韓國經營科學會誌
第19卷 第2號
1994年 8月

경쟁환경에서의 비선형 가격정책 및 재고정책†

이경근*

Competitive Nonlinear Quantity Discount and Inventory Policies†

Kyung Keun Lee*

Abstract

This paper extends the profit maximizing economic order quantity model to the symmetric oligopoly consisting of sellers of a homogeneous product who compete with each other for the same potential buyers. Buyers are classified by type, each selecting an optimal purchase quantity in response to the nonlinear quantity discount pricing schedule given by the sellers.

Symmetric equilibrium and the economic quantities that sellers must determine are analysed in a Cournot framework, which explicitly depend on the number of sellers. Economic implications are obtained from the optimality conditions based on the market share paraments which are used to characterize the competitior's marketing strategy.

1. 서 론

기업의 관리 목표는 기업 내부의 재고 수준을 관리하여 재고 자산 회전율을 제고시켜 기업 이익을 극대화하고자 함에 있으나 그 한계성이 지적되고 있는 실정이다[5].

재고의 합리적인 관리를 위하여 재공품 재고 또는 최종 제품에 대한 많은 연구가 진행되었으나 이러한 재고 관리의 연구는 주로 기업 내부 재고 관리의 합리화에 초점이 맞추어져 있다[10, 13, 14].

기업의 관리 형태가 소품종 대량 생산의 생산자 주도형에서 다품종 소량 생산의 소비자 주도형으로 전환되는 시점에서, 더우기 날로 심해지는 경쟁적 상황에서 기업의 재고 관리 연구에 대한 새로운 시도가 필요하다.

새로운 재고 관리에 대한 연구의 일환으로

† 이 논문은 1992년도 교육부지원 학술진흥재단의 지방대학육성과제 학술연구 조성비에 의하여 연구되었음.
* 부산대학교 산업공학과

독점 공급자와 복수 구매자 사이의 양 계층간 유통 channel에 대한 연구 및 유통 시스템의 합리화를 가격 할인 정책이라는 수단으로 이룩하고자 하는 연구가 진행되어 왔다[6, 7]. 그러나 현실적으로 독점 공급자와 소비자로 구성되는 유통 channel은 찾아보기 어려울 뿐 아니라 모든 기업은 경쟁적 상황에서 기업 이윤 극대화를 목표로 하고 있으나 이와 같은 공급자가 경쟁적 상황에서 일반 소비자와의 유통 시스템의 합리화를 통한 이익 제고에 대한 연구는 부족한 실정이다.

유통 channel의 효율 증대를 위한 재고 정책, 가격 정책 등의 연구는 상당히 최근에 시작되었다. Monahan[11]과 Lee & Rosenblatt [7] 등에 의하여 주로 독점 도매상과 이에 따르는 복수 구매자로 구성되는 유통 channel의 전체 시스템 효율 증대를 가격 할인 정책으로 연구하였으며 Jackson & Muckstadt[4]와 Tagaras[15]등은 재고 자산의 공동 운영에 대한 문제를 다루고 있다.

상기 연구는 주로 도매상, 소매상으로 구성되는 유통 channel로써 관련 당사자 모두의 재고관련비용을 고려하여 연구되었다.

그리고 이경근[1]은 단일 생산자와 복수 구매자로 구성되는 유통 channel에서는 가격할인이 아닌 구매량 증가에 따른 가격인상이라는 가격 정책으로 시스템의 효율증대가 가능함을 경제적 모형수립을 통하여 분석하였다.

유통 channel의 효율 증대에서 광고 등의 효과에 대한 분석은 Teng & Thompson[16]에 의하여 분석되었다.

한편 Lal & Staelin[6], Oren, Smith & Wilson[12], Monahan[11] 등에 의해서도 유통 channel 효율 증대에 가격 할인 정책을 통하여 분석하였으나 공급자의 입장에서 가격정책 및 재고정책의 병행된 의사결정에 대해서는 언급이 없는 실정이다. 독점 공급자의 입장에서의 가격 정책 및 최적 재고 정책의 병행 의사 결정에 관한 연구는 Min[8]에 의하여 수행되었으나 복수 공급자와 일반 소비자로 구성되는 유통 channel에 대한 경제적 분석은 아직 미흡한 실정이다[9].

일반적인 EOQ 재고 정책에서 고려되는 재고 관련 비용 중 공급자에게는 setup 비용 및 재고 유지비가 중요한 고려 대상이나 구매자가 일반 소비자와 같이 구매량이 작은 수많은 구매자에게는 재고 유지비 또는 setup 비용이 일반 소비자의 구매의사결정에 별다른 영향을 끼치지 못한다. 특히 경쟁적 상황에 있는 공급자에게는 일반 소비자에게로 직접 이어지는 유통 channel이 중간상의 개입보다는 더욱 현실적인 유통 channel 합리화의 일환이기도 하다.

이와 같은 상황에서 본 연구에서는 일반 소비자의 재고 관련 비용보다는 구매자의 구매량에 따르는 utility 함수를 도입하여 일반 소비자(구매자)에 대한 특성으로 삼아 분석코자 한다. 또한 독점 공급자와 복수 구매자로 구성되는 유통 channel의 합리화에 대한 기존의 연구는 channel 관련 모든 구매자는 반드시 단일 공급자로 부터 공급되는 독점적 상황에서 channel 당사자 모두에게 유리한 합리화 방안이 연구되었으나 본 연구에서는 일반 소비자의 utility에 만족치 못한 경우 일반 소비자 일부는 복수의 공급자로부터 공급되어지는 상품을 구매하지 않을 수도 있다는 점에 유의하여 가격 할인 정책을 통하여 구매 의욕을 제고 시킬 수 있는 것이다. 즉 가격 할인 정책을 통하여 잠재 구매력이 있는 소비자를 channel 구성 당사자로 이끌어낼 수 있는 것이다[12].

다수의 일반 소비자에게 제시되는 가격 할인

정책은 수많은 소비자의 구매 특성이 utility 함수로 나타난다고 하면 공급자로서는 소비자의 상이한 구매 특성으로부터 소비자의 utility 충족 조건을 만족시키며 공급자의 이익을 극대화 시킬 수 있는 가격 할인 정책이 되어야 의미가 있는 것이다.

한편 복수 공급자에게는 setup 비용이나 재고 유지 비용이 재고 관련 비용으로서 중요한 영향을 미치며 이에 따르는 경제적인 재고 관리 정책에 또한 중요한 의사결정이 요구된다.

즉 경쟁적 상황에 있는 다수 공급자가 일반 소비자로 구성되는 유통 channel에서 공급자의 입장에서 소비자에게 제시하게 되는 가격 할인 정책 및 공급자 내부의 재고 관리 정책을 동시에 결정 함으로써 기업의 이익을 제고시키고자 하는 것이다.

2. 모형의 수립

경쟁 상황에 있는 복수 공급자와 수 많은 일반 소비자로 구성되는 유통 channel의 합리화를 통하여 일반 소비자의 구매 의욕을 고취시켜 일반 소비자의 utility를 충족시키면서 공급자의 이익 극대화를 위한 최적의 가격 할인및 재고정책에 관한 의사결정의 분석을 위하여 먼저 아래의 가정을 하기로 한다.

1) 총 수요는 일정하며 Deterministic이다.
2) 주문량은 주문 즉시 도착한다.
3) 각 공급자는 일반 소비자의 수요에 충족할 만 한 주문을 하며 재고 부족은 없다.
4) 각 소비자는 단일 공급자에게서 구매량 전량을 구매한다. 즉 소비자가 구매량을 나누어서 복수의 공급자에게 주문하지는 않는다.
5) 모든 공급자는 일반 소비자의 선호도의 분포에 대한 정보를 가지고 있다.

2.1 일반 소비자의 구매 의사 결정

먼저 일반 소비자의 구매 의사 결정에 대하여 분석한다. 일반 소비자는 지수 t로 특정지워진다. 지수 t는 각 소비자의 구매 가능량의 정도를 표시하는 것으로 t의 값이 클수록 작은 량의 구매를 선호하는 일반 소비자를 나타낸다. 일반 소비자 타입 t의 값이 연속 누적 분포를 갖는 것으로 가정하면 지수 t는 [0,1]의 상 하한 값을 갖는 Uniform 분포로 가정할 수 있다. 타입 t의 일반 소비자는 구매량 q에 대한 Utility함수를 갖으며 이 Utility를 U(q,t)로 표시한다. 이 Utility 함수는 모든 t와 q에 대해서 $U_{qq} \leq 0$ 이라고 가정한다. 구매량 q에 대한 총 구매비용을 R(q)라고 표기하며 R(q)는 q에 대하여 두번 미분 가능하며 $R''(q) \leq 0$ 이라고 가정한다. 이러한 가정 하에서 타입 t인 일반 구매자의 최적 구매량은 다음과 같이 결정되어진다.

$$q^*(t) = \arg\max_{q>0} [U(q,t) - R(q)] \tag{2.1}$$

상기 식의 1차 최적 조건은 아래 표시된다.

$$\begin{aligned} U_q(q^*, t) &= p(q^*) \quad q^* > 0 \\ &\leq p(0^+) \quad q^* = 0^+ \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\{ U_q = \frac{\partial U}{\partial q} \qquad p(q) = R'(q) \} \tag{2.3}$$

2차 최적 조건은 $U_{qq} = p_q < 0$으로 나타낸다.

$$\{p_q(g) = p'(q) \frac{\partial P}{\partial q} \}$$

이 조건에서 가격 할인율 $p_q(q)$의 절대치가 충분히 큰 경우에는 최적해가 존재하지 않을 수 있으므로 $p_q(q)$의 절대치는 U_{qq}보다 작다고 가정한다. 그리고 1차 최적 조건을 만족하는 $q^*(t)$는 2차 최적 조건을 만족한다고 가정하며 일반적인 비선형 가격 분야에서 채택하고 있는 가정 즉 $p(q)$는 U_q를 아래로부터 많아야 한번 교차 한다 는 가정을 하기로 한다. 또한 일반 소비자 타입 t $(t \in [0,t_1])$는 공급자로부터 비부(Non-negative)의 구매량을 구매하게 될 것이며 t_1은 1이거나 또는 아래의 조건을 만족시키는 경계 소비자 즉 $q^*(t_1)$을 구매하거나 또는 구매하지 않거나 소비자의 Utility가 동일한 소비자를 나타낸다.

$$U(q^*(t_1),\ t_1) = R(q^*(t_1)) \tag{2.4}$$

모든 복수의 공급자가 동일한 조건으로 가격 할인 정책 즉 $R(q)$를 소비자에게 제공하게 되면 경계 소비자 타입 t_1은 모든 공급자에게 동일하게 될 것이며 $0 \leqslant q^*(t_1) \leqslant q^*(t) \leqslant q^*(0)$가 성립하게 된다. 수 많은 일반 소비자에서 모든 소비자가 구매하는 것이 아니고 t_1보다 작은 타입의 소비자가 구매하게 될 것이며 그 밖의 소비자는 구매하지 않는다.

일반 소비자들이 구매하는 구매량중 가장 작은 구매량을 $q_1 = q^*(t_1)$, 가장 큰 구매량을 $q_0 = q^*(0)$라고 표기하기로 하며 $q^*(t)$는 단조함수이므로 다음과 같은 역함수를 정의할 수 있다.

$$t^*(q) = \mathrm{Max}\{t \mid q^*(t) \geqslant q\},\ q \geqslant 0 \tag{2.5}$$

즉 역함수 $t^*(q)$는 일반 소비자중 최적 구매량 q를 구매하는 소비자 타입 t 가운데 가장 큰 값을 나타낸다.

그리고 단위 시간당 총 수요량 $D(t_1)$는 아래와 같다

$$D(t_1) = \int_0^{t_1} q^*(t)dt = q_1 t^*(q_1) + \int_{q_1}^{q_0} t^*(q)dq \tag{2.6}$$

$q^*(t)$는 식(2.2)로부터 결정되어지며 $D(t_1)$은 일정하다고 가정한다.

2.2 공급자의 의사결정

이상의 일반 소비자의 구매 의사 결정을 전제로 하여 공급자의 의사 결정에 대해서 검토키로 한다. 다수의 공급자 n에 대하여 아래와 같은 가정을 하기로 한다.

공급자는 한번에 $Q_i(i=1,\cdots,n)$의 량을 주문 또는 생산하며 주문량은 Lead Time 없이 곧 도착한다. 또한 일반 소비자의 재고 부족에 대해서는 고려하지 않는다.

주문 주기당 총 비용은 구매가(생산가)에 주문비용(Setup 비용)이 포함된 비용 $C(Q_i)$와 단위 시간당 단위 품목 당의 재고 유지 비용 h_i로 구성되며 $C(Q_i)$에 대하여 $C'(Q_i)>0$, $C''(Q_i) \geqslant 0$ 이라고 가정한다.

서로 경쟁적인 n개의 공급자에 대한 순이익은 각 공급자의 시장 점유율에 따라 다르게 되는데 시장 점유율은 다음의 두가지 방법으로 나타낼 수 있는 경우에 대해서 비교 검토키로 한다. 첫째, 단위 시간당 q이상의 구매량을 구매하는 일반 소비자의 비율에 따르는 시장 점유율 즉 각 공급자가 q이상 구매의욕을 지니는 일반 소비자의 주문중에서 얼마만큼의 주문을 확보하느냐에 따르는 시장 점유율을 말하며 일반적인 소비재 품목에 대하여 많이 사용되고 있다. 둘째, 정보산업과 같은 서비스 산업의 시장 점유율은 상기의 시장 점유율과는 상이한

형태를 지닌다. 즉 각 공급자는 일반 소비자중 상위 t에 해당되는 소비자에 판매할 수 있는 판매량으로 시장 점유율을 표시하는 방법이다. 시장 점유율을 어떠한 방법으로 정하느냐에 따라 공급자의 의사결정도 이에 따라 변하게 된다.

첫번 째로 표시된 시장 점유율에 따르는 공급자 i (i=1,2,⋯.,n)의 의사결정은 아래와 같이 결정된다.

$$\text{Max}\ \pi_i = \int_0^{t1} R(q^*(t))d(t^*(q)) - Y_i(q)) -$$

$Q_i,\ t_1,\ R(q(t))$

$$\frac{C(Q_i)}{Q_i}\int_0^{t1} q^*(t)d(t^*(q) - Y_i(q)) - \frac{h_iQ_i}{2}$$

$$=(R(q_1) - \frac{C(Q_i)}{Q_i}q_1)(t_1 - Y_i(q_1)) +$$

$$\int_{q1}^{q0}(t^*(q) - Y_i(q))(R'(q) - \frac{C(Q_i)}{Q_i})dq$$

$$=(U(q_1,\ t_1) - \frac{C(Q_i)}{Q_i}q_1)(t_1 - Y_i(q_1)) +$$

$$\int_{q1}^{q0}(t^*(q) - Y_i(q))(U_q(q,\ t^*(q))$$

$$-\frac{C(Q_i)}{Q_i})dq - \frac{h_iQ_i}{2} \tag{2.7}$$

subject to $U_q(q,\ t^*(q)) = p(q) = R'(q)$ (2.8)

$U(q_1,\ t_1) = R(q_1)$ (2.9)

$t \in [0,\ t_1],\ t_1 < 1,\ q(t_1) > 0$

$Y_1(q)$: 공급자 i이외의 n−1 공급자에 의하여 공급되는 q단위 이상 구매하는 구매자의 비율

q_0 : 일반 소비자가 구매하는 가장 큰 구매량 즉 q(0)

q_1 : 일반 소비자가 구매하는 가장 작은 구매량 즉 $q(t_1)$

한편 두번 째로 정해진 시장 점유율에 따르면 공급자 i(i=1,2⋯,n)의 의사결정은 아래와 같이 수정된다.

$$\text{Max}\ \pi_i = \int_0^{t1}(R(q^*(t)) - \frac{C(Q_i)}{Q_i})q^*(t)d(t^*(q) -$$

$Q_i,\ t_1,\ R(q(t))$

$$S_i(t)) - \frac{h_iQ_i}{2} \tag{2.10}$$

$$q^*(t) = \frac{dT_i(t)}{dS_i(t)} \tag{2.11}$$

subject to $U_q(q,\ t^*(q)) = p(q) = R'(q)$

$U(q_1,\ t_1) = R(q_1)$

$t \in [0,\ t_1],\ t_1 < 1,\ q(t_1) > 0$

$T_i(t)$: 일반 소비자중 상위 t에 해당되는 소비자에게 경쟁 공급자로부터 판매되는 량

$S_i(t)$: 일반 소비자중 [0, t] 사이에 있는 소비자중 경쟁 공급자에게서 구매하게 되는 일반 소비자의 숫자

시장 점유율을 정의한 내용에 따라 공급자의 의사결정도 다르게 됨을 알 수 있다. 두번째로 정의된 시장 점유율에 따르는 경우의 공급자 의사결정에 대하여는 일반 소비자 지수 t의 소비자에 의한 공급자 i의 주문의 숫자는 아래의 조건을 만족시킨다.

$$dS_i(t) = \frac{dT_i(t)}{q(t)} \tag{2.12}$$

3. 모형의 분석

시장 점유율의 정의에 따라 공급자 의사 결정이 상이하므로 각각 모형을 분석하여 비교검토키로 한다.

3.1 일정량 이상 구매하는 일반 소비자의 비율에 따르는 시장 점유율의 경우

공급자의 이익함수(2.7)을 최대로 하기 위하여 변수 $t^*(q)$, Q_i, t_1에 대한 1차 최적 조건을 구하면 아래와 같다.

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial t^*(q)}=U_q(q,\ t^*(q))-\frac{C(Q_i)}{Q_i}+(t^*(q)-Y_i(q))U_{qt}(q,\ t^*(q))=0 \quad (3.1)$$

$$q_1\leq q\leq q_0$$

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial t_1}=U_t(q_1,\ t_1)(t_1-Y_i(q_1))+U(q_1,\ t_1)-\frac{C(Q_i)}{Q_i}q_1=0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial Q_i}=\int_{q1}^{q0}(t^*(q)-Y_i(q))\left(\frac{C(Q_i)-Q_iC'(Q_i)}{Q_i^2}\right)dq+\frac{C(Q_i)-Q_iC'(Q_i)}{Q_i^2}q_1(t_1-Y_i(q_1))-\frac{h_i}{2}=0$$

$$(3.3)$$

즉, $t^*(q)$, Q_i, t_1은 식(3.1)(3.2)(3.3)을 만족시켜야 되며 가격함수 $R(q)$는 아래와 같다. 식(2.8) $R'(q)=U_q(q,\ t^*(q))$를 q_1에서 q까지 적분하면

$$R(q)=\int_{q1}^{q}U_q(q,\ t^*(q))dq+U(q_1,\ t^*(q_1))$$

$$q_1\leq q\leq q_0 \quad (3.4)$$

여기에서 $R(q_1)=U(q_1,\ t^*(q_1))$으로 최소구매량 q_1을 구매하는데 소요되는 총 비용을 나타낸다.

모든 공급자가 동일하다고 가정하면 시장 점유율은 동일하게 되어 아래의 식이 성립한다.

$$Y_i(q)=(1-\frac{1}{n})t^*(q) \qquad (i=1,\cdots,n) \qquad (3.5)$$

상기 식(3.5)을 식(3.1)(3.2)(3.3)에 대입하면

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial t^*(q)}=U_q(q,\ t^*(q))-\frac{C(Q_i)}{Q_i}+\frac{t^*(q)}{n}U_{qt}(q,\ t^*(q))=0 \quad q_1\leq q\leq q_0$$

$$(3.6)$$

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial t_1}=\frac{t_1}{n}U_t(q_1,\ t_1)+U(q_1,\ t_1)-\frac{C(Q_i)}{Q_i}q_1=0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial Q_i}=\int_{q1}^{q0}\frac{t^*(q)}{n}\left(\frac{C(Q_i)-Q_iC'(Q_i)}{Q_i^2}\right)dq+\frac{C(Q_i)-Q_iC'(Q_i)}{Q_i^2}\frac{t_1q_1}{n}-\frac{h_i}{2}=0 \quad (3.8)$$

경쟁 환경에서 공급자 i의 경제적 주문량(생산량) Q_i와 비선형 가격 정책 $R(q)$, 총소요량 $D(t_1)$, 경제소비자 타입 t_1, 일반 소비자의 최대 구매량과 최소 구매량 q_0와 q_1은 비선형 방정식(3.4)(3.6)(3.7)(3.8)(2.6)(2.8)을 풀면 해를 구할 수 있다.

식(3.8)을 다시 정리하면 아래의 식을 얻게 되며

$$\frac{1}{n}\{t_1q_1+\int_{q1}^{q0}t^*(q)dq\}\{\frac{C(Q_i)-Q_iC'(Q_i)}{Q_i^2}\}=\frac{h_i}{2}$$

$$(3.9)$$

$D(t_1)=t_1q_1+\int_{q1}^{q0}t^*(q)dq$이므로 상기식은 다시 아래와 같이 정리된다.

$$\frac{C(Q_i)}{Q_i}-C'(Q_i)=\frac{h_iQ_in}{2D(t_1)} \quad (3.10)$$

결국 최적 조건하에서는 평균 주문비용(생산비용)은 한계 주문비용과 단위당 평균 재고 유지 비용의 합을 나타남을 알 수 있다.

또한 식(3.7)을 q_1에 대하여 미분한 결과는 식(3.6)에 t_1을 대입한 식과 동일한 결과를 얻게 됨을 알 수 있다.

일반 소비자의 구매량 q에서의 수요에 대한 가격탄력성 e(p, q)는 아래와 같이 정의하자 [17].

$$e(p,\ q)=\frac{f(t)}{F(t)}\cdot\frac{U_q}{U_{qt}} \tag{3.11}$$

f(t)는 F(t)에 대한 밀도함수이며 F(t)는 소비자 타입 t보다 작은 소비자의 숫자를 나타낸다. 소비자 타입 지수 t에 대하여 Uniform분포를 가정하였으므로 가격 탄력성은 아래와 같다.

$$e(p,\ q)=\frac{1}{t}\cdot\frac{U_q}{U_{qt}}=\frac{1}{t}\ \frac{p(q)}{U_{qt}}$$

$$\{\ p(q)=R'(q)=U_q\} \tag{3.12}$$

식(3.12)을 식(3.6)에 대입하여 정리하면 아래의 식을 얻는다.

$$p(q)=\frac{ne(p,q)}{ne(p,q)+1}\cdot\frac{C(Q_i)}{Q_i} \tag{3.13}$$

경쟁자의 숫자 n이 고정된 경우 수요에 대한 가격 탄력성이 클수록 즉 |e(p, q)| 가 클수록, 또한 n이 클수록 (즉 n→∞) 가력 탄력성에 관계없이 최적가격 p(q)는 평균주문비용(생산비용)에 근접함을 알 수 있다. $-\frac{1}{n}<e(p,\ q)<0$ 에서는 가격 p(q)는 음의 부호를 갖게 되며 더우기 $e(p,\ q)=-\frac{1}{n}$인 경우에는 식(3.6)을 만족시키는 경제적 주문량(생산량) Q_i를 구할 수 없게 된다. 그러므로 공급자 i의 이익함수 π_i가 양의 숫자를 갖게되기위한 조건은 $e(p,\ q)<\frac{-1}{n}$이 성립되아야 함을 알 수 있다.

위의 조건하에서 $\frac{ne(p,q)}{ne(p,\ q)+1}$을 Make-up율이라고 하면 경쟁자의 숫자 n이 고정된 경우 가격 탄력성이 작을수록 즉 |e(p, q)|가 작을수록 Mark-up율이 커지며 또한 경쟁자의 숫자가 작을수록 Mark-up율이 커지는 것을 알 수 있다.

3.2 일정한 상위 소비자에 대한 판매 가능량으로 시장 점유율을 나타내는 경우

공급자의 이익함수 식(2.10)을 부분적분하여 식(2.8)(2.9)을 대입하면 아래의 이익함수를 구할 수 있다

$$\text{Max}\ \pi_i=(Uq_1,\ t_1)-\frac{C(Q_1)}{Q_1}q_1)(t_1-S_i(t_1))$$

$$-\int_0^{t_1}(t-S_i(t))(U_q(q),\ t^*(q))-\frac{C(Q_i)}{Q_i})$$

$$\frac{dq^*(t)}{dt}dt-\frac{h_iQ_i}{2}$$

$$q^*(t)=\frac{dT_i(t)}{dS_i(t)}$$

$$(T_i(0)=0,\ S_i(0)=0)$$

변수 Q_i에 대한 공급자의 이익함수 (3.14)를 최대로 하는 1차 최적조건은 아래와 같다.

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial Q_i}=\frac{C(Q_i)-Q_iC'(Q_i)}{Q_i^2}q_1(t_1-S_i(t_1))$$

$$-\int_0^{t_1}t-S_i(t))\frac{(C(Q_i)-Q_iC'(Q_i)}{Q_i^2}$$

$$\frac{dq^*(t)}{dt}dt-\frac{h_i}{2}=0 \tag{3.15}$$

다시 모든 공급자가 동일하다고 가정하면 시장 점유율도 동일하게 되어 $S_i(t)=(1-\frac{1}{n})t$가 성립되며 식(3.15)에 대입하면 아래의 식을 구한다.

$$\frac{C(Q_i)-Q_iC'(Q_i)}{nQ_i^2}(q_1t_1-\int_0^{t_1}t\ \frac{dq^*}{dt}dt)=\frac{h_i}{2} \quad (3.16)$$

$D(t_i)=\int_0^{t_1}q^*(t)dt$이므로 상기 식을 정리하면 아래와 같이 정리된다.

$$\frac{C(Q_i)}{Q_i}-C'(Q_i)=\frac{h_iQ_in}{2D(t_1)} \quad (3.17)$$

상기 식(3.17)은 식(3.10)과 동일하며 또한 경제적 의미도 같음을 알 수 있다. 식(3.14)의 q^*와 $\frac{dq^*(t)}{dt}$에 식(2.11)를 대입하여 정리하면 공급자의 이익함수는 함수 $S_i(t)$의 함수로써 표기되며 $S_i(t)$를 구하기 위하여 q_1과 t_1이 고정되어 있다고 가정한 후 Euler 조건을 이용하고 또한 q_1과 t_1은 Transversality 조건을 사용하여 결정할 수 있다.

먼저 $q^*(t)$, $T_i(t)$, $S_i(t)$의 t를 표기상 생략키로 하여 최적의 S_i를 구하기 의한 Euler의 필요조건은 아래와 같다.

$$(U_q(q,\ t^*(q))-\frac{C(Q_i)}{Q_i})\frac{dq}{dt}+\frac{d}{dt}[\frac{q^2}{T_i'}\frac{\partial(U_q(q,t^*(q))-\frac{C'(Q_i)}{Q_i})(t-S_i)}{\partial t}]=0 \quad (3.18)$$

공급자의 동일한 시장점유율을 가정한 $S_i=(1-\frac{1}{n})t$를 대입하면 상기 식은 다음과 같다.

$$(n-1)(U_q(q,\ t^*(q))-\frac{C(Q_i)}{Q_i})\frac{dq}{dt}+\frac{d}{dt}[q\frac{\partial}{\partial t}(t(U_q(q,t^*(q))-\frac{C(Q_i)}{Q_i}))]=0 \quad (3.19)$$

〈식(3.18)(3.19)의 유도는 부록 1을 참조〉

R(q)는 이 경우에도 식(3.4)과 같다.

식(3.19)를 t에 대하여 적분하여 식(3.4)을 대입하면 아래의 식을 얻는다.

$$\{U_q(q,\ t^*(q))-\frac{C(Q_i)}{Q_i}+\frac{t}{n}U_{qt}(q,\ t^*(q))\}(1-\frac{1}{n})+\{\frac{R(q)}{q}-U_q(q,\ t^*(q))\}=\frac{L}{nq} \quad (3.20)$$

L은 적분 상수이며 공급자의 경제적 주문량(생산량) Q_i와 R(q)등은 비선형 방정식 (2.8)(2.9)(3.4)(3.10)(3.20)과 Transversality 조건식 (B2)와 (B4)를 연립하여 풀면 구할 수 있다. 〈식(B2)와 (B4)는 부록 2를 참조〉

식(3.20)의 첫번째 항은 식(3.6)과 동일함을 알 수 있으며 Monopoly인 경우 (n=1)에는 식(3.20)과 식(3.6)이 동일함을 알 수 있다.

이렇게 구한 해는 반드시 $U_q(q,\ t)\geq\frac{C(Q_i)}{Q_i}$를 만족시키지 않으므로 이러한 경우에는 $t^*(q)$를 $U_q(q,\ t^*)=\frac{C(Q_i)}{Q_i}$가 만족되게 취함으로써 공급자의 이익을 최대로 할 수 있다.

즉, 식(3.13)을 만족시키는 q가 음수의 한계이익을 나타낼 때는 평균 재고 비용 (생산비용)을 한계 가격 정책으로 채택함을 의미한다. 즉, 최적 한계가격정책은 Max $\{p(q),\ \frac{C(Q_i)}{Q_i}\}$으로 결정됨을 의미한다.

또한, 가격 탄력성에 관한 식(3.12)를 식(3.20)에 대입하면 아래의 식을 구할 수 있다.

$$\{p(q)(1+\frac{1}{ne(p.\ q)})-\frac{C(Q_i)}{Q_i}\}+(1-\frac{1}{n})\{\frac{R(q)}{q}-p(q)\}-\frac{L}{nq}=0 \quad (3.21)$$

득점 공급자인 경우(n=1) 식(3.21)은 다음과 같이 표시된다.

$$p(q)=\frac{e(p,q)}{e(p,q)+1}\cdot\frac{C(Q_i)}{Q_i} \tag{3.22}$$

공급자의 이익 함수가 양의 값을 갖기 위하여는 $e(p,\ q)<-1$이 되어야 하며 완전경쟁의 경우($n=\infty$)에는 $\frac{R(q)}{q}=\frac{C(Q_i)}{Q_i}$이 성립되어 공급자로서는 이익이 "zero"가 됨을 알 수 있다.

일반 소비자의 구매량에 대하여는 독점공급자의 경우나 완전경쟁의 경우 모두 최대 구매량 중 마지막 단위에 대하여는 평균 주문비용(생산비용)으로 구매되며 아래의 식으로부터 알 수 있다.

$$U_q(q_0,\ 0)=R'(q_0)=p(q_0)=\frac{C(Q_i)}{Q_i} \tag{3.23}$$

유한 공급자의 경우 즉, $1<n<\infty$인 경우에는 일반 소비자의 최대 구매량은 상기 식으로부터 결정되어지나 최소 구매량 q_1과 이에 해당되는 경계 소비자 타입 t_1은 Transversality 조건으로 부터 결정되어 있다(부록 2참조)

그리고 주문비용(생산비용)은 고정비(Setup 비용)과 변동비를 모두 포함하므로 최소 구매량은 "zero"가 되지 않는다. 즉 이 량은 Subscription fee를 결정짓는 것이라고 생각할 수 있다. 이 Subscription fee는 실제로 일반 소비자 중 구매할 소비자를 결정지으며 또한 구매량을 결정짓는 것이다.

4. 결론

경쟁 환경에서의 공급자의 재고 정책 및 비선형 가격 할인 정책을 동시에 결정할 수 있는 모형을 각 공급자의 시장 점유율을 (1)일정량 이상의 구매량을 구매하는 일반 소비자의 비율에 따르는 경우와 (2) 일반 소비자 중 일정 상위 소비자들에게 판매할 수 있는 판매량으로 결정하는 두가지 경우에 대해서 각각 수립하고 두가지 경우에 대하여 최적 조건 등을 통하여 비교 분석하였다.

재고 정책에 대하여는 두가지 경우 동일한 경제적 의미를 갖고 있음을 알았으나 비선형 가격 정책은 두가지 경우 유사점도 발견하였으나 동일하지 않음을 알 수 있었다.

시장 점유율은 일정 금액 이상 구매하는 일반 소비자의 비율로 정의할 수 있는 경우에로의 모형 확장은 경쟁 환경에서의 의사결정을 더욱 다양화된 시각으로 분석할 수 있으며 금번 모형에서 고려하지 못한 현실적인 문제로 재고 부족, 불확실한 수요, 또는 광고 효과 등에 대한 검토는 모형을 더욱 더 깊이 있게 할 수 있을 것이다.

[부록 1]

식(2.31)과 식(2.32)를 구하기 위하여 Euler 조건을 이용하면 아래의 식을 얻는다.

$$\frac{\partial f}{\partial Y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial Y'}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial Y''}\right)\right)=0 \qquad (A1)$$

where $f(t, Y, Y', Y'')=-(t-Y)$

$$(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\frac{dq}{dt}$$

with $q=\frac{T'}{Y'}$ $\quad \frac{dq}{dt}=\frac{(T''-Y''q)q}{T''}$

그리고 아래의 식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial Y}=(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\frac{dq}{dt} \qquad (A2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y'}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial Y''}\right)=-\frac{T'}{(Y')^2}\ \frac{\partial f}{\partial q}$$

$$-\frac{d}{dt}\left[(t-Y)U_q-\frac{C(Q)}{Q}\ \frac{q^2}{T'}\right] \qquad (A3)$$

식 (A2)와 (A3)을 (A1)에 대입하면 아래의 식을 얻는다.

$$(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\frac{dq}{dt}+\frac{d}{dt}\left[\frac{q^2}{T'}\ \frac{\partial f}{\partial q}\right.$$

$$\left.+\frac{d}{dt}\{(t-Y)(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\ \frac{q^2}{T'}\}\right]=0 \qquad (A4)$$

그리고 또한 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$\frac{\partial f}{\partial q}=-(t-Y)\frac{\partial}{\partial q}(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\frac{dq}{dt}-(t-Y)$$

$$(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\ \left(\frac{(T''-2Y''q)}{T'}\right) \qquad (A5)$$

$$\frac{d}{dt}\{(t-Y)(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\ \frac{q^2}{T'}\}$$

$$=(1-Y')(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\ \frac{q^2}{T'}$$

$$+(t-Y)\frac{d}{dt}(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\ \frac{q^2}{T'} \qquad (A6)$$

$$+(t-Y)(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{T'}\right)$$

$$(t-Y)(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{T'}\right)=(t-Y)$$

$$(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\frac{q^2}{T'}\left(\frac{T'-2Y''q}{T'}\right) \qquad (A7)$$

식 (A7)을 (A6)에 대입한 후 다시 식(A6)과 식(A5)를 식 (A4)에 대입하면 아래의 식을 구할 수 있다.

$$(t-Y)\left[\frac{\partial}{\partial t}(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\right]+(1-Y')$$

$$(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\frac{q^2}{T'}=0 \qquad (A8)$$

그러므로 우리는 다음의 Euler조건식을 구할 수 있다.

$$(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\frac{dq}{dt}+\frac{d}{dt}\{\frac{q^2}{T'}$$

$$\frac{\partial(U_q-\frac{C(Q)}{Q})(t-Y)}{\partial t}\}=0 \qquad (A9)$$

$Y=\frac{n-1}{n}t$ 와 $\frac{q}{T'}=\frac{1}{Y'}=\frac{n}{n-1}$를 식(A9)에 대입하면 아래의 식을 구할 수 있다.

$$(n-1)(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\frac{dq}{dt}+\frac{d}{dt}$$

$$\left[q\frac{\partial}{\partial t}\{t(U_q-\frac{C(Q)}{Q})\}\right]=0 \qquad (A10)$$

[부록 2]

공급자의 이익함수 식(3.14)의 $S_i(t)$에 대한 Transversality 조건은 아래와 같이 표시된다.[2]

$$U(q_1, t_1)-\frac{C(Q)}{Q}q_1-q_1\{U_q(q_1, t_1)-\frac{C(Q)}{Q}\}\{1-\frac{q_1}{T'(t_1)}\}=0 \qquad (n>1) \qquad (B1)$$

동일 공급자인 경우 $T'(t_1)=\frac{n\text{-}1}{n}q_1$을 (B1)에 대입하면 아래의 식을 구할 수 있다.

$$U(q_1, t_1)-\frac{C(Q)}{Q}q_1+\frac{q_1\{U_q(q_1, t_1)-\frac{C(Q)}{Q}\}}{n\text{-}1}=0 \qquad (B2)$$

또한, 이익함수 식(3.14)의 t_1에 대한 Tranversality 조건은 아래와 같이 표시된다.[2]

$$U(q_1, t_1)-\frac{C(Q)}{Q}q_1-q_1\{U_q(q_1, t_1)-\frac{C(Q)}{Q}\}\{1-\frac{T'}{q_1}-(t-Y(t_1))\frac{T''}{T'}\}+\{t-Y(t_1)\}\frac{\partial U(q_1, t_1)}{\partial t_1}=0 \qquad (B3)$$

동일 공급자인 경우 식(B3)을 정리하면 아래의 식을 구한다.

$$n\{U(q_1, t_1)-\frac{C(Q)}{Q}q_1\}+q_1\{U(q_1, t_1)-\frac{C(Q)}{Q}\}(q_1-t_1\frac{dq_1}{dt_1})+t_1U_t(q_1, t_1)=0 \qquad (B4)$$

독점 공급자인 경우 (B4)는 첫번째와 마지막 항으로만 구성되며 이것은 식(3.7)에 n=1을 대입한 것과 동일하게 됨을 알 수 있다.

또한 완전 경쟁인 경우 식(B4)는 $U(q_1, t_1)=\frac{C(Q_i)}{Q_i}q_1$으로 되며 이것도 $R(q_1)=\frac{C(Q_i)}{Q_i}q_1$임을 알 수 있으며 그러므로 $R(q)=\frac{C(Q_i)}{Q_i}$ $(q\geq q_1)$임을 알 수 있다.

참고문헌

[1] 이경근, "비선형 가격정책에 의한 생산자와 다수 구매자간의 양계측 재고 관리모형," 한국경영과학지, 제17권 제2호, (1992), pp 3-14.

[2] Elsgolc, L. E., *Calculus of Variations*. *Addision-Wesley*, Reading, Mass, 1962.

[3] Goldman, M., H. Leland and D. Sibley, "Optimal nonuniform prices," *Review of Economic Studies*, 51, (1984), pp 305-319.

[4] Jackson, P. L. and J. A. Muckstadt, "Risk Pooling in a Two-Period, Two-Echelon Inventory Stocking and Allocation Problem," Naval Research Logistics, Vol. 36, (1989), pp 1-26.

[5] Karmarkar, U., "Getting Control of Just-In-Time," *Havard Business Review*, (1989), pp 122-131.

[6] Lal, R. and R. Staelin., "An approach for developing an optimal discount pricing policy," *Management Science*, Vol. 30, (1984), pp 1524-1539.

[7]. Lee, H. and M. Rosenblatt "A general-

ized quantity discount pricing model to increase supplier's profits," *Management Science*, 32, (1986), pp1177-1185.

[8] Min, K. J., "Inventory and quantity discount pricing policies under profit maximization," *Operations Research Letters*, 11, (1992), pp 187-193.

[9] Min, K. J., "Inventory and pricing policies under competition," *Operations Research Letters*, 12, (1992), pp 253-261.

[10] Mitchell, J. C., "Multi-Item System with a Service Objective" *Operations research*, Vol. 36, No. 5,(1988), pp 747-755.

[11] Monahan, J., "A quantity discount pricing model to increase vendor profits," *Management Science*, 30, (1984), pp 720-726.

[12] Oren, S., S. Smith and R. Wilson, "Competitive nonlinear tariffs," *Journal of Economic Theory*, 29, (1983), pp 49-71.

[13] Rosling, K., "Optimal Inventory Policies for Assembly System under Random Demands," *Operations Research*, Vol. 37, No. 4, (1989), pp 565-579.

[14] Sethi, S. P., C. Sriskandarajah, G. K. Tayi and M. R. Rao, "Heuristic Method for Selection and Ordering of Part-Orienting Device," *Operations Research*, Vol. 38, No. 1, (1990), pp 84-98.

[15] Tagaras, G., "Effect of Pooling on the Optimization and Service Levels of Two-Location Inventory Systems," *IIE Transactions*, Vol. 21, No. 3, (1989), pp 250-257.

[16] Teng, J. and G. Thompson, "Oligopoly models for optimal advertising when production costs obey a learning curve, " *Management Science*, Vol. 29,, (1983), pp 1087-1101.

[17] Varian, H., *Microeconomic Analysis* W. Norton and Co., New York, 1984.