

짝수 개의 회절빔 어레이 생성을 위한 이진 위상격자의 설계

서호현 · 곽종훈 · 정종술 · 이일항

한국전자통신연구소 기초기술연구부

(1993년 12월 3일 받음)

짝수 차의 회절빔을 선택적으로 소거하여 짝수 개의 회절빔 어레이를 얻는 이진 위상 회절격자의 설계 방법을 제안하였고, 설계시 최적화 속도에 관여하는 상수 및 독립변수에 대하여 논하였다. 그리고 1×2 에서 1×20 까지의 최적해를 구하였고, 그 실험 결과를 나타내었다.

I. 서 론

Dammann 격자 또는 이진 위상격자(binary phase grating: BPG)는 주기적인 위상 기복을 갖는 회절격자로 그림 1과 같이 Fraunhofer 회절로 세기가 균일한 빔 어레이를 생성한다.^[1,2] 이러한 회절격자의 응용으로는 광섬유 결합기(fiber-optic star coupler), 자유공간 광 연결 (free-space optical interconnection), 다상 생성(multiple image generation), 광 컴퓨터 등을 들 수 있다.^[3,9] 그러나 지금까지의 연구는 주로 홀수 개의 빔 어레이 생성에 대한 연구가 많이 이루어져 왔다. 본 연구에서는 불필요한 차수의 회절빔을 선택적으로 제거함으로 짝수 개의 회절빔 어레이를 생성하는 회절격자의 설계 방법을 제안하였다. 짝수 개의 회절빔 어레이는 대칭 광전소자 (symmetric self electro-optic effect device:S-SEED), 스마트 퍽셀(smart pixels)과 같은 자유공간 광 논리소자와 상 처리(image processing) 등에 매우 유용하게 사용할 수 있다.^[10-12] 제 2장에서는 이진위상 회절격자의 이론을 간단히 언급하고, 제 3장에서는 회절빔 어레이를 얻기 위한 최적화 방법을 설명하였다. 제 4장에서는 짝수 개의 회절빔 어레이 생성을 위한 최적화 방법이 도입되었고, 마지막으로 제 5장에서는 최적화 알고리듬 속도에 관여 되는 몇 가지 중요한 변수에 대하여 논하고, 시뮬레이션 및 실험 결과를 제시하였다.

II. 이진 위상 회절격자 이론

이진 위상 회절격자의 위상 투과 함수(phase transmi-

ssion function) $g(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$g(x) = \exp[-\theta(x)] \quad (1)$$

여기서 $\theta(x)$ 는 위상 함수로 0 또는 π 값을 갖는다. 그리고 회절격자가 대칭 구조 일 경우 $g(x)$ 는 다음과 같은 특성을 갖는다.

$$g(x) = \begin{cases} g(-x) \\ +1 \text{ or } -1 \end{cases} \quad (2)$$

여기서 $g(x)$ 는 일차원 함수지만, 이차원으로 쉽게 확장할 수 있는 분리 가능(separable)한 구조를 가정한다. 즉,

$$g(x, y) = g(x)g(y) \quad (3)$$

또한 편의상 격자의 주기를 1로 규격화 하고, 회절격자의 한쪽 반주기 영역에(대칭구조이므로) $g(x)$ 가 N개의 위상 천이점(+1 또는 -1로 바뀌는 점)을 가질 때 $g(x)$ 를 다음과 같은 함수로 나타낼 수 있다.

$$g(x) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \operatorname{rect}\left[\frac{x - \frac{(x_{n+1} + x_n)}{2}}{x_{n+1} - x_n}\right] \quad (4)$$

여기서, $x_0 = 0.0$, $x_{N+1} = 0.5$, 그리고

$$\operatorname{rect}[x] = \begin{cases} 1, & \text{if } |x| \leq 0.5 \\ 0, & \text{if } |x| > 0.5 \end{cases} \quad (5)$$

이다. $g(x)$ 는 x 방향으로 주기 함수이기 때문에 다음과 같이 Fourier 전개를 할 수 있다.

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(k) \exp(i2\pi kx) \quad (6)$$

* 본 연구는 한국통신과 체신부의 연구지원비에 의해 수행되었다.

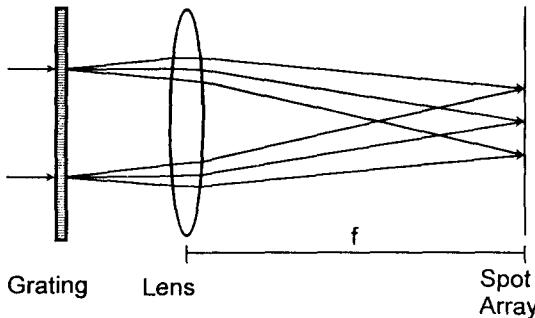


그림 1. Setup of spot array generation using a Dammann grating.

$$G(k) = \int_{-1/2}^{+1/2} g(x) \exp(-2\pi i kx) dx \quad (7)$$

여기서 Fourier 계수 $G(k)$ 는 출력면에서의 회절빔의 진폭을 나타내고 식 (4)의 Fourier 변환으로 일어 진다. 식 (4)를 식 (7)에 대입하여 각각의 Fourier 계수를 구하면

$$\begin{aligned} G(k) &= \frac{1}{k\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^n [\sin(2\pi kx_{n+1}) - \sin(2\pi kx_n)] \\ &= \frac{2}{k\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^{n+1} \sin(2\pi kx_n), \quad k \neq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} G(0) &= 2 \sum_{n=0}^N (-1)^n (x_{n+1} - x_n) \\ &= 4 \sum_{n=0}^N (-1)^{n+1} x_n + (-1)^N \end{aligned} \quad (9)$$

와 같이 주워진다. $G(k)$ 는 대칭이고 실수 값이므로 ($G(k) = G(-k)$, $G^*(k) = G(k)$) 최적화의 복잡도(complexity)가 줄어든다. 또한 $G(k)$ 는 다음과 같이 규격화된다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |G(k)|^2 = 1 \quad (10)$$

III. 최적화 방법

이전 위상 회절격자의 주된 목표는 회절 차수가 $-N$ 에서 $+N$ 사이의 범위 모두 균일한 세기를 가져야 한다는 것이다.

$$I(0) = I(\pm 1) = I(\pm 2) = \cdots = (\pm N) \quad (11)$$

위와 같은 결과를 얻기 위한 해석적인 해는 존재하지 않기 때문에 비선형 최적화를 통해 수치적으로 얻어야 한다. 반 주기내에 N 개의 위상 천이점이 존재하는 회

절격자의 경우 $2N+1$ 개의 균일한 회절빔을 얻는 해는 2^{N-1} 개 존재한다.^[2] 또한 최적화 방법은 여러 가지가 있지만 그 중에서 본 논문에서는 경사감소법(gradient descent method)을 사용했다. 메리트 함수(Merit 또는 Cost function) E 는 목표 값과 실제 회절빔의 세기와의 차의 합으로 정의한다.

$$E = \sum_{k=0}^N [t(k) - I(k)]^2 \quad (12)$$

여기서 $t(k)$ 와 $I(k)$ 는 각각 k 차 회절빔의 목표 값과 실제 얻어진 값을 나타낸다.

$$I(k) = |G(k)|^2 \quad (13)$$

목표값 $t(k)$ 는 회절빔의 평균값으로 아래와 같이 정의된다.

$$t(k) = \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N I(m) \quad (14)$$

위상천이점 $\{x_i\}$ 의 초기 값을 임의로 정해 준 다음 위상천이점 변화에 대한 메리트 함수의 변화가 감소하는 방향으로 새로운 위상천이점 $\{x_i^{new}\}$ 를 반복적으로 구한다.

$$x_i^{new} = x_i - \beta \sum_{n=1}^N \frac{\partial E}{\partial x_n}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

여기서 β 는 상수로 이 값에 따라 수렴 속도가 달라진다. 식 (15)은 chain rule에 따라 두개의 편미분의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial E}{\partial x_n} = \sum_{k=0}^N \left[\frac{\partial E}{\partial I(k)} \cdot \frac{\partial I(k)}{\partial x_n} \right] \quad (16)$$

식 (16)의 오른쪽 항의 첫 부분은 회절빔의 세기에 대한 메리트 함수의 변화율이고, 둘째 부분은 위상천이점에 대한 회절빔의 세기의 변화율이다.

$$\frac{\partial E}{\partial I(k)} = -2[t(k) - I(k)] \quad (17)$$

$$\frac{\partial I(k)}{\partial x_n} = (-1)^{n+1} \frac{16}{k\pi} \cos(2k\pi x_n) \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \sin(2k\pi x_m), \quad k \neq 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial I(0)}{\partial x_n} = (-1)^{n+1} 8 \left[4 \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} x_m + (-1)^N \right] \quad (19)$$

따라서, 식 (12)~(19)들을 이용해 균일한 회절빔을 얻는 이진위상격자의 최적의 해 $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$ 를 구할

수 있다.

IV. 짹수 개의 회절빔 생성

쫙수 개의 균일한 세기를 갖는 회절빔은 특정한 차수(0과 짹수차)의 회절빔을 제거함으로 얻을 수 있기 때문에 EOM(even order missing)이라고 부른다.

$$I(\pm 1)=I(\pm 3)=\cdots=I(\pm N) \\ I(0)=I(\pm 2)=\cdots=I(\pm(N-1))=0 \quad (20)$$

EOM 어레이를 구하기 위한 최적화 알고리듬은 앞 부문의 최적화 방법에서 다룬 기존의 홀수 개의 회절빔 어레이를 구할 때와 기본 개념은 비슷하나 식 (14)의 $t(k)$ 는 다음과 같이 수정되어야 한다.

$$t(k)=\frac{1}{(N+1)} \sum_{m=-N}^N I(m), \quad k \text{ and } m \text{ are odd} \\ t(k)=0, \quad k \text{ is even} \quad (21)$$

위상 투과 함수 $g(x)$ 는 y 축에 대하여 대칭이므로 식 (7)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G(k)=2 \int_0^{1/2} g(x) \cos(-2\pi kx) dx \quad (22)$$

그리고 EOM 어레이를 얻기 위한 구속 조건이 식 (22)로부터 쉽게 유도될 수 있다. 식 (22)의 $\cos(-2\pi kx)$ 는 반주기의 중심축($x=1/4$)에 대하여 k 가 홀수일 때 기함수(odd function)가 되고, 반면에 k 가 짹수일 때는 우함수(even function)가 된다. 따라서 $g(x)$ 를 $x=1/4$ 에 대하여 기함수로 만들면 다음과 같다.

$$g(x)=-g(1/2-x), \quad 1/4 < x < 1/2 \quad (23)$$

식 (23)을 식 (22)에 대입하면 회절빔의 진폭 $G(k)$ 는 짹수 값의 k 에 대하여 항상 0이 된다.

$$G(k)=0, \quad k \text{ is even}$$

$$G(k)=4 \int_0^{1/4} g(x) \cos(2\pi kx) dx, \quad k \text{ is odd} \quad (24)$$

식 (23)을 위상 천이점 x_n 의 식으로 다시 표현하면 다음과 같다.

$$x_{\frac{N+1}{2}}=\frac{1}{4}$$

$$x_i-x_{N+1-i}=\frac{1}{2}, \quad i=1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} \quad (25)$$

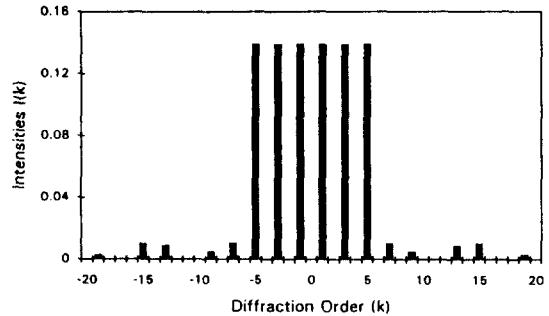


그림 2. Diffraction intensities of the 1×6 even order missing spot array. Efficiency is about 83.6%.

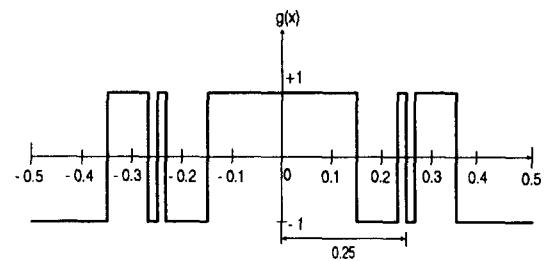


그림 3. One period of a binary phase transmission function of the even order missing structure.

따라서 대칭 구조의 EOM 회절격자를 설계하기 위해서는 한주기의 $1/4$ 의 정보만 있으면 된다. 그 결과 위상 천이점의 자유도(degree of freedom)는 N 에서 $(N-1)/2$ 로 줄어든다. 예를 들어 1×6 EOM 어레이용 회절격자를 설계하기 위해서는 기존의 1×11 어레이에서 짹수차 빔들을 없애면 된다. 따라서 회절격자의 반주기($x_0=0$ 과 $x_6=0.5$ 사이)에 5개의 위상 천이점이 존재한다. 한편 EOM에 대한 구속 조건 식 (25)로부터 3개의 위상 천이점이 결정된다. 즉, $x_3=0.25$, $x_4=0.5-x_2$, $x_5=0.5-x_1$ 이 되어 2개의 독립변수 x_1 와 x_2 만 남게 된다. 앞에서 논의한 최적화 방법으로 구한 해를 보면 $x_0=0.0$, $x_1=0.1455$, $x_2=0.2429$, $x_3=0.25$, $x_4=0.2571$, $x_5=0.3545$, $x_6=0.5$ 이다. 위의 해를 식 (8)과 (9)에 대입하여 Fourier 계수 $G(k)$ 값을 구하고 식 (13)에 의해 회절빔의 세기 $I(k)$ 를 구한다. 그림 2에서 보면 스칼라 회절 이론에 의한 중간 6개의 빔에 대한 회절 효율은 약 83.57%가 되고 이들의 상대적인 세기는 $I_i=0.0$ (i =쫙수) 그리고 $I_j=0.139$ ($j=\pm 1, \pm 3, \pm 5$)이다. 그림 3에는 1×6 EOM 회절격자의 한주기의 구조가 나타나 있다. 중심축에 대한 대칭 구조(식 (2) 참조) 외에 식 (23)과 식 (25)에서 예견되는 바와 같이

반주기의 중심축($x = \pm 0.25$)에 대하여 비대칭 구조를 가지고 있는 것이 특징이다.

V. 결과 및 토의

1×2 에서 1×20 까지의 EOM 어레이 회절격자의 최적해로써 위상천이점 x_n , 회절 효율 η 및 위상 천이점들 간에 최소거리 δ_{min} 가 Table 1에 나타났다. 각 $1 \times M$ 어레이에 대한 최적해의 개수는 $2^{(M/2+1)}$ 개 존재하지만 그 중에 효율이 가장 좋은 것만 나타내었다. 결과에서 알 수 있듯이 63~84% 범위의 회절 효율을 얻을 수 있었다. 최적화의 수렴 속도는 식 (15)의 상수 β 와 위상천이점의 수 N 에 의존한다. 여러 가지 값의 β 에 대한 메리트 함수 값의 변화를 그림 4에 나타내었다. β 가 작을 때는 최소 값에 도달하는데 많은 시간이 걸리는 반면, β 가 커지면 수렴 속도도 빨라진다. 하지만 β 가 어느 정도 이상 커지게 되면 최소 값에 수렴하지 않고 진동하는 경우가 생기기 때문에 적당한 값을 갖게 하는 것이 중요하다. 또한 위상 천이점의 수(정확히 말하면 위상 천이점의 독립변수의 수)가 증가하면 계산의 복잡도가 증가하기 때문에 최소값에 도달하는 시간이 길어진다. 대칭 구조 EOM 회절격자의 경우 반주기내에 위상천이점 N 과 독립변수의 수 k 와의 관계식은 다음과 같다.

$$k = \frac{(N-1)}{2} \quad (26)$$

또한 해의 수는 2^k 개가 있음을 시뮬레이션 결과로부터 정량적으로 발견하였다. 예를 들어 1×8 EOM 회절격자를 설계하는데 반주기 내에 7개의 위상 천이점이 필요하다. 그러나 독립변수의 수는 식 (26)에 의해 3개가 된다. 따라서 8개의 (69.8%, 63.8%, 56.7%, 56.6%, 51.5%, 51.3%, 47.5%, 34.0%) 서로 다른 효율을 갖는 해들이 존재한다. 그림 5에 위상 천이점 독립변수의 k 에 대한

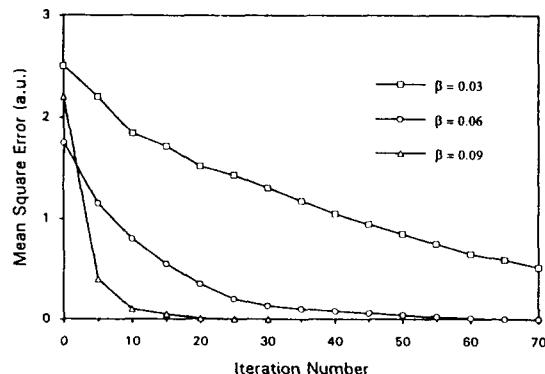


그림 4. Change of the mean square error for iteration number.

표 1. Solutions of even order missing spot array gratings. Transition points x_n , efficiency η , and minimum distance δ_{min} are listed.

$1 \times M$	x_n	η	δ_{min}
2	0.0000, 0.2500, 0.5000	81.06	0.2500
4	0.0000, 0.0272, 0.2500, 0.4728, 0.5000	70.64	0.0544
6	0.0000, 0.1455, 0.2429, 0.2500, 0.2571, 0.3545, 0.5000	83.57	0.0071
8	0.0000, 0.0658, 0.0817, 0.1533, 0.2500, 0.3467, 0.4183, 0.4342, 0.5000	69.76	0.0159
10	0.0000, 0.0444, 0.0930, 0.1935, 0.2005, 0.2500, 0.2995, 0.3066, 0.4070, 0.4556, 0.5000	71.03	0.0071
12	0.0000, 0.0013, 0.0972, 0.1621, 0.2104, 0.2325, 0.2500, 0.2675, 0.2896, 0.3379, 0.4028, 0.4987, 0.5000	69.66	0.0026
14	0.0000, 0.0031, 0.0895, 0.1068, 0.1154, 0.1650, 0.2164, 0.2500, 0.2836, 0.3350, 0.3847, 0.3932, 0.4105, 0.4969, 0.5000	67.38	0.0061
16	0.0000, 0.0014, 0.0410, 0.0873, 0.1349, 0.1480, 0.2153, 0.2303, 0.2500, 0.2697, 0.2847, 0.3520, 0.3651, 0.4127, 0.4590, 0.4986, 0.5000	63.33	0.0029
18	0.0000, 0.0018, 0.0263, 0.0670, 0.0907, 0.1690, 0.1731, 0.1927, 0.2308, 0.2500, 0.2692, 0.3073, 0.3269, 0.3310, 0.4093, 0.4330, 0.4737, 0.4982, 0.5000	62.66	0.0037
20	0.0000, 0.0180, 0.0523, 0.0630, 0.0945, 0.1219, 0.1288, 0.1367, 0.1878, 0.1969, 0.2500, 0.3031, 0.3122, 0.3633, 0.3712, 0.3781, 0.4055, 0.4390, 0.4472, 0.4820, 0.5000	63.29	0.0069

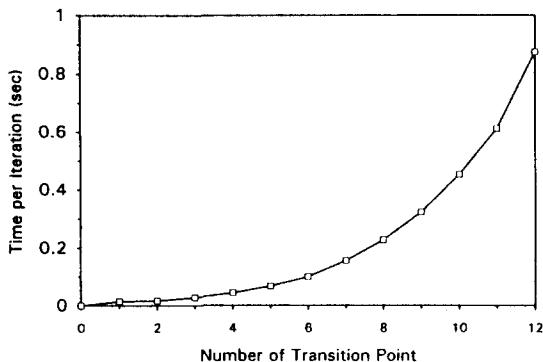


그림 5. Time per iteration of the number of independent transition points.

수렴 시간이 나타나 있고 그 결과는 다음과 같은 경험식과 일치한다.

$$f(k) = ak^4 + bk \quad (27)$$

여기서 $f(k)$ 는 어떤 값 k 에 대하여 단위 계산 루프에 대한 계산 시간의 함수이고, a 와 b 는 사용된 컴퓨터 시스템에 의존하는 상수들이다. 본 연구에서 사용한 컴퓨터는 IBM-PC(intel 486-33 MHz CUP)로 $a = 3.64 \times 10^{-5}$, $b = 9.04 \times 10^{-3}$ 이다. 만약 $1 \times 8 (k=3)$ 회절빔 어레이용 회절격자를 설계할 때의 총 계산 반복수가 200번일 때 수렴값에 도달하는 시간은 약 6초 정도 걸리고, $1 \times 20 (k=9)$ 의 경우 1분정도 소요된다. 그러나 많은 수의 어레이 (>100) 경우 복잡도의 급격한 증가로 인해 경사감소법만으로는 설계하기가 힘들어진다. 설계된 회절격자는 기존의 e-beam 리소그래피 방법으로 유리(quartz) 기판 위에 제작하였다. 먼저 설계값에 의한 이진 마스크를 제작하고 그 위에 노출과 현상 및 식각(etching) 단계를 거쳐서 위상 회절격자를 만든다. 그림 6은 설계된 8×8 어레이용 이진 위상 회절격자의 이차원의 한 주기를 나타내고 있고, 검은 부분과 흰 부분의 상대적 위상은 π 가 되도록 위상격자를 제작하였다. 그림 7은 제작된 회절격자를 이용해 실제로 얻어진 상을 CCD(charge coupled device) 카메라로 측정한 사진이다.

VI. 결 론

본 연구에서는 짹수 차의 회절빔을 선택적으로 소거해서 짹수 개의 균일한 회절빔을 얻는 이진 위상 회절격자의 설계 방법을 제시하였다. 설계시 최적화 방법은 경사감소법을 사용했고, 최적화의 속도에 관여하는 계수와 위상천이점의 독립변수(자유도)에 대해 논의하였다.

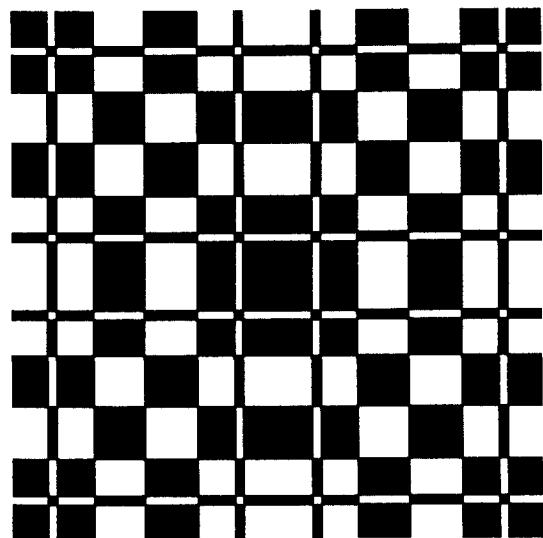


그림 6. The structure of single period of a 8×8 even order missing binary phase grating.

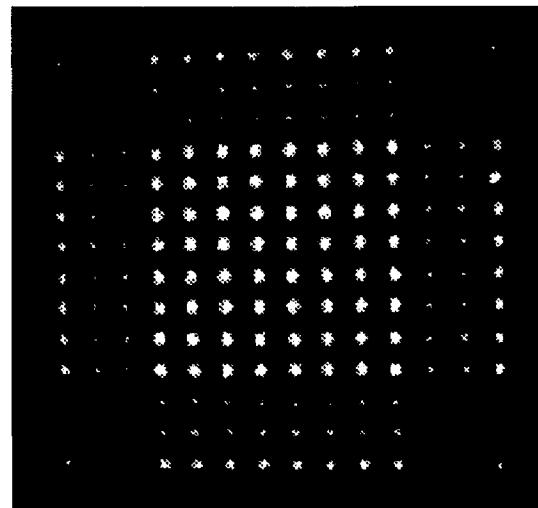


그림 7. Experimental result of the 8×8 even order missing spot array.

1×20까지의 회절격자 설계 결과와 그 중 8×8 어레이에 대한 실험 결과를 제시하였다.

참 고 문 헌

- [1] H. Dammann and K. Gotler, Opt. Commun. **3**, 315(1971).
- [2] H. Dammann and E. Klotz, Optica Acta **24**, 505

- (1977).
- [3] U. Killat, G. Rabe, and W. Rave, *Fiber and Integrated Optics*, **4**, 159(1982).
 - [4] U. Krackhardt and N. Streibl, *Opt. Commun.* **74**, 31(1989).
 - [5] X. Lu, Y. Wang, M. Wu, and G. Jin, *Opt. Commun.* **72**, 157(1989).
 - [6] F. B. McCormick, *Opt. Eng.* **28**, 299(1989).
 - [7] J. Jahns, M. M. Downs, M. E. Prise, N. Streibl, and S. J. Walker, *Opt. Eng.* **28**, 1267(1989).
 - [8] A. Vasara, M. R. Taghizadeh, J. Turunen, J. Westerholm, E. Noponen, H. Ichikawa, J. M. Miller, T. Jaakkola, and S. Kuisma, *Appl. Opt.* **31**, 3320 (1992).
 - [9] C. H. Kwak, S. Y. Park, H. M. Kim, and E. H. Lee, *Opt. Commun.* **88**, 249(1992).
 - [10] R. L. Morrison and S. L. Walker, OSA Annual 1989 Meeting, Vol. 18 of Technical Digest Series (Optical Society of America, Washington, D. C., 1989) p.111.
 - [11] R. L. Morrison, *J. Opt. Soc. Am.* **A7**, 464(1992).
 - [12] H. H. Suh, C. H. Kwak, and J. S. Jeong, 93 OSA Annual Meeting Vol. 16 Technical Digest Series (Optical Society of America, Washington, D. C., 1993) p185.

Design of Binary Phase Gratings for Even-Numbered Spot Array

Ho Hyung Suh, Chong Hoon Kwak, Jong-Sool Jeong, and El-Hang Lee
*Basic Research Department, Electronics and Telecommunications Research Institute
Taejon 305-600, Korea*

(Received: December 3, 1993)

We have developed an algorithm of designing the binary phase gratings for even-numbered spot arrays which selectively cancel or suppress the unwanted even orders. Principles and properties which control the speed of the optimization algorithm are presented, and the results of the designed gratings are illustrated up to 1×20 array.