

다관절 보의 진동해석 알고리즘의 개발에 관한 연구

문덕홍* · 여동준** · 최명수*

On Development of Vibration Analysis Algorithm of Beam with Multi - Joints

D. H. Moon · D. J. Yeo · M. S. Choi

Key words : Transfer influence coefficient method(전달영향계수법), Transfer matrix method(전달매트릭스법), Free vibration(자유진동), Coupled Cibration(연성 진동), Multi - joints beam(다관절 보)

Abstract

The authors apply the transfer influence coefficient method to the 3-dimensional vibration analysis of beam with multi-joints and formulate a general algorithm to analysis the longitudinal, flexural and torsional coupled free vibration.

In this paper, the structure, which is mainly founded in the robot arms, cranes and so on, has some crooked parts, subsystems and joints but has no closed loop in this system. It is modeled as the beam of a distributed mass system with massless translational, rotational and torsional springs in each node, and joint elements of release or roll at which node the displacement vector is discontinuous.

The superiority of the present method to the transfer matrix method in the computation accuracy was confirmed by the numerical computation results. Moreover, we confirmed that boundary and intermediate conditions could be controlled by varying the values of the spring constants.

1. 서 론

저자들은 개인용 컴퓨터 이용에 적합한, 고속 고정도의 구조해석 기법을 개발할 목적으로, 전달영향계수법이라는 새로운 진동해석 기법을 제안해

서, 직선상 구조물, 판 구조물 등 여러 형상의 구조물을 대상으로, 자유진동 해석에 적용해 본 결과, 종래의 전달매트릭스법에 비해 계산 정도 및 계산 속도의 양면에서 우수함을 보고한 바 있다^{1)~8)}.

본 연구에서는 로봇암, 크레인, 공장 자동화기

* 정회원, 부산수산대학교 공과대학

** 정회원, 여수수산대학교

기, 자동차의 동력 전달장치 등 공학적으로 중요한 구조물에 많이 나타나는 다관절 보, 즉 중간 연결부가 릴리스(release) 및 롤(roll)의 관절 요소와 분지계 및 굴곡부를 갖는 구조물을 해석 대상계로 설정하고, 이에 대해 전달영향계수법을 적용해서 3차원 진동해석 알고리즘을 정식화 한다.

해석 대상계를 적절히 모델링하고 전달영향계수법과 전달매트릭스법⁹⁾을 적용해서 종·굽힘·비틀림 연성 자유진동을 해석하기 위한 알고리즘을 정식화 한후, 간단한 수치 계산 모델을 통해서, 수치실험을 수행하고, 두 방법의 알고리즘에 의한 결과를 비교·검토하여, 본 연구의 해석기법의 유효성 및 실용성을 제시하고자 한다.

2. 전달영향계수법에 의한 해석 알고리즘

2.1. 해석 대상계의 모델링

해석 알고리즘의 정식화에 있어서 다음과 같은 가정을 한다.

(1) 해석 대상계는, Fig. 1과 같이, 하나의 주계(main system)에 다수의 분지계(subsystem)가 결합되어 있으나, 폐루프(closed loop)를 형성하지 않는다.

(2) 모든 굴곡점, 분지계와의 결합점, 기초 지지점 및 중간 연결점(변위벡터의 불연속점)은 절점(node)이 되고, 절점에서는 반드시 분할한다.

(3) 분지계 자체도 또 다른 분지계나 굴곡부를 가질 수 있고, 분할 방법은 주계와 동일하다.

(4) 주계와 분지계에서 절점 사이의 부재를 각각 주부재와 분지부재라 부르고, 일정한 분포 질량을

갖는 보로 간주한다.

(5) 주계의 양쪽 끝과 분지계의 주계와 결합되어 있지 않는 반대쪽 끝 그리고 관절의 외부질량에는 서로 직교하는 세개의 병진(전단) 스프링, 두개의 회전 스프링 및 하나의 비틀림 스프링으로 기초에 지지되어 있다.

(6) 주계와 분지계 사이의 결합점과 굴곡점은 릴리스나 롤과 같은 관절 요소로 간주한다.

(7) 관절에서는 내부 질량과 외부 질량이 각각 좌우측의 보에 단단히 결합되어 있고, 내부 질량과 외부 질량 사이에는 서로 직교하는 세개의 병진(전단) 스프링, 두개의 회전 스프링 및 하나의 비틀림 스프링으로 연결된다.

주계는 가정(2)에 따라 n 개의 주부재로 분할된다. 즉, Fig. 1에서 각각의 분할점을 좌단에서부터 우단으로 순서대로 절점 0, 1, 2, ..., n 이라 한다. 임의의 절점 i 에서 절점 0과 절점 n 을 향하는 쪽을 각각 절점 i 의 좌측 및 우측이라 하고, 분지계에서는 주계와 결합되어있지 않는 쪽의 끝을 좌단, 결합되어있는 쪽의 끝을 우단이라 한다.

또한, 본 연구에서는 변위벡터 \mathbf{d} , 힘벡터 \mathbf{f} , 동적영향계수 매트릭스 \mathbf{T} 위에 사용한 기호 및 상하 첨자에 따라 다음과 같이 구별해서 사용하고 있다.

(1) 「-」의 유무 : 절점의 좌우측의 물리량을 나타낸다.

(2) 「^」와 「v」 : 관절 요소에서 절점의 중간 좌우측의 물리량을 나타낸다.

(3) 「~」 : 분지계에 관한 물리량을 나타낸다.

(4) 「*」 : 주계에 직접 결합하고 있는 분지계의 물리량을 분지부재 좌표계로 나타낸다.

(5) 상첨자 i 는 i 번째 기본 요소인 주부재에 축을 일치시킨 직교좌표계로 표시한 물리량을 나타낸다.

(6) 하첨자 i 는 절점 i 를 뜻하거나, i 번째 주부재 및 분지계에 관한 물리량을 나타낸다.

2.2. 동적영향계수 매트릭스

Fig. 2는 전달영향계수법을 적용할 경우의 기본개념도를 나타낸다. 즉, Fig. 2 (a)의 ①은 주계의 좌단에서 임의의 절점 $i-1$ 의 우측까지의 구조물을 나타내고, 이 우단에 주부재, 분지부재, 기초 지

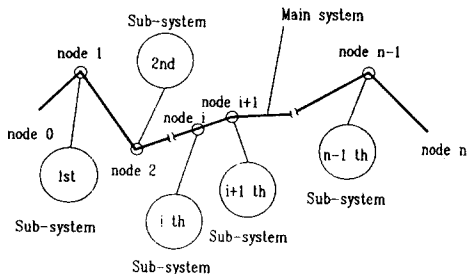
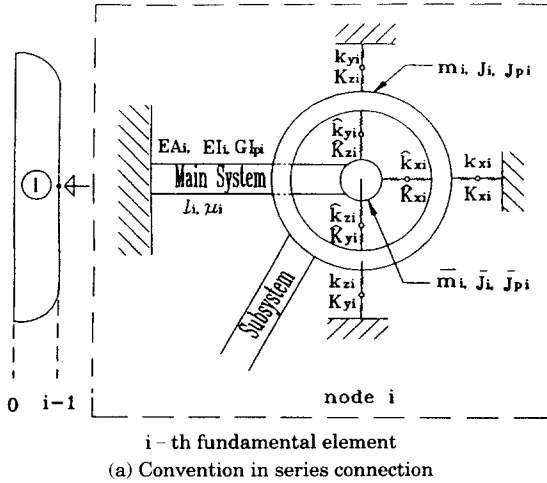
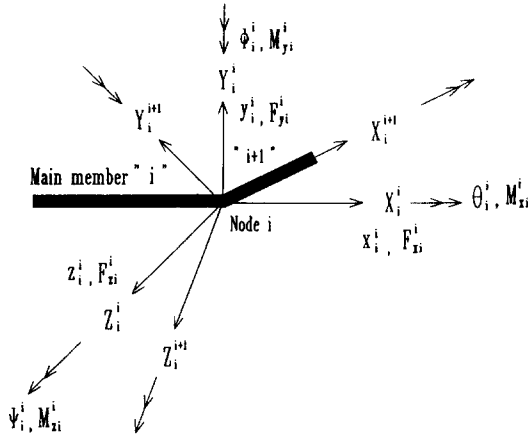


Fig. 1 Analytical model



(a) Convention in series connection



(b) Definition of positive direction of state variables

Fig. 2 Fundamental concept of the transfer influence coefficient method

지부, 굴곡부 및 관절 요소로 구성된 i 번째 기본 요소를 단단하게 결합시킨다. 관절 요소내의 내부 질량 \bar{m}_i 과 외부 질량 m_i 사이에는 x, y, z 축방향의 병진 스프링 $\bar{k}_{xi}, \bar{k}_{yi}, \bar{k}_{zi}$ 와 y, z 축 주위의 회전 스프링 $\bar{K}_{yi}, \bar{K}_{zi}$ 및 비틀림 스프링 \bar{K}_{xi} 로 구성되어 있고, 외부 질량과 기초 사이에도 병진, 회전 및 비틀림 스프링(k_{xi}, k_{yi}, k_{zi} 및 K_{xi}, K_{yi}, K_{zi})이 존재한다. 또 \bar{J}_i, \bar{J}_{pi} 및 J_i, J_{pi} 는 각각 관절 내외부의 관성 모멘트와 극관성 모멘트를 나타낸다. Fig. 2(b)는 각 부재 좌표계로 표시한 절점 i 의 상태변수, 즉, X 축방향, Y 축방향, Z 축방향 변위 (x, y, z), X 축둘레, Y 축둘레, Z 축둘레 각변위 (θ, ϕ, ψ), X 축방향, Y 축방향,

Z 축방향 전단력 (f_x, f_y, f_z) $_i$ 및 X 축둘레, Y 축둘레, Z 축둘레 모멘트 (M_x, M_y, M_z) $_i$ 의 정방향향을 나타낸다.

임의의 절점 i 에서 변위벡터 $\bar{\mathbf{d}}_i^i = (x, \theta, y, \psi, z, \phi)$ $_i$ 와 힘벡터 $\bar{\mathbf{f}}_i^i = (f_x, M_x, f_y, M_y, f_z, M_z)$ $_i$ 사이의 관계는 각각 다음 식으로 정의된다.

$$\bar{\mathbf{d}}_i^i = \bar{\mathbf{T}}_i^i \bar{\mathbf{f}}_i^i, \quad \bar{\mathbf{T}}_i^i = {}^t \bar{\mathbf{T}}_i^i \quad (1)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_i^i = \hat{\mathbf{T}}_i^i \hat{\mathbf{f}}_i^i, \quad \hat{\mathbf{T}}_i^i = {}^t \hat{\mathbf{T}}_i^i \quad (2)$$

$$\check{\mathbf{d}}_i^i = \check{\mathbf{T}}_i^i \check{\mathbf{f}}_i^i, \quad \check{\mathbf{T}}_i^i = {}^t \check{\mathbf{T}}_i^i \quad (3)$$

$$\mathbf{d}_i^i = \mathbf{T}_i^i \mathbf{f}_i^i, \quad \mathbf{T}_i^i = {}^t \mathbf{T}_i^i \quad (4)$$

$$\mathbf{d}_i^{i+1} = \mathbf{T}_i^{i+1} \mathbf{f}_i^{i+1}, \quad \mathbf{T}_i^{i+1} = {}^t \mathbf{T}_i^{i+1} \quad (5)$$

여기서, $\bar{\mathbf{T}}_i^i, \hat{\mathbf{T}}_i^i, \check{\mathbf{T}}_i^i, \mathbf{T}_i^i$ 는 주부재 i 의 좌표를 기준으로 절점 i 의 좌측, 중간 좌측, 중간 우측, 우측의 동적영향계수 매트릭스를 나타내고, \mathbf{T}_i^{i+1} 는 부재 $i+1$ 의 좌표를 기준으로 절점 i 의 우측의 동적영향계수 매트릭스를 나타내며, 이들은 모두 6×6 의 대칭 매트릭스⁵⁾이다.

2. 3. 동적영향계수 매트릭스의 전달

동적영향계수 매트릭스의 필드 전달식은 종래의 전달매트릭스법⁶⁾에서 사용되는 필드 전달 매트릭스를 변형시켜 유도한다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_i^i = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_{i-1} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_i^i = \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{D} & -{}^t \mathbf{B} \\ -{}^t \mathbf{C} & {}^t \mathbf{A} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{bmatrix}_i^i \quad (7)$$

여기서, $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$ 및 \mathbf{D}_i 는 일정한 등분포 질량을 갖는 보 요소의 부분 매트릭스(6×6)이며, 이들 요소가 오일러 보(Euler beam)인 경우 다음식으로 주어진다.

$$\mathbf{A}_i = \text{Diag}(\cos \gamma, \cos \beta_T, \mathbf{A}', \mathbf{A}')$$

$$\mathbf{B}_i = \text{Diag}(l \sin \gamma / (\gamma EA), l \sin \beta_T / \beta_T GI_p,$$

$$\mathbf{B}', \mathbf{B}')$$

$$\mathbf{C}_i = \text{Diag}(-\mu l \omega^2 \sin \gamma / \gamma, -\mu l i_x^2 \omega^2 \sin \beta_T / \beta_T,$$

$$\mathbf{C}', \mathbf{C}')$$

$$\mathbf{D}_i = \text{Diag}(\cos \gamma, \cos \beta_T, \mathbf{D}', \mathbf{D}')$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_i &= \begin{bmatrix} C_0 & lC_1 \\ \beta^4 C_3/l & C_0 \end{bmatrix}_i \\ \mathbf{B}'_i &= \begin{bmatrix} -alC_3 & aC_2 \\ -aC_2 & aC_1/l \end{bmatrix}_i \\ \mathbf{C}'_i &= \begin{bmatrix} -\beta^4 C_1/al & -\beta^4 C_2/a \\ \beta^4 C_2/a & \beta^4 lC_3/a \end{bmatrix}_i \\ \mathbf{D}'_i &= \begin{bmatrix} C_0 & -\beta^4 C_3/l \\ -lC_1 & C_0 \end{bmatrix}_i \\ C_0 &= (\cosh\beta + \cos\beta)/2, \quad C_1 = (\sinh\beta + \sin\beta)/2\beta \\ C_2 &= (\cosh\beta - \cos\beta)/2\beta^2, \quad C_3 = (\sinh\beta - \sin\beta)/2\beta^3 \\ a &= l^2/EI, \beta^4 = \mu\omega^2 l^4/EI, \gamma = l\omega(\mu/EI)^{1/2} \\ i_x^2 &= I_p/A, \beta_T = l\omega(\mu i_x^2/GI_p)^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $(EA)_i, (EI)_i, (GI_p)_i, \mu_i$ 및 l_i 는 i 번째의 주부재의 종강성, 굽힘 강성, 비틀림 강성, 선밀도 및 길이이고, ω 는 고유 각진동수이다. 한편, 보 요소를 티모센코 보(Timoshenko beam)로 간주할 경우에는 상기의 부분 매트릭스의 요소가 다른 것을 제외하고는 알고리즘이 완전히 일치한다⁹⁾.

우선 절점 $i-1$ 의 우측과 절점 i 의 좌측간의 동적영향계수 매트릭스의 전달식은 식 (1), (5), (7)로부터,

$$\mathbf{U}'_i \bar{\mathbf{T}}_i = \mathbf{H}_i \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}'_i &= \mathbf{T}'_{i-1} \mathbf{C}_i + {}^i \mathbf{D}_i \\ \mathbf{H}_i &= \mathbf{T}'_{i-1} \mathbf{A}_i + {}^i \mathbf{B}_i \end{aligned} \quad (10)$$

가 된다.

절점 i 의 좌측과 절점 i 의 중간 좌측간의 힘의 평형관계로부터,

$$\hat{\mathbf{f}}_i = \bar{\mathbf{f}}_i + \bar{\mathbf{P}}_i \bar{\mathbf{d}}_i \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_i &= \text{Diag}(-\bar{m}\omega^2, -\bar{J}_p\omega^2, -\bar{m}\omega^2, -\bar{J}\omega^2, \\ &\quad -\bar{m}\omega^2, -\bar{J}\omega^2)_i \end{aligned} \quad (12)$$

따라서, 절점 i 의 좌측과 중간 좌측간의 동적영향계수 매트릭스의 전달식은 식(1), (2), (11)로부터,

$$\bar{\mathbf{U}}_i \hat{\mathbf{T}}_i = \bar{\mathbf{T}}_i \quad (13)$$

여기서,

$$\bar{\mathbf{U}}_i = \mathbf{I}_6 + \bar{\mathbf{T}}_i \bar{\mathbf{P}}_i \quad (14)$$

이고, \mathbf{I}_6 는 6×6 의 단위 매트릭스이다. 계산량을 줄이기 위해 식(9)와 (13)을 통합해서 절점 $i-1$ 의 우측과 절점 i 의 중간 좌측간의 동적영향계수 매트릭스의 필드 전달식을 구하면,

$$\bar{\mathbf{G}}_i \hat{\mathbf{T}}_i = \mathbf{H}_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-1) \quad (15)$$

여기서,

$$\bar{\mathbf{G}}_i = \mathbf{U}'_i + \mathbf{H}_i \bar{\mathbf{P}}_i \quad (16)$$

가 된다.

절점 i 의 중간 좌우측간의 힘의 평형관계로부터,

$$\hat{\mathbf{f}}_i = \hat{\mathbf{f}}_i - \hat{\mathbf{P}}_i (\hat{\mathbf{d}}_i - \hat{\mathbf{d}}_i) \quad (17)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}_i &= \hat{\mathbf{d}}_i = \hat{\mathbf{d}}_i = \hat{\mathbf{d}}_i \\ \hat{\mathbf{P}}_i &= \text{Diag}(\hat{k}_x, \hat{K}_x, \hat{k}_y, \hat{K}_y, \hat{k}_z, \hat{K}_z)_i \end{aligned} \quad (18)$$

절점 i 의 중간 좌측과 절점 i 의 중간 우측간의 동적영향계수 매트릭스의 전달식은 식(2), (3), (17)로부터,

$$\hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{T}}_i = \hat{\mathbf{U}}_i \quad (19)$$

여기서,

$$\hat{\mathbf{U}}_i = \mathbf{I}_6 + \hat{\mathbf{P}}_i \hat{\mathbf{T}}_i \quad (20)$$

그리고, 절점 i 의 중간 우측과 절점 i 의 우측간의 힘의 평형관계로부터,

$$\hat{\mathbf{f}}_i = \hat{\mathbf{f}}_i + (\hat{\mathbf{P}}_i + \hat{\mathbf{P}}_i) \hat{\mathbf{d}}_i \quad (21)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_i &= \text{Diag}(k_x - m\omega^2, K_x - J_p\omega^2, k_y - m\omega^2, \\ &\quad K_y - J\omega^2, k_z - m\omega^2, K_z - J\omega^2)_i \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_i^j = (\tilde{\mathbf{T}}_i^j)^{-1} = {}^t \mathbf{R}(\tilde{\alpha}_a, \tilde{\alpha}_b, \tilde{\alpha}_c)_i (\tilde{\mathbf{T}}_i^j)^{-1} \mathbf{R}(\tilde{\alpha}_a, \tilde{\alpha}_b, \tilde{\alpha}_c)_i \quad (22)$$

$\tilde{\mathbf{P}}_i^j$ 는 분지부재 전체를 등가 스프링계로 간주한 강성 매트릭스이고, $(\tilde{\alpha}_a, \tilde{\alpha}_b, \tilde{\alpha}_c)_i$ 는 분지부재 좌표계를 i 번째 주부재 좌표계로 일치시키기 위한 오일러 각이다.

또, 절점 i 중간 우측과 절점 i 의 우측간의 동적 영향계수 매트릭스의 전달식은 식(3), (4), (21)로부터,

$$\mathbf{U}_i^j \mathbf{T}_i^j = \tilde{\mathbf{T}}_i^j \quad (23)$$

여기서,

$$\mathbf{U}_i^j = \mathbf{I}_6 + \mathbf{T}_i^j (\mathbf{P}_i^j + \tilde{\mathbf{P}}_i^j) \quad (24)$$

식(19)와 (23)을 통합해서, 절점 i 의 중간 좌측과 절점 i 의 우측간의 동적영향계수 매트릭스의 포인트 전달식을 구하면,

$$\hat{\mathbf{G}}_i^j \mathbf{T}_i^j = \hat{\mathbf{U}}_i^j \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (25)$$

여기서,

$$\hat{\mathbf{G}}_i^j = \hat{\mathbf{P}}_i^j + \hat{\mathbf{U}}_i^j (\hat{\mathbf{P}}_i^j + \tilde{\mathbf{P}}_i^j) \quad (26)$$

좌표변환은 일반적으로 사용되는 오일러 각¹⁰⁾을 사용한다. 여기서 오일러 각 $(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)$ 의 정방향을 Fig. 3처럼 정하고, 이것을 사용해서 그림 중의

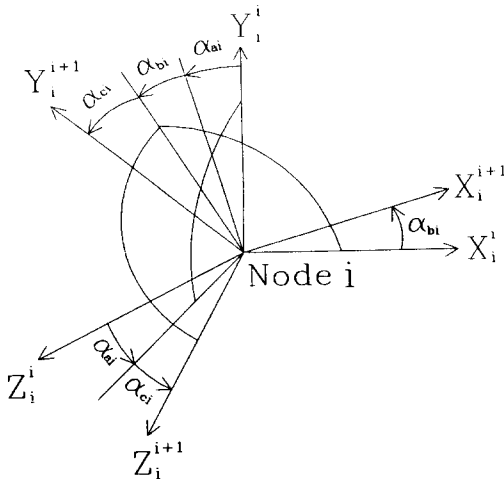


Fig. 3 Definition of the Euler angle

좌표계 $O - X_i^j Y_i^j Z_i^j$ 를 좌표계 $O - X_i^{j+1} Y_i^{j+1} Z_i^{j+1}$ 로 변환한다. 좌표계 $O - X_i^j Y_i^j Z_i^j$ 상의 단위벡터 (e_1, e_2, e_3) 및 $O - X_i^{j+1} Y_i^{j+1} Z_i^{j+1}$ 상의 단위벡터 (u_1, u_2, u_3) 사이의 관계는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{R}'(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서,

$$\mathbf{R}'(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \cos \alpha_b, & R_{12} &= \cos \alpha_a \sin \alpha_b \\ R_{13} &= \sin \alpha_a \sin \alpha_b, & R_{21} &= -\sin \alpha_b \cos \alpha_c \\ R_{22} &= \cos \alpha_a \cos \alpha_b \cos \alpha_c - \sin \alpha_a \sin \alpha_c \\ R_{23} &= \sin \alpha_a \cos \alpha_b \cos \alpha_c + \cos \alpha_a \sin \alpha_c \\ R_{31} &= \sin \alpha_b \sin \alpha_c \\ R_{32} &= -\cos \alpha_a \cos \alpha_b \sin \alpha_c - \sin \alpha_a \cos \alpha_c \\ R_{33} &= -\sin \alpha_a \cos \alpha_b \sin \alpha_c + \cos \alpha_a \cos \alpha_c \end{aligned} \quad (28)$$

가 된다.

절점 i 에 있어서, $i+1$ 번째 주부재 좌표계가 i 번째 주부재 좌표계에 대해서 오일러 각 $(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)_i$ 만큼 변했다면, 양쪽 주부재 사이의 좌표계로 표시한 절점의 상태벡터 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i^{i+1} &= \mathbf{R}(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)_i \mathbf{d}_i^i \\ \mathbf{f}_i^{i+1} &= \mathbf{R}(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)_i \mathbf{f}_i^i \end{aligned} \quad (29)$$

여기서, $\mathbf{R}(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)_i$ 는 좌표변환 매트릭스이고, 식(27) 및 (28)로부터 다음 식으로 정의된다.

$$\mathbf{R}(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)_i = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & R_{12} & 0 & R_{13} & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 & R_{13} & 0 & -R_{12} \\ R_{21} & 0 & R_{22} & 0 & R_{23} & 0 \\ 0 & R_{31} & 0 & R_{33} & 0 & -R_{32} \\ R_{31} & 0 & R_{32} & 0 & R_{33} & 0 \\ 0 & -R_{21} & 0 & -R_{23} & 0 & R_{22} \end{bmatrix}_i \quad (30)$$

식(28) 및 (30)으로부터, $\mathbf{R}(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)_i$ 는 다음과

같은 성질이 있다.

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}(\alpha_a \ \alpha_b \ \alpha_c)_i]^{-1} &= {}^t\mathbf{R}(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)_i \\ &= \mathbf{R}(-\alpha_c, -\alpha_b, -\alpha_a)_i \end{aligned} \quad (31)$$

따라서, 식(1)~(5) 및 (29), (30)으로부터, 양쪽의 주부재 좌표계로 표시한 절점 i 의 동적영향계수 매트릭스 사이의 관계는 다음 식과 같다.

$$\mathbf{T}_i^{i+1} = \mathbf{R}(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)_i \mathbf{T}_i^i \mathbf{R}(\alpha_a, \alpha_b, \alpha_c)_i \quad (32)$$

본 해석 기법에 있어서는 처음부터 시작점의 경계 조건을 고려해서 동적영향계수를 구하고, 이를 최종단까지 전달시켜 가는 특성을 가지고 있다. 절점 0에서 $\mathbf{d}_0^1 = (\mathbf{P}_0^1)^{-1} \mathbf{f}_0^1$ 이므로 \mathbf{T}_0^1 가 얻어지나, 강성 매트릭스가 특이 매트릭스일 경우에는, 역 매트릭스를 구할 수 없으므로, 절점 1의 중간 좌측의 동적영향계수를 직접 구할 수 있도록, 식(10), (15) 및 (16)에 의한 다음식 (33)을 사용함으로써 상기의 문제를 해소할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{G}}_1^1 \bar{\mathbf{T}}_1^1 = \mathbf{H}_1^1 \quad (33)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}}_1^1 &= \mathbf{U}_1^1 + \mathbf{H}_1^1 \bar{\mathbf{P}}_1^1, \\ \mathbf{U}_1^1 &= {}^t\mathbf{C}_1 + \mathbf{P}_0^1 {}^t\mathbf{D}_1, \\ \mathbf{H}_1^1 &= {}^t\mathbf{A}_1 + \mathbf{P}_0^1 {}^t\mathbf{B}_1, \\ \mathbf{P}_0^1 &= {}^t\mathbf{R}(\bar{\alpha}_a, \bar{\alpha}_b, \bar{\alpha}_c)_0 (\mathbf{P}_0^1) \mathbf{R}(\bar{\alpha}_a, \bar{\alpha}_b, \bar{\alpha}_c)_0 \\ (\mathbf{P}_0^1) &= \text{Diag}(k_x, K_x, k_y, K_y, k_z, K_z) \end{aligned} \quad (34)$$

결국, 식 (33)의 $\bar{\mathbf{T}}_1^1$ 을 구하는 것을 시작으로 식 (9), (15), (25) 및 (32)를 통해 절점 n 의 좌측까지의 동적영향계수 매트릭스를 계산해 나갈 수 있다.

3. 진동수 방정식 및 거짓근의 해소법

3.1. 진동수 방정식

진동수 방정식은 절점 n (주계의 끝단)에서, 힘의 평형관계식에 경계 조건을 적용함으로써 얻을 수 있다. 절점 n 의 순스프링계가 n 번째 주부재 좌표계로부터 반시계 방향을 (+)로해서 $\bar{\alpha}_n$ 만큼 회전해 있다고 하면, 절점 n 에서의 힘과 모우멘트의 평

형관계로부터,

$$\bar{\mathbf{f}}_n^n = -\mathbf{P}_n^n \mathbf{d}_n^n \quad (35)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n^n &= {}^t\mathbf{R}(\bar{\alpha}_a, \bar{\alpha}_b, \bar{\alpha}_c)_n \mathbf{P}_n^* \mathbf{R}(\bar{\alpha}_a, \bar{\alpha}_b, \bar{\alpha}_c)_n \\ \mathbf{P}_n^* &= \text{Diag}(k_x, K_x, k_y, K_y, k_z, K_z)_n \end{aligned} \quad (36)$$

$\bar{\mathbf{T}}_i^i$ 는 대칭 매트릭스이므로 식(9)로부터,

$$\bar{\mathbf{T}}_i^i = (\mathbf{U}_i^i)^{-1} \mathbf{H}_i^i = {}^t\mathbf{H}_i^i (\mathbf{U}_i^i)^{-1} \quad (37)$$

또한, 식 (1) 및 (35)로부터

$$(\mathbf{I}_6 + \mathbf{P}_n^n \bar{\mathbf{T}}_n^n) \bar{\mathbf{f}}_n^n = \mathbf{0} \quad (38)$$

또 식(38)은 식(5), (6), (10)으로부터,

$$[\mathbf{I}_6 + \mathbf{P}_n^n \bar{\mathbf{T}}_n^n] \bar{\mathbf{f}}_n^n = {}^t\mathbf{G}_n^n (\mathbf{U}_n^n)^{-1} \bar{\mathbf{f}}_n^n = {}^t\mathbf{G}_n^n \mathbf{f}_{n-1}^n = \mathbf{0} \quad (39)$$

여기서,

$$\mathbf{G}_n^n = \mathbf{U}_n^n + \mathbf{H}_n^n \mathbf{P}_n^n \quad (40)$$

로 된다.

식(1), (5), (6), (9) 및 (10)에 의해,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_n^n &= {}^t\mathbf{U}_n^n \mathbf{f}_{n-1}^n \\ \mathbf{d}_n^n &= {}^t\mathbf{H}_n^n \mathbf{f}_{n-1}^n \end{aligned} \quad (41)$$

가 되고, 일반적으로 $\mathbf{f}_{n-1}^n \neq \mathbf{0}$ 이므로, 절점 n 이 스프링 지지된 경우의 진동수 방정식은 식(39)에서,

$$\mathbf{Z}_n = \det({}^t\mathbf{G}_n^n) = \det(\mathbf{G}_n^n) = 0 \quad (42)$$

가 된다.

또한, 특별한 경계 조건에 대한 진동수 방정식을 구하기 위해, 식(1) 및 (9)로부터,

$$\mathbf{U}_n^n \mathbf{d}_n^n = \mathbf{H}_n^n \bar{\mathbf{f}}_n^n \quad (43)$$

가 성립하고, 경계 조건별로 진동수 방정식을 구하면,

$$\begin{aligned} <1> \text{ 자유단 } [\mathbf{d}_n^n \neq \mathbf{0} \cap \bar{\mathbf{f}}_n^n = \mathbf{0}] \\ \det(\mathbf{U}_n^n) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} <2> \text{ 고정단 } [\mathbf{d}_n^n = \mathbf{0} \cap \bar{\mathbf{f}}_n^n \neq \mathbf{0}] \\ \det(\mathbf{H}_n^n) &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} <3> \text{ 판 지지단 } [x_n = y_n = z_n = \bar{M}_{xn} = \bar{M}_{yn} \\ &= \bar{M}_{zn} = 0 \cap \theta_n = 0 \cap \phi_n = 0 \cap \psi_n \\ &= 0 \cap \bar{f}_{xn} = 0 \cap \bar{f}_{yn} = 0 \cap \bar{f}_{zn} = 0] \end{aligned}$$

$$\det \begin{bmatrix} H_{11} & U_{12} & H_{13} & U_{14} & H_{15} & U_{16} \\ H_{21} & U_{22} & H_{23} & U_{24} & H_{25} & U_{26} \\ H_{31} & U_{32} & H_{33} & U_{34} & H_{35} & U_{36} \\ H_{41} & U_{42} & H_{43} & U_{44} & H_{45} & U_{46} \\ H_{51} & U_{52} & H_{53} & U_{54} & H_{55} & U_{56} \\ H_{61} & U_{62} & H_{63} & U_{64} & H_{65} & U_{66} \end{bmatrix}_n = 0 \quad (46)$$

스프링 지지단에 대한 진동수 방정식(42)에 있어서 스프링 상수 $k^*_{xn}, k^*_{yn}, k^*_{zn}$ 및 $K^*_{xn}, K^*_{yn}, K^*_{zn}$ 의 값을 적절히 바꿈으로서, 진동수 방정식(44)~(46)을 대응시킬 수 있으므로, 진동수 방정식은 식(42)로 단일화할 수 있다.

3. 2. 거짓근의 해소

진동수 방정식 (42)의 해법으로 이분법을 사용할 경우 ω 의 함수 Z_n 의 부호변화를 이용해서 해를 구한다. 이때, 함수 Z_n 에는 $\hat{Z}_{n-1} = \det(\hat{G}_{n-1}^n) = 0$ 인 곳에서 반대칭 극이 존재하고, \bar{Z}_{n-1} 에는 $Z_{n-1} = \det(\bar{G}_{n-1}^n) = 0$ 인 곳에서도 반대칭 극이 존재한다. 따라서 참근은 물론 이런 거짓근도 해로서 구해지게 되므로, 반대칭 극을 대칭 극으로 바꾸어 줌으로써 이를 제거할 수 있다. 또 반대칭 극은 Z_n 이외에도 $\bar{Z}_i (= \det(\bar{G}_i^i) = 0, \hat{Z}_i (= \det(\hat{G}_i^i) = 0 (i=1, \dots, n-2)$ 인 곳에서도 발생하므로, 이들도 제거하지 않으면 안된다. 이렇게 해서 얻어진 함수를 W_n 이라고 하면, W_n 은 다음식과 같이 Z_n 의 영점(참근)에서만 부호가 변하는 함수가 된다.

$$W_n = \prod_{i=1}^{n-1} [\text{sgn}(\hat{S}_i) \cdot \text{sgn}(\bar{Z}_i) \cdot \text{sgn}(\hat{Z}_i)] \text{sgn}(Z_n) \quad (47)$$

여기서, $\text{sgn}(\hat{S}_i)$ 는 절점 i 의 분지계 요소에 의한 거짓근을 해소하기 위한 것으로 $\det(\hat{T}_i^i)$ 의 기수의 영점만에서 부호가 변하는 함수이다.

식(47)을 사용하면, 계의 시작단과 끝단의 경계 조건, 여러 가지 중간 연결 조건 및 기초 지지 조건도 스프링 상수의 값만을 바꿈으로서 간단히 대응

시킬 수 있고, 거짓근이 제거된 참근 즉, 고유진동수만이 구해진다.

4. 고유모드의 계산

고유진동수가 구해지면, 식(39)로부터 $f_{n-1}^n (\neq 0)$ 을 계산하고, 식(41)에서 d_n^n 및 f_n^n 을 계산한다. 절점 $n-1$ 에서 절점 0까지의 상태변수는 식(1), (5), (7), (29) 및 힘의 평형식(11), (17), (21)을 사용해서 순차적으로 계산한다.

분지계의 고유모드도, 각각의 분지계를 주계로 간주해서 주계와 동일한 순서로 구할 수 있다.

5. 수치 계산 결과 및 고찰

본 연구에서는 다수의 굴곡부나 분지계 또는 관 절 요소를 갖는 구조물을 해석 대상으로 하여, 전달영향계수법에 의해 중·굽힘·비틀림 연성 자유진동을 해석하기 위한 알고리즘을 정식화 하였다. 이를 검증하기 위하여 종래의 전달매트릭스법에 의한 알고리즘도 정식화해서, 간단한 수치 계산 모델에 대해 수치 실험을 행하였다. 두 방법에 의한 결과를 통해서, 계산 정도, 알고리즘의 구조 등을 비교·검토하였다. 사용한 계산기는 32bit 개인용 컴퓨터(i80486DX2)와 슈퍼 컴퓨터(CRAY C90)이고, 사용 언어는 FORTRAN 77이며, 고유진동수는 상대오차 $\epsilon = 10^{-6}$ (단정도), $\epsilon = 10^{-8}$ (배정도, 4배정도) 이하에서 수렴하는 것으로 하였다.

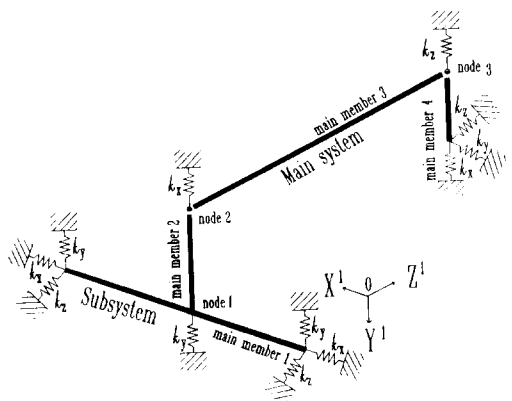


Fig. 4 Numerical computational model

Fig.4는 수치 계산 모델을 나타내고, ⊙는 관절 요소를 의미한다. 또한 그림속의 O - X', Y', Z' 좌표계는 1번 주부재의 좌표계를 나타내고, 2번, 3번, 4번 주부재 및 분지부재 좌표는 X축이 보의 길이 방향과 일치하도록 국부좌표계로 좌표변환해서 나타낸 것이다. 스프링의 지지 조건(단, 모든 기초 지지 회전 및 비틀림 스프링 상수 $K=0$)에 따라 모델을 나누면,

<모델 1> 절점 2, 3이 연속인 보

$$(\hat{k}_x = \hat{k}_y = \hat{k}_z = \hat{K}_x = \hat{K}_y = \hat{K}_z = \infty)$$

<모델 2> 절점 2, 3이 릴리스 구조인 보

$$(\hat{k}_x = \hat{k}_y = \hat{k}_z = \infty, \hat{K}_x = \hat{K}_y = \hat{K}_z = 0)$$

그리고, 각 부재는 직경 20mm의 강재 원형 중실축(밀도 $\rho = 7.86 \times 10^3 \text{kg/m}^3$, 종탄성계수 $E = 2.06 \times 10^{11} \text{N/m}^2$, 횡탄성계수 $G = 7.92 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, 단면형상계수 $\kappa = 0.886$)이고, 길이는 첫번째, 두번째 주부재와 분지부재는 400mm, 세번째 주부재가 800mm, 네번째 주부재가 200mm이고, 각 부재는 분포 질량을 갖는 보로 간주한다.

5. 1. 계산 정도

Table 1은 모델 1을 오일러 보로 가정하고, 기초 병진 스프링 상수 $k = 10^9 \text{N/m}$ 인 경우, 수치 계산시

Table 1 Natural frequency(Hz) for model 1 at $k = 10^9 \text{N/m}$ (Euler beam)

No.	S	D	Q
1	21.546	21.546333	21.546333
2	37.595	37.595080	37.595080
3	54.980	54.980074	54.980074
4	60.850	60.849617	60.849617
5	95.675	95.674764	95.674764
6	119.64	119.63828	119.63828
7	151.31	151.30872	151.30872
8	153.09	153.08943	153.08943
9	202.65	202.64985	202.64985
10	215.87	215.87079	215.87079
11	232.46	232.46004	232.46004
12	300.82	300.81838	300.81838
13	310.21	310.20807	310.20807
14	312.14	312.14276	312.14276

* S : Single precision
 D : Double precision
 Q : Quadruple precision

변수를 각각 단정도(S), 배정도(D), 4배정도(Q)로 계산한 고유진동수의 계산 결과를 나타낸 것이다. 실제 계산시 관절 요소에 대한 연속체로서의 처리는 관절 내부의 스프링 상수에 각각 ∞ 의 값을 대입함으로써 연속 조건에 대응시켰다. 여기서 ∞ 의 값은 10^{20} 을 수치상의 무한대로 간주하였다. Table 1 내의 수치는 본 해석 알고리즘에 의한 계산 결과이고, 음영부분은 전달매트릭스법에 의한 해석 알고리즘으로 계산한 후, 비교하였을 때 정해를 얻을 수 없는 부분을 나타낸다. 두 방법의 4배정도 값이 고려 대상의 유효자리수 내에서 서로 일치했으므로 이를 정해로 간주했다. 전달매트릭스법의 문제점인 단정도의 고차 고유진동수를 제외하고는 두 방법에 의한 결과가 일치함을 보이고 있다. 따라서, 본 해석 알고리즘은 중간 조건을 상용하는 스프링 상수 값의 적절한 대입만으로 처리할 수 있음을 알 수 있다.

릴리스의 관절 요소가 존재하는 모델 2에 대한 계산 결과를 Table 2, Table 3 및 Table 4에 나타내었다. Table 2는 오일러 보, Table 3과 Table 4는 티모센코 보로 가정하고, 각각의 지지점에서의 기초 병진 스프링 상수 값은 $k = 10^9 \text{N/m}$, $k = 10^9 \text{N/m}$, $k = 10^{12} \text{N/m}$ 로 계산하였다. Table 내의 수치 값은 역시 전달영향계수법의 계산 결과이고, 음영부분은 전달매트릭스법으로 정해가 구해지지 않는 부분을 나타낸다.

기초 병진 스프링 상수 값이 $k = 10^6 \text{N/m}$ 인 Table 3에서, 전달영향계수법과 전달매트릭스법

Table 2 Natural frequency(Hz) for model 2 at $k = 10^9 \text{N/m}$ (Euler beam)

No.	S	D	Q
1	38.434	38.433709	38.433709
2	54.414	54.414124	54.414124
3	62.822	62.821669	62.821669
4	112.03	112.02852	112.02852
5	250.84	250.84487	250.84487
6	251.25	251.24711	251.24711
7	260.79	260.79057	260.79057
8	275.29	275.29121	275.29121
9	317.34	317.34303	317.34303
10	391.90	391.89500	391.89500
11	453.86	453.84699	453.84699
12	541.25	541.25068	541.25068

Table 3 Natural frequency(Hz) for model 2 at $k=10^4N/m$ (Timoshenko beam)

No.	S	D	Q
1	37.283	37.283421	37.283421
2	51.542	51.542194	51.542194
3	60.771	60.771360	60.771360
4	109.61	109.61362	109.61362
5	149.64	149.63862	149.63862
6	149.93	149.92577	149.92577
7	196.65	196.65197	196.65197
8	214.68	214.68296	214.68296
9	223.44	223.44377	223.44377
10	263.88	263.88498	263.88498
11	302.12	302.12102	302.12102
12	305.66	305.66303	305.66303
13	331.59	331.59129	331.59129
14	350.57	350.56972	350.56972

Table 4 Natural frequency(Hz) for model 2 at $k=10^{12}N/m$ (Timoshenko beam)

No.	S	D	Q
1	38.398	38.397584	38.397584
2	54.374	54.373765	54.373765
3	62.777	62.777364	62.777364
4	111.87	111.86664	111.86664
5	250.15	250.15420	250.15420
6	250.54	250.54150	250.54150
7	260.01	260.01363	260.01363
8	274.36	274.36243	274.36243
9	316.04	316.04319	316.04319
10	389.80	389.80498	389.80498
11	450.65	450.65202	450.65202
12	537.88	537.87501	537.87501
13	561.60	561.61241	561.61241
14	656.04	656.03509	656.03509

의 배정도 및 4배정도 계산 결과는 완전히 일치 하고 있으나, 단정도의 10차, 14차에서는 전달매트릭스법으로 정해를 얻을 수 없음을 알 수 있다. 따라서, 이 경우 10차 이상의 값을 신뢰할 수 없게 된다. 또한 이런 경향은 기초 병진 스프링 상수 값이 증가할수록 더욱 현저하게 나타난다. 즉, Table 4에서 알 수 있듯이 $k=10^{12}N/m$ 일 경우는 전달매트릭스법에 의한 배정도의 계산으로도 정해를 얻을 수 없다. 그러나 본 해석 알고리즘은 단정도, 배정도 및 4배정도 또는 기초 지지 강성에 관계없이 계산 정도를 유지할 수 있음을 알 수 있다.

전달매트릭스법에 있어서의 위와 같은 결과의 원인은 필드 전달 매트릭스 요소내의 동일한 인수

를 갖는 쌍곡선함수와 삼각함수의 가감산에 따른 오차로 고차의 고유진동수를 구할 수 없고, 기초에 경탄성 지지가 존재할 경우 포인트 전달 매트릭스 요소내의 매우 큰 값과 작은 값의 혼재로 인한 매트릭스 연산과정의 오차로 정확한 고유진동수를 구할 수 없기 때문이라 생각된다.

그리고 전달매트릭스법에 의한 해석 알고리즘은 알고리즘의 구조상 본 연구의 해석 대상계에만 적용 할 수 있고, 물과 같은 관절 요소 및 관절의 연결부에 임의의 스프링에 상응하는 값이 존재할 경우 해석 알고리즘을 새로이 정식화 하여야 하는 등 처리가 매우 곤란하다.

한편 본 해석 알고리즘은 Table에서와 같이 상응하는 스프링 상수 값의 대입만으로 모든 중간 연결조건에 대처할 수 있어 프로그램의 운용이 매우 편리하고, 알고리즘의 일반화도 가능하다.

5.2 고유모드

Fig. 5는 모델 2에 대한 기초 병진 스프링 $k=10^4N/m$ 일 경우 1차와 2차의 고유모드를 나타내고 있다. 고유진동수를 구할 경우와는 달리 주부재 및 분지부재를 더욱 세분하여 고유모드를 구하였다.

한편, 본 해석 대상계에 대하여 종래의 전달매트릭스법으로는 알고리즘의 구조상 고유모드를 구하기 어려웠으나, 본 해석기법에서는 아무 어려움 없이 고유모드를 구할 수 있었다.

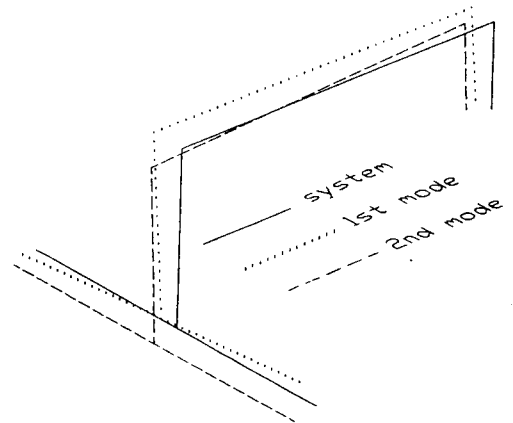


Fig. 5 Characteristics modes for model 2

6. 결 론

본 연구에서는 다수의 굴곡부나 분지계 또는 관절 요소를 갖는 구조물을 해석 대상 계로 선정하여, 종·굽힘·비틀림 연성 자유진동을 해석하기 위한 알고리즘을 전달영향계수법으로 정식화하였다. 간단한 수치 실험을 통해서 종래의 전달매트릭스법과 비교 검토한 결과를 요약하면 다음과 같다.

(1) 구조물의 임의의 중간절점에서 상태벡터량(변위, 각변위, 전달력 및 모멘트)중 일부의 물리량이 불연속성을 갖더라도, 알고리즘 자체를 변화시켜야 하는 전달매트릭스법과는 달리, 스프링 상수값만을 바꿈으로서 간단히 처리할 수 있어, 알고리즘의 일반화 및 프로그램의 운용이 간편하다.

(2) 관절의 외부질량과 기초 사이에 반고정 지지와 같은 단단한 탄성 지지부가 다수 존재하는 경우에도, 기본적인 알고리즘을 변경할 필요없이 기초 지지 스프링 상수에 적당한 값을 대입하는 것으로 기초 지지 조건에 대응시킬 수 있다.

(3) 전달영향계수법은 종래의 전달매트릭스법에 비해 계산 정도가 매우 우수함을 확인할 수 있다.

후 기

본 연구는 1993년도 교육부 학술연구조성비(기계공학 ME93-D-07)의 지원을 받아 수행되었으며 이에 관계자 여러분께 감사 드린다.

참고문헌

1) Sueoka, A., Kondou, T., Moon, D.H. and K., Yamashita, 1988, "A Method of Vibrational Analysis Using a Personal Computer - A Suggested Transfer Influence Coefficient Method", Mem-

oirs of the Faculty of Engineering, Kyushu Univ., Vol. 48, No. 1, pp. 31~46.

- 2) Kondou, T., Sueoka, A., Moon, D. H., Tamura, H., and T., Kawamura, 1989, "Free Vibration Analysis of a Distributed Flexural Vibrational Analysis System by the Transfer Influence Coefficient Method", Theoretical and Applied Mechanics Vol. 37, Uni. of Tokyo press, pp. 289~304.
- 3) 末岡·近藤·文·山下·田村, 1988, "傳達影響係數法による多層構造物の自由振動解析(第1報, 集中系に對する定式化)", 日本機械學會論文集(C), Vol. 54, No. 504, pp. 1724~1731.
- 4) 末岡·近藤·文·山下·田村, 1988, "傳達影響係數法による多層構造物の自由振動解析(第2報, 集中系二層構造物の數値計算結果)", 日本機械學會論文集(C), Vol. 54, No. 504, pp. 1732~1739.
- 5) 近藤·末岡·山下·文·河村, 1989, "傳達影響係數法による多層構造物の自由振動解析(第3報, 分布系に對する定式化)", 日本機械學會論文集(C), Vol. 55, No. 516, pp. 1948~1956.
- 6) 末岡·近藤·山下·文, 1989, "傳達影響係數法による多層構造物の自由振動解析(第4報, 分布系二層構造物の數値計算結果)", 日本機械學會論文集(C), Vol. 55, No. 516, pp. 1957~1964.
- 7) 문덕홍, 최명수, 공석조, 1992, "분지를 갖는 구조물의 종·굽힘 연성 자유진동 해석", 한국박용기관학회지, 제16권, 제5호, pp. 341~350.
- 8) 문덕홍, 여동준, 1993, "전달영향계수법에 의한 사각형 평판 구조물의 자유진동 해석", 대한기계학회 논문집, 제17권, 제3호, pp. 559~567.
- 9) Pestel, E. C. and Leckie, F. A.(1963) : "Matrix Methods in Elastomechanics", McGraw - Hill, pp. 153~175, pp.375~385.
- 10) 守屋·鷺津, 1985, "力學概論", 培風館, pp. 158~161.