ 527(1977).
- 7) Leschziner, M. A., Practical Evaluation of Three Finite Difference Schemes for the Computation of Steady State Recirculation Flows, Comp. Meth. Appl. Meth. Eng. Vol. 23, pp. 293 ~ 312 (1980).
- 8) Leonard, B. P. A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, Comp. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 19, pp. 59 ~ 98(1979).
- 9) Peric, M., et al., Comparison of Finite Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids, Computers and Fluids, Vol. 16, pp. 389 ~ 403(1988).

- 10) Rodi, W., *Finite Volume Methods for Incompressible Flows with Complex Geometries*, 12th NST Open Seminar, Institute of Industrial science, The University of Tokyo, (1988).
- 11) Yeo, R. W., et al., *A Numerical Study of Laminar 90 - Degree Bend Duct Flow with Different Discretization Schemes*, *J. Fluids Eng.*, Vol. 113, pp. 563 - 568(1991).