韓國經營科學會誌
第19卷 第1號
1994年 4月

일정스트레스 가속수명시험의 경제적 설계†

윤원영* · 반한석*

An Economic Design of Constant Stress Accelerated Life Tests†

Won-Young Yun*, Han-Suk Pan*

Abstract

This paper deals with an economic design of accelerated life test under constant stresses where failure times are exponentially distributed.

In this case, the optimization criterion is the information amount per unit cost. Fisher's information matrix of exponential distribution's parameters and expected cost considering fixed and variable costs are obtained. The decision variable is the censoring time in this model.

In the 2-level constant stress case, it is proved that the optimal solution exists and is unique under some condition. Numerical examples are also included.

1. 서 론

현대의 전자, 기계 부품 및 제품들은 정상적인 사용조건하에서의 수명이 매우 긴 높은 신뢰성을 가지는 경우가 많다. 이들 제품의 수명시험을 실제 사용할 때의 스트레스 수준(설계스트레스 수준)에서 수행하게되면 제품의 수명에 대한 정보를 빠른 시간내에 얻기 어렵다. 또, 소비자의 제품에 대한 기호는 변화가 심하고 다양하기 때문에 새로운 제품이 계속 개발되므로해서 제품의 수명주기(life cycle)가 점점 짧아지고 있으므로 수명시험을 빠른 시간내에 완료하여야 할 필요성이 증가하고 있다. 따라서 빠른 시간내에 제품의 수명에 대한 정보를 얻기위한 경우에는 스트레스조건(온도, 전압, 압력, 진동, 부하 또는 그들의 조합등)을 보다 가혹한 조건으로 시험하는 가속수명시험을 수

† 본 연구는 91년도 한국 학술진흥재단 자유공모과제로 연구되었음.
* 부산대학교 산업공학과

행하여 여기서 얻은 시험결과를 이용하여 실제로 소비자가 그 제품을 사용할때의 조건에서의 수명을 예측하게 된다.

가속 수명 시험의 종류는 다양한 방법으로 분류가능하다. 시험제품에 스트레스를 가하는 방법에 따라 분류하면 일정스트레스시험방법(Constant Stress Method), 단계스트레스시험방법(Step Stress Method), 증가스트레스시험방법(Progressive Stress Method)등이 있다. 가속수명시험에 대한 연구로서는 가속수명시험을 어떻게 수행할 것인가를 결정하는 최적시험설계문제(시험의 조건－시험수준, 각 수준에서의 할당비율, 관측중단시점, 수준의 변경시점이나 그 들의 조합－을 결정)과 가속수명시험자료로부터 실제 사용조건에서의 수명분포에 대한 추정문제로 나눌 수 있다.

본 논문은 일정스트레스시험방법에서의 최적수명시험 설계에 관한 것으로 이와관련된 기존연구로서는 Chernoff[1,2]와 Yum과 Choi[12]는 지수분포에서의 최적 설계를 다루었다. 특히 Chernoff[2]는 지수분포의 경우에 비용이 설계수준의 평균수명에 비례할 경우의 최적화 문제를 다루었다. Mann[4], Kielpinski와 Nelson[3], Meeker와 Nelson[9], Nelson과 Kielpinski[10], Nelson과 Meeker[11], Meeker[5], Meeker와 Hahn[8]등은 고장 분포가 와이블 또는 대수정규분포이며 관측중단(Type I)이 있는 경우에 대한 최적 설계문제를 다루었다. Meeker와 Hahn[6,7]은 로지스틱분포에 대한 최적설계를 다루었다. 기존의 설계에 관한 연구에서 사용한 최적화 기준은 사용 단계에서 100pth percentile의 최우추정량의 점근적 분산이며 이 분산을 최소로 하는 스트레스수준, 샘플의 할당비율이나 관측중단시점들을 구하였다.

본 논문에서는 비용을 고려한 최적설계문제를 다루고자 한다. 고려되는 비용으로는 시험의 고정비, 수준에 독립적인 변동비, 수준에 따른 변동비등이며, 수명분포는 지수분포를 가정하고 일정스트레스 가속시험방법을 채택하였다. 최적기준으로는 단위 비용당 정보량을 선택하였으며 이 기준을 최대로 하는 관측중단시점(censoring time)을 구하고자 한다. 모형의 설정은 다수준에 대한 모형을 구하고 스트레스수준이 2수준인 경우에 대하여 최적관측중단시점이 존재함을 보이고 수치예제를 다루었다.

2. 모 형

본 논문에서 사용된 기호는 다음과 같다.

T : 관측 중단 시점(결정변수)

t : 고장 시간의 관측값

n : 가속 시험 수준의 수

r : 시험에 사용된 제품의 총수

r_i : 각 수준 i에서 관측중단 시점 T까지 고장난 제품의 수

p_i : 각 수준 i에 할당된 시험제품의 비율

s_i : 시험의 수준

x_i : 표준화된 시험의 수준(설계수준=0, 높은 수준=1)

α_i : 각 수준 i의 평균 수명

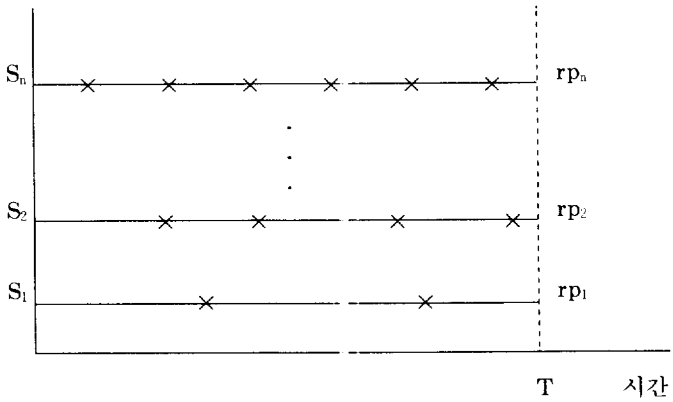
a,b : 시험수준과 평균 수명간의 관계모수

C_F : 제품 하나를 시험할 때의 시험의 고정비

C_f : 제품 하나를 시험할 때 수준에 관계없이 시간에 따른 비용

C_i : 수준과 시간에 따른 비용

본 논문에서는 시험제품의 고장분포가 지수



T : 관측중단시점

[그림 1] 세수준 일정 가속수명시험의 방법

분포를 따를때 다수준 일정가속방법의 가속수명시험에서 비용모형을 제안하고 이 모형에 근거한 경제적 시험의 설계를 다룬다. 일정가속방법에서의 시험상황은 [그림 1]과 같이 r개의 제품을 수준 S_i에 각각 p_i의 비율로 할당한 후 관측중단시점 T까지 시험하면서 제품의 고장상황을 관측한다.

[가정]

1) 일정 수준 스트레스 하에서의 고장 분포는 지수 분포이다.
2) 스트레스의 수준과 고장 분포의 모수와의 관계는 $Log\ \alpha_i = a + bx_i$ 이다.
3) 각 시험제품의 고장은 서로 독립이다.
4) 관측 중단 시점 T가 결정변수이다.

단위비용당 정보량을 구하기 위해 정보량과 기대비용을 구해야한다. 설계수준에서의 수명에 대한 정보량은 Fisher의 정보 행렬로부터 구할 수 있다.

제품의 평균수명이 α_i일때 고장분포함수 및 고장밀도함수는 다음과 같다.

$$F(t) = 1-\exp(\frac{-t}{\alpha_i}),\ 0 \le t$$

$$f(t) = \frac{1}{\alpha_i}\exp(\frac{-t}{\alpha_i}),\ 0 \le t$$

이 모형에서 어느 한 수준 i에서 $m(=rp_i)$개의 제품을 시험한다면 그 수준에서의 관측치들의 우도함수는

$$L(\alpha_i) = \prod_{j=1}^{r_i} \frac{1}{\alpha_i}\exp(\frac{-t_i}{\alpha_i}) \times \prod_{j=1}^{m-r_i} \exp(\frac{-T}{\alpha_i})$$

이다.

여기서 $Log\ \alpha_i = a+bx_i$이므로 a와 b에 대한 대수우도함수는

$$LogL(a,b) = Log[\prod_{j=1}^{r_i} \frac{1}{\exp(a+bx_i)} \exp(\frac{-t_i}{\exp(a+bx_i)}) \times \prod_{j=1}^{m-r_i} \exp(\frac{-T}{\exp(a+bx_i)})]$$
$$= -r_i(a+bx_i) - \exp(-a-bx_i)[\sum_{j=1}^{r_i} t_i + (m-r_i)T] \qquad (1)$$

이다. (1)식의 1,2차편미분식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial(LogL(a,b))}{\partial a} = -r_i + \exp(-a-bx_i)$$
$$[\textstyle\sum_{j=1}^{ri} t_j + (m - r_i)T]$$
$$\frac{\partial(LogL(a,b))}{\partial b} = -r_i x_i + x_i \exp(-a-bx_i)$$
$$[\textstyle\sum_{j=1}^{ri} t_j + (m - r_i)T]$$
$$\frac{\partial^2(LogL(a,b))}{\partial a^2} = -\exp(-a-bx_i)$$
$$[\textstyle\sum_{j=1}^{ri} t_j + (m - r_i)T]$$
$$\frac{\partial^2(LogL(a,b))}{\partial b^2} = -x_i^2 \exp(-a-bx_i)$$
$$[\textstyle\sum_{j=1}^{ri} t_j + (m - r_i)T]$$
$$\frac{\partial^2(LogL(a,b))}{\partial a \partial b} = -x_i \exp(-a-bx_i)$$
$$[\textstyle\sum_{j=1}^{ri} t_j + (m - r_i)T]$$

$E[\frac{\partial(LogL(a,b))}{\partial a}] = E[\frac{\partial(LogL(a,b))}{\partial b}]$ = 0을 만족하므로 수준i에서 m개의 제품을 시험할 때의 Fisher의 정보행렬을 구하면

$$F_i = \begin{vmatrix} r_i & r_i x_i \\ r_i x_i & r_i x_i^2 \end{vmatrix}$$
$$r_i = m(1-\exp[\frac{-T}{\alpha_i}])$$

그러므로 r개의 제품을 시험할 때의 총 $Fisher$의 정보행렬은

$$F = \textstyle\sum_{i=1}^{n} r p_i \begin{vmatrix} 1-exp[\frac{-T}{\alpha_i}] & (1-exp[\frac{-T}{\alpha_i}])x_i \\ (1-\exp[\frac{-T}{\alpha_i}])x_i & (1-\exp[\frac{-T}{\alpha_i}])x_i^2 \end{vmatrix}$$

이며 설계수준에서의 평균 수명에 대한 정보량은

$$\sum_{i=1}^{n} r p_i (1-\exp[\frac{-T}{\alpha_i}]) \qquad (2)$$

이다.

그리고 총기대비용은 다음과 같다.

$$rC_F + rC_f T + r\textstyle\sum_i^n C_i p_i \Big[\int_0^T \frac{t}{\alpha_i}\exp(\frac{-t}{\alpha_i})dt + T \int_T^\infty \frac{1}{\alpha_i}\exp(\frac{-t}{\alpha_i})dt\Big] = r\Big\{C_F + C_f T + \textstyle\sum_{i=1}^n C_i p_i \alpha_i (1-\exp(\frac{-T}{\alpha_i}))\Big\} \qquad (3)$$

(2)와 (3)에서 단위비용당 정보량은

$$IC(T) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i(1-\exp[\frac{-T}{\alpha_i}])}{C_F + C_f T + \sum_{i=1}^n C_i p_i \alpha_i (1-\exp[\frac{-T}{\alpha_i}])} \qquad (4)$$

이다. (4)식을 최대로 하는 T*값을 찾아야 한다. 그러나 해석적인 방법으로 최적화하기 어려우므로 다음과 같이 컴퓨터를 이용하여 단계적으로 찾을 수 있을 것이다.

1) 관심영역에서 그래프를 그린다.
2) 원하는 구간에서 극대값이 있으면 1차미분식의 근을 찾아 최적의 관측중단시점 T를 찾는다.

이같은 방법을 예제를 통해 살펴보고자 한다.

예제 1) 세수준 가속 수명시험 데이타가 다음과 같을 때 최적 관측중단시점을 구한다.

높은, 중간, 낮은 수준의 평균 수명(α_i) : 25, 50, 80(시간)

높은, 중간, 낮은 수준의 할당 비율(p_i) : 1/7, 2/7, 4/7

높은, 중간, 낮은 수준의 시험 비용(C_i) : 300, 200, 100(원/시간)

가속 수명 시험의 고정비(C_F) : 2,000(원/개)

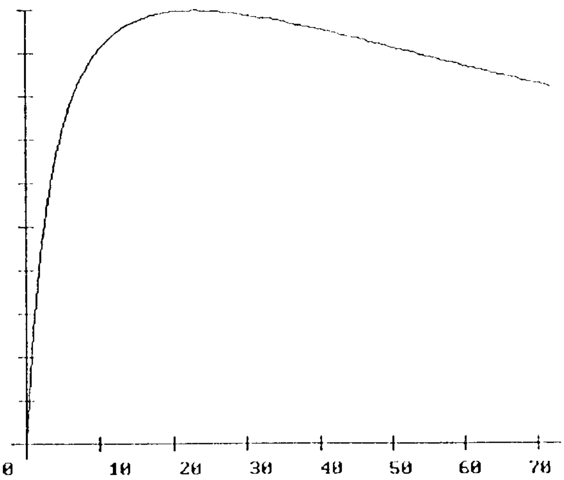
수준에 관계없이 시간에 따른 비용(C_t) : 300(원/시간/개)

이때 목적함수는

$$IC(T) = \frac{\sum_{i=1}^{3} p_i(1-\exp[\frac{-T}{\alpha_i}])}{2000+300T+\sum_{i=1}^{3} C_i p_i \alpha_i(1-\exp[\frac{-T}{\alpha_i}])}$$

위 함수를 T의 일정영역에서 살펴본 그래프는 [그림 2]와 같다. 여기서 보면 22와 23시간 사이에 국소극대값이 있음을 알 수 있다. 목적함수의 1차 미분식을 0으로 하는 관측중단시점을 이분법으로 찾으면 최적의 관측중단시점은 다음과 같다.

T* = 22.6791시간



[그림 2] 세수준 가속수명시험의 목적함수의 그래프

〈2수준일 경우〉

다수준일경우 식(4)를 최대로하는 T*를 해석적으로 찾을 수 없으나 만일 2수준일 경우에는 다음의 정리(1)에의해 최적해를 구할 수 있다.

시험을 높은 수준과 낮은 수준의 2수준에서만 시행한다면 목적함수는

$$IC(T) = \frac{\sum_{i=1}^{2} p_i(1-\exp[\frac{-T}{\alpha_i}])}{C_F+C_tT+\sum_{i=1}^{2} C_i p_i \alpha_i(1-\exp[\frac{-T}{\alpha_i}])} \quad (5)$$

정리 1) $C_2\alpha_2 > C_1\alpha_1$이라면 한개의 최대값을 갖는다.(증명은 부록참조)

예제 2) 2수준 가속 수명시험의 데이타가 다음과 같이 주어졌을 때 경제적인 관측중단시점을 구해보자.

높은, 낮은 수준의 평균 수명 : 25, 80(시간)

높은, 낮은 수준의 할당 비율 : 3/7, 4/7

높은, 낮은 수준의 시험 비용 : 300, 50(원/시간)

가속 수명 시험의 고정비 : 2,000(원/개)

수준에 관계없이 시간에 따른 비용 : 300(원/시간/개)

최적관측중단시점 T*=19.5 시간이다.

3. 결 론

본 논문에서는 제품의 수명분포가 지수분포이고 정시관측중단의 경우에 대하여 가속수명시험의 경제적 설계에 대한 문제를 다루었다. 제품의 평균수명과 스트레스의 수준사이에는 대수선형관계를 가정하고 최적설계의 기준은 단위비용당 정보량으로 하였다.

먼저 다수준 일정가속수명시험에 대하여 경제적인 관측중단 시점의 결정에 관한 문제를 다루었다.

다수준 일정가속수명시험의 경우에는 컴퓨터를 이용하여 관측중단시점에 따른 목적함수의 변화를 설펴보고 의미국소최적해가 존재하는 구간을 찾고 이구간에서 수치해석적인 방법으로 국소최적해를 찾을 수 있음을 보였다.

특히 2수준일정가속수명시험의 경우에는 특정한 조건하에서는 최적해가 존재함을 보였다.

앞으로 연구되어야 할 과제는 다수준일정가속수명시험의 3수준이상의 경우에 대한 목적함수의 특성분석이 이루어져야 한다. 그리고 지수분포외의 분포에 대한 연구도 계속되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] Chernoff, H., "Locally Optimal Designs for Estimating Parameters", *Annals of Mathematical Statistics* vol.24(1953), pp586－602.

[2] Chernoff, H., "Optimal Accelerated Life Design for Estimation", *Technometrices*, vol.4(1962), pp381－408.

[3] Kielpinski, T. J. and W. Nelson, "Optimum Censored Accelerated Life Tests for Normal and Lognormal Life Distributions", *IEEE Transactions on Reliability*, vol.R－24(1975), pp310－320.

[4] Mann, N. R., "Design of Over－Stress Life Test Experiments When Failure Times have the Two－Parameter Weibull Distribution", *Technometrics*, vol. 14(1972), pp437－451.

[5] Meeker, W. Q., "A Comparsion of Accelerated Life Test Planns for Weibull Distributions and Type I Censoring", *Technometrics*, vol.26(1984), pp157－171.

[6] Meeker, W. Q. and G. J. Hahn, "Asymptotically Optimum over Stress Tests to Estimate the Survival Probability at a Condition with a Low Expected Failure Probability", *Technometrics*, vol.19(1977), pp381－399.

[7] Meeker, W. Q. and G. J. Hahn, "A Comparsion of Accelerated Test Plans to Estimate the Survival Probability at a Design Stress", *Technometrics*, vol.20(1978), pp245－247.

[8] Meeker, W. Q. and G. J. Hahn, "How to Plan an Accelerated Life Test－Some practical Guidelines", *American Society of Quality Congress.(1985)*

[9] Meeker, W. Q. and W. Nelson, "Optimum Accelerated Life Tests for Weibull and Extreme Value Distributions", *IEEE Transactions on Reliabilitys*, vol.R－24(1975), pp321－332.

[10] Nelson, W. and T. J. Kielpinski, "Theory for Optimum Censored Accelerated Life Tests for Normal and Lognormal Life Distributions", *Technometrics*, vol.18(1976), pp105－114.

[11] Nelson, W. and W. Q. Meeker, "Theory for Optimum Accelerated Censored Life Tests for Weibull and Extreme

Value Distributions", *Technometrics*, vol.20(1978), pp171-177.

[12] Yum, B. J. and S. C. Choi, "Optimal Design of Accelerated Life Tests under Periodic Inspection", *Naval Research Logistics*, vol.36(1989), pp779-795.

부 록

〈정리 1의 증명〉

목적함수의 분자와 분모를

$$a(T)=\sum_{i=1}^{2} p_i\left(1-\exp\left[\frac{-T}{\alpha_i}\right]\right)$$

$$b(T)=C_F+C_fT+\sum_{i=1}^{2} C_i p_i \alpha_i\left(1-\exp\left[\frac{-T}{\alpha_i}\right]\right)$$

라고 두면

$$\frac{dIC(T)}{dT}=\frac{a'(T)b(T)-a(T)b'(T)}{(b(T))^2} \qquad (A-1)$$

가 된다. 여기서 (A-1)식의 분자를

$$D(T)=a'(T)b(T)-a(T)b'(T)$$

라고 두고 이식의 *1*차미분식

$$\begin{aligned}\frac{dD(T)}{dT} &= a''(T)b(T)-a(T)b''(T)\\ &= -C_F\left(\frac{p_1}{\alpha_1^2}\exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}\right]+\frac{p_2}{\alpha_2^2}exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}\right]\right)-C_fT\left(\frac{p_1}{\alpha_1^2}\exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}\right]+\frac{p_2}{\alpha_2^2}exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}\right]\right)+\left(\frac{C_2p_1p_2\alpha_2}{\alpha_1^2}-\frac{C_1p_1p_2}{\alpha_1}+\frac{C_1p_1p_2\alpha_1}{\alpha_2^2}-\frac{C_2p_1p_2}{\alpha_2}\right)\\ &\quad \exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}+\frac{T}{\alpha_2}\right] \qquad (A-2)\\ &\quad -\exp\left[\frac{-T}{\alpha_2}\right]\left\{\left(\frac{C_2p_1p_2\alpha_2}{\alpha_1^2}-\frac{C_1p_1p_2}{\alpha_1}\right)\exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}+\frac{T}{\alpha_2}\right]+\left(\frac{C_1p_1p_2\alpha_1}{\alpha_2^2}-\frac{C_2p_1p_2}{\alpha_2}\right)\right\}\end{aligned}$$

이며 이 식에서 만약 $C_2\alpha_2 > C_1\alpha_1$이라면

i) $-C_F\left(\frac{p_1}{\alpha_1^2}\exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}\right]+\frac{p_2}{\alpha_2^2}\exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}\right]\right)<0$

ii) $-C_fT\left(\frac{p_1}{\alpha_1^2}\exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}\right]+\frac{p_2}{\alpha_2^2}\exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}\right]\right) < 0$

iii) $\left(\frac{C_2p_1p_2\alpha_2}{\alpha_1^2}-\frac{C_1p_1p_2}{\alpha_1}+\frac{C_1p_1p_2\alpha_1}{\alpha_2^2}-\frac{C_2p_1p_2}{\alpha_2}\right)\exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}+\frac{T}{\alpha_2}\right] < 0$ 이고

iv) $-exp\left[\frac{-T}{\alpha_2}\right]\left\{\left(\frac{C_2p_1p_2\alpha_2}{\alpha_1^2}-\frac{C_1p_1p_2}{\alpha_1}\right)\exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}+\frac{T}{\alpha_2}\right]+\left(\frac{C_1p_1p_2\alpha_1}{\alpha_2^2}-\frac{C_2p_1p_2}{\alpha_2}\right)\right\}$ (A-3)

여기서

$$\left\{\left(\frac{C_2p_1p_2\alpha_2}{\alpha_1^2}-\frac{C_1p_1p_2}{\alpha_1}\right)\exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}+\frac{T}{\alpha_2}\right]+\left(\frac{C_1p_1p_2\alpha_1}{\alpha_2^2}-\frac{C_2p_1p_2}{\alpha_2}\right)\right\} \qquad (A-4)$$

의 1차미분식은

$$\left(\frac{1}{\alpha_2}-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(\frac{C_2p_1p_2\alpha_2}{\alpha_1^2}-\frac{C_1p_1p_2}{\alpha_1}\right)\exp\left[\frac{T}{\alpha_2}-\frac{T}{\alpha_1}\right] > 0$$

이므로 $(A-4)$식은 단조증가함수이다.

$$\left\{\left(\frac{C_2p_1p_2\alpha_2}{\alpha_1^2}-\frac{C_1p_1p_2}{\alpha_1}\right)\exp\left[\frac{-T}{\alpha_1}+\frac{T}{\alpha_2}\right]+\left(\frac{C_1p_1p_2\alpha_1}{\alpha_2^2}-\frac{C_2p_1p_2}{\alpha_2}\right)\right\} = 0$$

을 만족시키는 T를 구하면 $T = \alpha_1\alpha_2\log\left(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right) + (\alpha_2-\alpha_1) < 0$ 이다.

그러나 T의 범위는 양수이고 단조증가함수이므로 (A−4)식은 T의 전 범위에서 양수이고 (A−3)식은 음수값을 갖는다.

i), ii), iii), iv)에 의해 D(T)는 단조감소함수이다.

(A−1)식에서 분모$(b(T))^2>0$이고 T에 대해 증가함수이고 분자는 단조감소함수이므로 (A−1)식이 감소함수임을 알 수 있다.

그리고 $a(0)=0$, $a'(0)=\sum_{i=1}^{2}\frac{p_i}{\alpha_i}$, $b(0)=C_F$ 이므로 T=0에서의 (A−1)식의 값은 0보다 크다. 그러므로 $C_2\alpha_2>C_1\alpha_1$을 만족하는 조건하에서 목적함수 IC(T)가 하나의 최대값을 가진다.