수송문제의 감도분석

정호연* · 박순달**

Sensitivity Analysis of the Transportation Problem

Chung Ho Yeon* · Park Soon Dal**

ABSTRACT

The purpose of this study is to extend the current sensitivity analysis of the transportation problem.

In this paper we present a systematic method to obtain the variation range of supplies or demands by introducing a dummy column or dummy row. By using this approach we can deal with the case of fixed demands, and the unbalanced problem that the total demand is greater than the total supply.

1. 서 론

최근 Arsham은 [3]에서 수송문제의 감도분석 방법을 제시했다. 그의 감도분석은 문제의 최적해가 주어진 상태에서 공급량이나 수요량 또는 수송비용과 같은 변수들이 변할 때 주어진 최적기저 구조를 계속 유지하는 변수들의 변화범위를 구하는 것이다. 이 방법은 균형이 이루어진 문제에서 공급량(수요량)이 변하면 수요·공급의 균형이 깨지기 때문에 기존 수요지(공급지) 중 지정한 수요지(공급지)에서 공급량(수요량)의 변화를 받아들이게 함으로써 문제의 가능성을 유지시키고 있다. 그러나 이 방법은 기존 수요지의 수요량이 고정되어 공급량의 변화를 받아들일 수 없거나 기존 공급지의 공급량이 고정되어 수요량의 변화를 흡수할 수 없는 경우에는 적용할 수 없다.

박순달은 [1]에서 수송문제가 가능(feasible)인 범위내에서 수요량이나 공급량의 변화범위를 구하고 있다. 따라서 여기에서는 총공급량이 총수요량 보다 항상 크거나 같은 상황 즉, 공급량이 증가하거나 수요량이 감소하는 경우만을 대상으로 분석하고 있다.

윤석철도 [2]에서 수송문제의 감도분석을 제시하고 있다. 그러나 그의 감도분석은 주어진 최적기저 구조를 유지하는 변수들의 변화범위를 구하기 보다는 공급량(수요량) 한 단위가 증가하거나 감소할 때 그 남거나 부족한 한 단위를 어느 공

* 전주대학교 산업공학과
** 서울대학교 산업공학과

급지(수요지)에 남겨두는 것이 좋은가를 비용 관점에서 분석하고 있다.

본 연구에서는 이러한 여러 경우의 문제상황 중에서 [2]에서 다루는 감도분석과는 다르게 최적기저구조를 유지하는 변수들의 변화범위를 구하는 것으로 감도분석을 정의하고, [1]에서 고려하지 않았던 총수요량이 총공급량 보다 크게 될 경우도 허용하며, [3]에서 다루고 있지 않는 공급량이나 수요량이 변할 때 그 변화를 기존 수요지나 공급지에서 흡수할 수 없는 상황에 고려할 수 있는 감도분석 방법을 제시해 보고자 한다.

2. 공급량이 변하는 경우

공급량이 변하는 경우에는 공급량이 증가하는 경우와 감소하는 두가지 경우가 발생할 수 있다. 여기서 공급량이 증가하게 되면 공급량이 남게 되는데 그 증가량을 기존 수요지에서 흡수할 수 없기 때문에 남는 공급량은 가상열(dummy column)을 만들어 그곳에 남는 양을 할당해 주어야 한다. 마찬가지로 공급량이 감소하게 되면 공급량이 부족하게 되기 때문에 부족한 양 만큼은 가상행(dummy row)을 설정하여 그곳에서 공급 받는 것으로 가정해야 문제의 가능성을 유지할 수 있다.

2.1 공급량이 증가하는 경우

먼저 균형수송문제의 최적해가 주어져 있는 상황에서 r번째 공급량이 θ만큼 증가되었다고 가정하자. 그러면 처음에 주어진 최적해는 비가해가 된다. 따라서 수송비용이 0인 가상열 d_{n+1}을 만들어 증가된 양 θ를 그곳에 할당해 주면 수요 · 공급의 균형이 다시 이루어 지게 된다. 이렇게 가상열이 첨가된 상태에서 형성된 해는 공급량이 증가된 문제의 한 기저가능해에 해당된다. 따라서 이 해가 공급량이 증가된 문제의 최적해인지 검토해 보아야 한다. 이 때 다음의 정리가 성립한다.

[정리1] 가상열이 첨가된 문제의 최적성 여부

가상열이 첨가된 문제의 최적성은 전체 비기저세포에 대한 할인가를 계산할 필요없이 다만 가상열에 해당되는 비기저세포의 할인가만 계산해 보면 알 수 있다.

(증명) 가상열 d_{n+1}이 첨가되어 기존의 기저변수 x_B가 x_B'로 변경되었다고 하자. 그러면 변경된 기저변수에 대한 쌍대변수값 u_i'와 v_j'를 재계산해야 한다. 그런데 $x_B' = x_B \cup \{x_{r,n+1}\}$이므로 먼저 기존의 기저변수에 대하여

$$c_{ij} = u_i + v_j \qquad \forall i,\ j$$

식이 성립하고, 추가된 기저변수 $x_{r,n+1}$에 대해서는

$$c_{r,n+1} = u_r + v_{n+1}$$

식이 성립한다. 그런데 $c_{r,n+1} = 0$이기 때문에 v_{n+1} 값은

$$v_{n+1} = -u_r$$

이다. 따라서 변경된 기저변수 x_B'에 대한 쌍대변수값 u_i'와 v_j'는

$$u_i' = u_i \ ,\quad i = 1,\cdots,m$$
$$v_j' = v_j \ ,\quad i = 1,\cdots,n$$
$$= -u_r \ ,\quad j = n+1 \text{ 일때}$$

이다. 결국 모든 i와 j ($j=n+1$인 경우만 제외)에 대하여 쌍대변수값이 동일하기 때문에 비기저세포에 대한 할인가는 여전히 비음조건을 만족하며 다만 $j=n+1$인 경우 즉, v_{n+1}에 해당되는 비기저세포에 대해서만 최적성을 조사해 보면 된다. 여기서 v_{n+1}은 가상열에 해당되므로 이의 비기저세포에 대한 할인가만을 계산해 보면 문제의 최적성여부를 확인할 수 있다.

[정리2] 최소 할인가 판정

가상열의 비기저세포에 대한 할인가 $\overline{c_{i,n+1}}$ 계산에서 할인가가 가장 작은값은 $u_s = \max\{u_i\}$에 해당되는 $\overline{c_{s,n+1}}$이다.

(증명) 가상열에 대한 비기저세포의 할인가는 다음과 같이 계산된다.

$$\overline{c_{i,n+1}} = c_{i,n+1} - u_i - v_{n+1} \quad , \quad \forall\, i$$
$$= 0 - u_i - v_{n+1} \quad , \quad \forall\, i$$

여기서 v_{n+1}은 모든 i에 대하여 일정하므로 $u_s = \max\{u_i\}$에 해당되는 세포의 할인가가 가장 작게 된다.

[보조정리1] 최적상태 도달 조건

가상열에 있는 비기저세포의 할인가 계산에서 음을 갖는 세포가 있을 때 이 중 $u_s = \max\{u_i\}$에 해당되는 세포를 기저세포로 선택하면 곧 바로 최적상태에 도달하게 된다.

(증명) 현 기저변수에 대하여 모든 i와 j에 대해 $c_{ij} = u_i + v_j$가 성립한다. 그런데 가정에서 가상열에 있는 세포 중 $u_s = \max\{u_i\}$에 해당되는 세포가 기저변수로 선택된다고 했으므로 $c_{s,n+1} = u_s + v_{n+1}$이다.

여기서 $c_{s,n+1} = 0$ 이므로 $v_{n+1} = -u_s$이다. 최적성 여부를 파악하기 위해 비기저세포에 대한 할인가 $\overline{c_{i,n+1}}$를 계산해 보면

$$\overline{c_{i,n+1}} = c_{i,n+1} - u_i - v_{n+1}$$
$$= 0 - u_i - v_{n+1}$$
$$= 0 - u_i + u_s$$

이다. 그런데 $u_s = \max\{u_i\}$ 이므로

$$\therefore\ \overline{c_{i,n+1}} \geq 0$$

이 성립한다. 즉, 모든 비기저세포에 대한 할인가가 비음이므로 현재가 최적이다.

이상의 [정리]들을 이용하여 공급량이 증가하는 경우의 감도분석방법을 단계별로 정리해 보면 다음과 같다.

計 算 法

단계1 : [가상열의 생성]

i번째 공급지의 공급량 s_i가 θ 만큼 증가하게 되면 먼저 균형수송문제로 만들어 주기 위해 가상열 d_{n+1}을 만들고 $x_{i,n+1} = \theta$로 놓는다. 이 때 모든 $c_{i,n+1} = 0$, $\forall i$ 이다.

단계2 : [최적판정 및 진입세포 선택]

(1) 가상열의 비기저세포에 대하여 평가한다. 즉, 가상열의 비기저세포에 대하여 환 $c_{i,n+1}$, $\forall i$를 만든 후 환의 값인 $\overline{c_{i,n+1}}$, $\forall i$를 구한다.

(2) Min $\overline{c_{i,n+1}} = \overline{c_{r,n+1}}$ 이라고 하자.

만일 $\overline{c_{r,n+1}} \geq 0$ 이면 현재의 해 X가 그대로 최적이다.

아니면 비기저세포 $(r,n+1)$를 진입세포로 판정한다.

단계3 : [탈락변수의 결정]

진입세포 $(r,n+1)$의 환 $\overline{c_{r,n+1}}$에 대해 초과공급량 θ가 할당된 $(i,n+1)$의 세포가 탈락세포가 된다.

단계4 : [해의 수정]

(1) 진입세포는 기저로, 탈락세포는 비기저로 만든다.

(2) 다음과 같이 기저해를 수정한다.

최적해X' : $x_{r,n+1}' = \theta$, $(r,n+1)$이 진입세포일 때

$= x_{ij} - \theta$, (i,j)가 환의 요소로써 $(-)$항일 때

$= x_{ij} + \theta$, (i,j)가 환의 요소로써 $(+)$항 일 때

단계5 : [비음 조건을 만족하는 θ 계산]

(i,j)가 환의 요소로써 $(-)$항에 해당되는 기저

값들 모두가 비음이 유지되도록 하는 θ의 범위를 구한다.

2.2 공급량이 감소하는 경우

균형수송문제의 최적해가 주어져 있을 때 어떤 공급지의 공급량이 θ만큼 감소되었다고 가정하자. 그러면 처음에 주어진 최적해는 비가해가 된다. 따라서 균형수송문제로 다시 만들어 주기 위해서 이 때는 가상행 s_{m+1}을 만들어 준다. 이때 모든 $c_{m+1,j} = 0$ (단, $j=1,2,\cdots,n$)으로 놓는다. 다음에 공급지 i의 감소량 θ를 공급지 i에 할당된 현재의 기저해에서 빼 주고 수요 · 공급의 균형을 맞춰주기 위하여 빼 준 기저해에 해당하는 가상행에 θ를 할당해 준다. 즉, 만일 공급지 i에 있는 기저변수가 x_{is}라면 $x_{is}' = x_{is} - \theta$로 기저값을 수정해 주고 $x_{m+1,s} = \theta$로 값을 할당한다.

다음에 가상행이 첨가된 상태에서 형성된 해가 공급량이 감소된 문제의 최적해인지를 검토해 보아야 한다. 이 때 다음의 정리가 성립한다.

[정리3] 가상행이 첨가된 문제의 최적성 여부

가상행이 첨가된 문제의 최적성 여부는 전체 비기저세포에 대한 할인가를 계산할 필요없이 다만 가상행이 있는 비기저세포에 대한 할인가만 계산해 보면 알 수 있다.

(증명) 가상행 s_{m+1}에 값이 할당되어 기저해가 x_B에서 x_B'로 변경되었다고 하자. 그러면 변경된 기저해에 대한 쌍대변수값 u_i'와 v_j'를 재계산해야 한다.

그런데 $x_B' = x_B \cup \{x_{m+1,s}\}$이므로 기존의 기저변수 x_B에 대하여

$$c_{ij} = u_i + v_j \qquad \forall i,j$$

식이 동일하게 적용되고 추가된 기저변수 $x_{m+1,s}$에 대해서는

$$c_{m+1,s} = u_{m+1} + v_s$$

식이 성립한다. 그런데 $c_{m+1,s} = 0$이기 때문에 u_{m+1} 값은

$$u_{m+1} = -v_s$$

이다. 따라서 변경된 기저변수 x_B'에 대한 쌍대변수값 u_i'와 v_j'는

$$\begin{aligned} u_i' &= u_i \quad , \quad i = 1,\cdots,m \\ &= -v_s \quad , \quad i = m+1 \text{ 일때} \\ v_j' &= v_j \quad , \quad j = 1,\cdots,n \end{aligned}$$

이다. 결국 모든 i($i=m+1$인 경우만 제외)와 j에 대하여 쌍대변수값이 동일하기 때문에 비기저세포의 할인가는 여전히 비음조건을 만족하며 다만 $i = m+1$인 경우 즉, u_{m+1}에 해당되는 비기저세포에 대해서만 최적성을 조사해 보면 된다.

[정리4] 최소 할인가 판정

가상행의 비기저세포에 대한 할인가 $\overline{c_{m+1,j}}$ 계산에서 할인가가 가장 작은 값은 $v_s = \max\{v_j\}$에 해당되는 $\overline{c_{m+1,s}}$ 이다.

(증명) 가상행에 대한 비기저세포의 할인가는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{c_{m+1,j}} &= c_{m+1,j} - u_{m+1} - v_j \quad , \quad \forall j \\ &= 0 - u_{m+1} - v_j \quad , \quad \forall j \end{aligned}$$

여기서 u_{m+1}은 모든 j에 대하여 일정하므로 $v_s = \max\{v_j\}$에 해당되는 세포의 할인가가 가장 작게 된다.

[보조정리2] 최적상태 도달 조건

가상행에 있는 비기저세포의 할인가 계산에서 음을 갖는 세포가 있을 때 이 중 $v_s = \max\{v_j\}$에 해당되는 세포가 기저세포로 선택되면 곧 바로 최적상태에 도달하게 된다.

(증명) 현 기저변수에 대하여 모든 i와 j에 대해 $c_{ij} = u_i + v_j$가 성립한다. 그런데 가정에서 가상행에 있는 세포중 $v_s = \max\{v_j\}$에 해당되는

공급\수요	1	2	3	4	공급량
1	2	3 5	11 1	7	6
2	1	0	6 1	1	1
3	5 7	8	15 1	9 2	10
수 요 량	7	5	3	2	17

[그림 1] 미진건설문제의 최적해

세포가 기저변수로 선택된다고 했으므로 $c_{m+1,s} = u_{m+1} + v_s$가 성립한다. 여기서 $c_{m+1,s} = 0$ 이므로 $u_{m+1} = -v_s$ 이다.

비기저세포에 대한 할인가 $\overline{c_{m+1,j}}$은 다음과 같이 계산된다.

$$\overline{c_{m+1,j}} = c_{m+1,j} - u_{m+1} - v_j$$
$$= 0 - u_{m+1} - v_j$$
$$= 0 + v_s - v_j$$

이다. 그런데 $v_s = \max\{v_j\}$ 이므로

$$\therefore \ \overline{c_{m+1,j}} \geq 0$$

이 성립한다. 즉, 모든 비기저세포에 대한 할인가가 비음이므로 현재가 최적이다.

자세한 계산 방법은 공급량이 증가하는 경우의 계산법을 참조하면 된다.

美進건설 문제를 예로 들어 보자. 이 문제의 최적해는 [그림1]에 나타나 있다.

지금 공급지1의 공급량이 θ만큼 감소 되었다고 가정하자. 그러면 먼저 균형 수송문제로 만들어 주기 위하여 [그림2]와 같이 수송비용이 0인 가상행(dummy row)를 만든다. 이 때 $c_{4,j} = 0, \forall j$ 으로 놓는다. 그리고 공급지1의 감소량 θ를 공급지1에 있는 현재의 기저해에서 빼준다. 즉, 공급지1에 있는 기저해 x_{12}나 x_{13}중에서 임의로 한 변수를 택해 (여기서는 x_{12}를 택한다고 하자) 다음과 같이 기저해를 수정해 준다.

$$x_{12}' = x_{12} - \theta$$

이 때 x_{12}의 기저값이 수정되어 θ만큼 감소했으므로 d_2에 해당하는 가상행 x_{42}에 θ를 할당해 주어야 한다. 이것은 현재의 기저에 x_{42}가 추가됨을 나타내지만 실제로는 θ만큼을 수요지2에 공급하지 못함을 의미한다.

다음에 현재의 해가 최적인지 가상행의 모든 비기저변수에 대하여 환을 생성하여 할인가를 계산한다.

가상행의 각 비기저세포에 대한 환의 값은 다음과 같다.

$$\overline{c_{41}} = -c_{31} + c_{33} - c_{13} + c_{12} - c_{42} = -5 + 15 - 11 + 3 = +2$$

$$\overline{c_{43}} = -c_{13} + c_{12} - c_{42} = -11 + 3 - 0 = -8$$

$$\overline{c_{44}} = -c_{34} + c_{33} - c_{13} + c_{12} - c_{42} = -9 +$$

공급\수요	1	2	3	4	공급량
1	2	3 $5-\theta+\theta$	11 $1-\theta$	7	$6-\theta$
2	1	0	6 1	1	1
3	5 7	8	15 1	9 2	10
4 가상행	0	0 (θ)	0 θ	0	θ
수 요 량	7	5	3	2	17

[그림 2] 공급량이 감소할 경우의 환의 생성

$$15 - 11 + 3 - 0 = -2$$

만일 여기서 음환(negative cycle)이 존재하지 않으면 현재의 해가 최적임을 나타내기 때문에 이 때는 $x_{12}' = x_{12} - \theta \geq 0$을 만족하는 θ의 범위를 찾으면 된다. 그러나 위의 계산에서 처럼 음의 값을 갖는 음환이 존재하면 현재의 해는 최적이 아니므로 비기저세포 중 환의 값이 가장 작은 세포를 기저세포로 만들어 주어야 한다. 이 때 탈락변수는 x_{42}가 선택된다.

그리고 현재의 최적해를 수정하는데 환에 포함되어 있는 세포만이 [그림2]와 같이 변하게 된다.

여기서 현재의 최적기저구조가 계속 유지되기 위해서는 기존의 기저값에서 θ만큼 뺀 부분이 여전히 가능조건(feasible condition)을 만족해야 하므로 θ의 변화범위는 다음을 만족하는 범위가 된다.

$$1 - \theta \geq 0$$
$$\theta \geq 0$$
$$\therefore 0 \leq \theta \leq 1$$

3. 수요량이 변하는 경우

수요량이 변하는 경우에도 수요량이 증가하는 경우와 감소하는 두가지 경우로 나누어 볼 수 있다. 여기서 수요량이 증가하게 되면 공급되는 공급량이 부족하게 되는데 그 부족량은 가상행(dummy row)을 설정하여 그곳에서 공급 받는 것으로 가정해야 문제의 가능성을 유지하게 된다. 마찬가지로 수요량이 감소하게 되면 공급량이 남게 되며 기존 공급지에서 흡수할 수 없기 때문에 남는 공급량은 가상열(dummy column)을 만들어 그곳에 할당해 주어야 한다.

3.1 수요량이 증가하는 경우

수요지 j의 수요량이 δ만큼 증가할 경우에는 δ만큼 공급해 줄 수 있는 가상행 s_{m+1}을 만들어 주어야 한다. 그리고 $x_{m+1,j} = \delta$로 놓는다. 이 때 모든 $c_{m+1,j} = 0$이다.$(j=1,2,\cdots,n)$

다음에 현재의 해가 최적인지 가상열에 있는 비기저세포에 대한 할인가만을 계산하여 조사해

본다. 이 때 만일 음을 갖는 할인가가 있다면 세포$(m+1, j)$를 비기저세포로 하고 음을 갖는 할인가중 $v_s = \max\{v_j\}$에 해당하는 세포를 기저세포로 선택하게 되면 곧 바로 최적상태에 도달하게 된다.

자세한 계산과정은 공급량의 計算法을 참조하면 된다.

3.2 수요량이 감소하는 경우

만일 수요지 j의 수요량이 δ만큼 감소 되었다면 δ만큼 공급량이 남게 된다. 그 때 수요·공급의 균형을 맞춰주기 위해 공급량이 감소되는 경우처럼 기저해를 수정해 주어야 한다. 즉, 만일 수요지 j에 있는 기저변수가 x_{rj}라면 $x_{rj}' = x_{rj} - \delta$로 기저값을 수정해 주고 $x_{r,n+1} = \delta$로 놓는다.

다음에 현재의 해가 최적인지 가상열에 있는 비기저변수에 대한 할인가를 계산하여 파악한다. 이 이후의 계산과정은 공급량의 경우를 참조하면 된다.

4. 결 론

수송문제에 대한 감도분석은 여러 학자에 의해 연구되었다. 그러나 [3]의 방법은 기존 수요지의 수요량이 고정되어 공급량의 변화를 받아들일 수 없거나 기존 공급지의 공급량이 고정되어 수요량의 변화를 흡수할 수 없는 경우에는 적용할 수 없고, [2]의 방법은 최적기저구조를 유지하는 공급량이나 수요량의 변화범위를 구하기 보다는 어느 공급지나 수요지에 증가되거나 감소된 한 단위를 남겨 두는 것이 더 좋은가를 분석하고 있으며, [1]에서는 공급량이 증가하거나 수요량이 감소하는 경우만을 대상으로 감도분석을 구하고 있다.

따라서 본 연구에서는 이러한 여러 경우의 문제상황 중에서 [2]에서 다루는 감도분석과는 다르게 최적기저구조를 유지하는 변수들의 변화범위를 구하는 것으로 감도분석을 정의하고, [1]에서 고려하지 않았던 총수요량이 총공급량 보다 크게 될 경우도 허용하며, [3]에서 다루고 있지 않는 공급량이나 수요량이 변할 때 그 변화를 기존 수요지나 공급지에서 흡수할 수 없는 상황에 고려할 수 있는 감도분석 방법을 제시하였다.

이를 위해 본 연구에서는 가상행(dummy row)이나 가상열(dummy column)을 설정하여 부족한 양이나 초과된 양을 그곳에 할당하여 문제의 가능성을 다시 유지시키면서 해의 재최적화를 통해 주어진 최적기저구조를 유지하는 공급량이나 수요량의 변화범위를 구하였다.

따라서 본 연구에서 제시한 방법을 사용하면 [1], [2], [3]에서 제시한 방법을 보완할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

[1] 박순달, 「OR(경영과학)」, 민영사, 1991, pp. 232-236.

[2] 윤석철, 「계량경영학」, 경문사, 1992, pp. 195-208.

[3] H. Arsham, "Postoptimality Analyses of the Transportation Problem", *J. Opl Res. Soc.*, Vol.43, No.2 (1992), pp.121-139.

[4] H. Arsham and A. K. Kahn, "A Simplex-type Algorithm for General Transportation Problems: An Alternative to Stepping Stone", *J. Opl Res. Soc.* Vol.40, No.40 (1989), pp.581-590.

[5] G. Finke and J.H.Ahrens, "A Variant of the Primal Transportation Algorithm",

Infor., Vol.16, No.1 (1978).

[6] Gal Tomas, *Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics*, McGraw-Hill, 1979.

[7] Katta G. Murty, *Linear Programming*, John Wiley & Sons, 1984.

[8] Nemhauser and Kan, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol.1, North-Holland, 1989.

[9] V. Srinivasan and G. L. Thomson, "An Operator Theory of Parametric Programming for the Transportation Problem-I", *Naval Res. logist. Quart.* Vol.19 (1972), pp.205-225.

[10] Wu and Coppins, *Linear Programming and Extensions*, New York: McGraw-Hill, 1981.