부분구조 합성방법에 의한 진동해석

김 병 현 〈한국기계연구원〉

1. 개 요

일반적으로 복잡한 구조계에 대한 상세진동해석에는 유한요소법이 사용되고 있다. 그러나 선체나 해양구조물등과 같은 대형복잡구조계에 대해 전체구조를 유한요소해석하는데는 많은 시간과 노력이 필요하며, 해석결과를 분석 평가하는데도 어려움이 따르게 된다. 더구나 원하는 동특성을 갖도록 동특성 최적화를 위해서는 설계변경에 따라 진동해석을 여러번 반복수행해야 하므로 더욱 많은 시간이 요구된다. 따라서 대형구조계의 진동해석을 보다 효율적으로 수행할 수 있는 방법이 필요하다.

지금까지 알려진 대형구조계의 효율적 해석방법들을 형태론적인 면에서 분류할 때 크게 두가지로 나누어 생각할 수 있는 데, 하나는 대규모의 전체 운동방정식을 자유도간의 관계식으로부터 일부 자유도를 축소(condensation)시켜 축소된 운동방정식을 푸는 동적축소방법(Dynamic Condensation Method)이며, 또 하나는 전체구조계를 여러 개의 비교적 간단한 부분구조계로 분할하고 각 부분구조계의 동특성을 이용하여 전체구조의 진동해석을 하는 부분구조합성방법(Substructure Synthesis Method)이다. 전자는 단순히 대규모 자유도를 갖는 운동방정식을 한꺼번에 처리하는 데 소요되는 전산기용량과 계산시간을 크게 줄이기 위한 수단임에 반해 후자는 이와 같은 잇점이외에도 각 부분구조계를 독립적으로 취급하게 되므로 업무분리가 가능하고 비교적 간단한 부분구조계를 다루므로써 입력자료의 작성 및 검토가 용이한 점, 같은 형태의 부분구조들로 분리가 가능할 경우 한 부분구조계에 대한 해석만 필요한 점, 이론해석 뿐만 아니라 실험으로부터 얻어진 부분구조계의 동특성을 이용할 수 있는 점 및 부분적인 설계변경시 변경된 부분구조계에 대한 동특성 재해석만이 필요한 점등 많은 잇점을 갖고 있다.

부분구조합성방법은 유한요소법에 의거한 대형복잡구조계의 진동해석 뿐만 아니라 여러가지 요소들로 구성된 복합적 구조계의 진동해석, 대형계의 실험적 진동해석분야에서 효율적 해석 수단으로 여러 기법들이 독립적으로 개발되어 왔다. 이 방법들을 종합적으로 분류하면, (1) 전달함수합성방법, (2) 특성행렬합성방법, (3) 부분구조진동형합성방법으로 나눌 수 있다.

본 고에서는 유한요소법에 의거한 진동해석측면에서 이들 방법의 이론적 배경과 그 특징들에 대해 고찰해 보고자 한다.

2. 전달함수합성방법[2][3][4]

전달함수합성방법에서는 각 부분구조계에 대해 결합부 자유도간의 전달함수를 독립적으로 구하고 이 전달함수를 결합하여 전체구조계의 진동특성과 동적응답을 계산한다. 전달함수는 주파수의 함수로 나타나므로 각 주파수에서의 정상상태응답계산에 편리하다. 특히 결합부 자유도가 작은 경우에 효율적이며 실험으로부터 얻어진 전달함수와 해석적으로 얻어진 전달함수를 동등하게 취급하여 혼합 사용할 수 있는 점등의 장점이 있다. 그러나 이 방법에서 고유진동해석문제는 고차의 진동수 방정식으로 귀착되게 되어 고유진동수와 진동형을 직접 구하기 어려운 점이 있다.

전달함수로는 보통 receptance(또는 compliance)나 mobility의역인 impedance가 사용되는데 이에 따라 각각 receptance방법 또는 impedance방법이라고 한다.

여기서는 receptance 방법에 대해 간단히 설명한다. Fig. 1과 같이 2개의 부분구조계로 이루어져있는 경우를 가정한다. A와 D는 각각 부분구조 1 및 부분구조 2의 내부절점을 나타내며 B와 C는 각각 부분구조 1 및 부분구조 2에 속한 결합부 절점을 나타낸다.

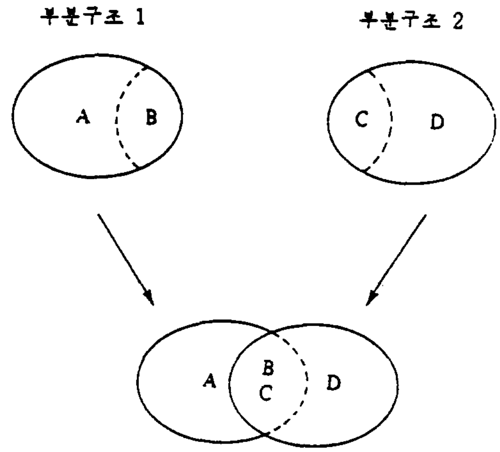

Fig.1 부분구조의 결합

부분구조계 1 및 2에 대해 receptance 행렬 H를 사용하여 힘과 변위와의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{AA} & H_{AB} \\ H_{BA} & H_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B + R_B \end{Bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{Bmatrix} X_C \\ X_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{CC} & H_{CD} \\ H_{DC} & H_{DD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_C + R_C \\ F_D \end{Bmatrix} \tag{2}$$

여기서 F는 외부에서 가해지는 기진력을 의미하며 R은 결합부에서 타 부분구조계에 의해 작용하는 내력이다. 각 부분구조계에 대한 식 (1)과 (2)에서 결합부의 변위식만을 고려하고 결합부에서 적합조건 $X_B = X_C$ 와 힘의 평형조건 $R_B = -R_C$를 적용하여 합성하면 전체계에서의 결합부 내력에 관한 다음 식을 얻게 된다.

$$(H_{BB} + H_{CC})R_B = H_{CC}F_C + H_{CD}F_D - H_{BA}F_A - H_{BD}F_B \tag{3}$$

이로부터 결합부 내력 R_B $(= -R_C)$를 계산하고 (1)과 (2)에 대입하여 정상상태응답 변위 X를 계산할 수 있다. 고유진동해석문제인 경우는 외력 F=0 이므로 식(3)으로부터 진동수방정식 $|H_{BB}+H_{CC}| = 0$를 얻게 되며 이 식으로 고유진동수를 계산하고 F=0인 경우에 식 (1) 및 (2)로 부터 진동형을 얻는다. 식 (3)에서 알 수 있듯이 결합부의 자유도가 작은 경우에는 전달함수합성법이 매우 효과적임에 알 수 있다.

해석적인 방법에서 전달함수는 부분구조계의 동특성행렬로 부터 직접 계산하는 방법과 부분구조계의 modal 특성치들을 사용하여 계산하는 방법이 있을 수 있는데 일반적으로 후자의 방법을 많이 사용하며 이때 고차진동형 성분은 무시하고 저차진동형만을 고려한 근사계산하는 것이 보통이다.

3. 특성행렬합성법[5 ~9]

이 방법은 동적축소(Dynamic condensation)방법을 부분구조밥법으로 확장시킨 것이다. 동적축소 방법에서는 전체자유도를 masters(또는 primary coordinates)와 slaves(또는 secondary coordinates)로 나누고 이들 간의 관계식으로부터 slave 자유도를 master 자유도로 표현하여 좌표변환하므로써 master 자유도만으로 축소된 특성행렬을 얻고 축소된 방정식을 형성한다. 특성행렬합성방법은 결합부의 자유도를 master 자유도로 한 동적축소방법이라고 할 수 있는데 각 부분구조계에 대해 결합부 자유도로 축소된 특성행렬들을 합성하여 전체계의 방정식을 형성한다. 이 방법은 유한요소해석을 전제로 한 경우에 있어서 가장 쉽고 간편한 방법이다. 그러나 실험해석에 적용하는데는 실험으로 얻어진 모드특성으로부터 역으로 특성행렬을 구해야하는 데 어려움이 있다. 이 방법에는 축소된 특성행렬을 형성하는 방법에 따라 (1) 정확한 축소방법 (2) Guyan 축소방법 (3) 변형된 Guyan 축소방법으로 나눌 수 있다.

3.1 정확한 축소방법

편의상 감쇠가 없는 경우를 생각하고 Fig. 1의 구조계를 대상으로 한다. 결합부 자유도와 외력이 작용하는 자유도를 master자유도로 하고 나머지 자유도를 slave 자유도로 한다. Slave 자유도를 첨자 a로, master 자유도를 첨자 b로 나타내면 부분구조계 1에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} D_{aa} & D_{ab} \\ D_{ba} & D_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_a \\ X_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_a + R_c \end{Bmatrix} \tag{4}$$

여기서 D는 동강성행렬로써 $D=K-\lambda M$이다. 식 (4)의 윗부분 관계식으로부터 slave 자유도를 master 자유도로 다음과 같이 표현된다.

$$X_a = D_{aa}^{-1} D_{ab} X_b = T X_b \tag{5}$$

로부터 다음과 같은 좌표변환식을 얻을 수 있고

$$\begin{Bmatrix} X_a \\ X_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ I \end{bmatrix} \{X_b\} \tag{6}$$

이를 이용하여 master자유도로 축소된 부분구조계의 강성행렬과 질량행렬 그리고 변환된 외력벡터 행렬이 얻어진다. 부분구조계 2에 대해서도 같은 방법으로 master 자유도로 변환된 행렬들을 얻게 되고 결합부에서의 내력 평형조건과 변위 적합조건을 적용하면 전체계에 대한 축소된 운동방정식이 얻어진다. 이 방법은 식 (5)에서 알 수 있듯이 주파수의 함수인 동 강성행렬의 역행렬 계산이 필요하며 축소된 행렬요소들은 주파수의 함수가 된다. 따라서 주파수 응답변위를 계산하는데는 유용하나 진동수가 미지수인 고유진동해석에 적용은 곤란하다.

3.2 Guyan 축소방법

이 방법은 Guyan의 정축소 방법을 동적축소 방법에 원용한 것으로 현재까지도 가장 많이 사용되고 있는 부분구조 합성 방법중의 하나이다. 이 방법에서는 master자유도와 slave 자유도간의 관계식으로 정역학적인 관계만은 고려한다. 즉 식 (5) 대신에 관성효과를 무시한 다음 관계식을 사용한다.

$$X_a = -K_{aa}^{-1} K_{ab} X_b = T X_b \tag{7}$$

따라서 축소된 행렬들은 주파수와 무관하게 되며 고유진동해석 문제에 적용에도 매우 효과적이다. 그러나 관성효과를 무시함으로 인하여 정확도 높은 결과를 얻을 수 없는 경우가 많다. 이 방법에서 결과의 정확도는 master 자유도의 선택에 따라 달라질 수 있는데 정확도 향상을 위해서는 결합부자유도 이외에 진동변위가 클 것으로 예상되는 자유도, 질량이 큰 자유도 및 감쇠가 큰 자유도를 master 자유도에 포함시킬 필요가 있다.

이 방법은 상용 유한요소 프로그램에도 많이 채택되고 있는데 MSC/NASTRAN과 ANSYS에 각각 superelement analysis와 matrix reduction 이라는 명칭으로 이 기능이 포함되어 있다.

3.3 변형된 Guyan 축소방법

Guyan 축소방법의 축소과정에서 관성효과를 무시함으로 인해 필연적으로 따르게 되는 정확도의 손실을 줄이기 위해서 Guyan 축소방법을 약간 변형시킨 방법이다. 식 (5)에서 정의된 변환행렬 T를 계산하는데 있어서 slave자유도에 대한 동강성 행렬의 역행렬을 K_{aa}^{-1}에 대해 급수전개하고 λ^2 이상의 고차항을 무시한다. 이 경우 변환행렬은 다음과 같이 된다.

$$T = -K_{aa}^{-1} K_{ab} - \lambda\left(-K_{aa}^{-1} M_{ab} + K_{aa}^{-1} M_{aa} K_{aa}^{-1} K_{ab}\right) \tag{8}$$

이 변환행렬을 사용하여 좌표변환을 수행하면 다시 λ^2 항이 나타나게 되는데 이들을 다시 무시하면 Guyan 축소방법에서 얻어진 것과 같은 최종방정식이 된다. 그러나 진동변위 계산은 식 (8)사용하여 계산하게 되므로 Guyan 축소방법과 다른 결과를 주게 된다.

4. 부분구조 진동형 합성방법[10~14]

부분구조 진동형 합성방법은 각 부분구조계의 진동변위를 그 부분 구조계의 일부 모드들(partial modes)의 선형결합으로 표현하고 부분구조계 사이의 결합부에서 변위 및 힘의 적합조건을 부과하여 합성하므로써 모드 좌표계로 축소된 전체계의 운동방정식을 형성하고 이로부터 진동특성을 산정하는 방법이다. 부분구조계의 변위를 표현하는데 일부 저차 모드들만 사용하므로 자유도 수를 대폭 줄일 수 있는데, 대신에 필연적으로 정확도의 손실이 따르게 된다.

이 방법은 고유진동해석문제와 진동응답 해석문제에 모두 효과적으로 적용할 수 있으며 부분구조합성방법의 특징을 가장 잘 반영하고 있다. 따라서, 일반적으로 부분구조 합성방법이라고 칭할 때 이 방법을 의미하는 경우가 많다. Hurty[10]가 처음 이 개념을 진동해석에 도입한 이래 많은 연구가 이루어져 왔는데 이들을 방법론적인 관점에서 분류하면 합성에 이용되는 부분구조계의 동특성치들을 타부분구조계와의 결합부를 구속, 불구속 또는 이들의 조합으로 하

여 얻은 것을 사용하는가에 따라 각각 (1) 구속 모드 방법 (2) 불구속 모드방법 및 (3) 혼합방법으로 대별할 수 있다. 이외에도 여러 가지 방법들이 제안되었지만 위의 세가지 방법중 한방법을 약간 변형 또는 개선시킨 것이 대부분이다.

4.1 구속모드방법

이 방법은 부분구조계의 진동변위를 결합부 자유도가 구속된 상태에서 얻은 일부 저차 고유벡터로 이루어진 모드행렬 [θ]와 결합부 자유도와 내부 자유도의 변위 관계를 나타내는 constraint mode 행렬[ψ]를 사용하여 다음과 같이 가정한다(Fig. 1 참조).

$$\begin{Bmatrix} X_A \\ X_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \Psi \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta \\ X_B \end{Bmatrix} \tag{9}$$

constraint mode 행렬 [ψ]는 내부자유도와 결합부자유도간의 정역학적 관계만을 고려한 정역학적 축소방법에 의해 산정 된다. 즉 식 (7)으로부터 $\Psi = K_{AA}^{-1} K_{AB}$ 이다. 각 부분구조계에 대해 식 (9)을 이용한 좌표변환으로 축소된 부분구조계의 방정식을 얻고 결합부에서의 변위 및 내력의 적합조건을 부과하여 합성하면 결합부 자유도와 사용된 모드에 대한 모드 좌표계로 축소된 전체계의 운동방정식이 얻어진다. 따라서 최종 운동방정식의 자유도수는 결합부자유도와 사용된 모드수의 합이 된다. 구속모드방법은 비교적 정확도가 높은 결과를 얻을 수 있는 방법으로 가장 많이 사용되고 있다. 그러나 결합부자유도가 최종방정식에 그대로 남게 되므로 결합부 자유도가 많은 경우에 최종방정식의 자유도가 커지게 되는 문제점과 실험결과를 이용하기 위한 실험시 구속조건을 구현하기 어려운 점과 같은 단점이 있다.

현재 대우조선(주)에서 사용중인 "DWDYNAS" 프로그램과 삼성중공업(주)의 "MODSYN" 프로그램은 이 방법을 채택한 유한요소 진동해석프로그램이다.

4.2 불구속모드방법

이 방법에서는 결합부 자유도의 경계조건을 자유로 하여 얻어진 부분구조계의 일부 저차 고유벡터들의 선형결합으로 진동변위를 가정한다. 즉

$$\{ X \} = [\phi] \{ \zeta \} \tag{10}$$

이를 이용하여 좌표변환하고 결합부조건식을 부과하면 전체계에 대한 축소된 운동방정식이 얻어진다. 이 경우 최종운동방정식의 자유도수는 사용된 모드 수의 합에 결합부자유도수를 뺀 것과 같다. 이 방법은 타 방법에 비해 최종방정식의 자유도수가 작아 효율적이고 또 실험결과 이용이 용이한 장점이 있으나 정확도 높은 결과를 얻을 수 없는 경우가 많다. 따라서 정확도 향상방안에 관한 연구들이 이루어져 왔는데 주로 잉여 compliance를 사용하여 무시된 고차 진동형 효과를 고려하는 방법들이 제시되고 있다. 저자[14]는 shifting frequency를 도입한 잉여 compliance를 사용하여 무시된 고차진동형에 대한 관성 효과와 강성효과를 고려하는 방법을 제안한 바 있다.

4.3 혼합모드방법

이 방법은 구속모드방법과 불구속모드방법을 혼합한 방법으로 부분구조계의 결합부자유도를 일부는 고정 나머지는 자유로 하여 얻어진 고유벡터를 사용하여 진동변위를 표현한다. 따라서 이 방법을 구속모드방법과 불구속모드방법의 중간적인 특성을 갖게 된다. 이 방법의 특성상 부분구조계중에서 주부분구조에 대해서는 불구속모드를, 종부분구조에 대해서는 구속모드를 사용하는 것이 좋다.

5. 맺음말

본 고에서는 부분구조합성방법에 대해 지금까지 연구된 기법들을 전부 포함시키지는 못했지만 이들을 몇가지로 대별하고 이론적 배경과 특징을 개괄적으로 고찰해 보았다. 부분구조합성방법이 처음 진동해석에 도입된 초기에는 주로 계산시간의 단축과 전산기 용량을 극복하기 위한 관점에서 이 방법이 많이 사용되고 연구되어 왔다. 전산기가 급속도로 발달된 지금에도 부분계를 독립적으로 설계 해석할 필요성과 실험결과와 이론해석결과를 결합한 해석의 필요성등으로 계속 연구 사용되고 있다.

방법론 자체에 대한 최근의 연구경향은 이 방법의 효율성을 유지하면서 정확도 향상방안에 대한 연구가 주류를 이루고 있으며, 또 이 방법의 장점을 살려 대형구조계의 동특성 최적화에 적용하는 연구들이 많이 이루어지고 있다.

최근 일본에서 많은 논문들이 발표되고 있는데 지금까지 국내에서 연구된 사례는 몇건에 불과한 실정이다 [4][14~17]. 앞으로 국내에서도 많은 연구가 이루어지고 선체진동해석에도 활발히 적용되길 기대한다.

참 고 문 헌

[1] Nakamatsu, Ookuma, "部分構造合成法" 培風館, 1991

[2] Simpson, A., "The Kron Methodology and Practical Algorithm for Eigenvalue, Sensitivity and Response Analysis of Large Scale Structural Systems", Aeronaut. J., Dec., 1980

[3] Simpson, A., "Approximations in Kron's Eigenvalue Method", *Quart. J. Mech. and Applied Math., Vol. 41, Part 1*, 1988

[4] 한성용, Receptance방법에 의한 골조구조계의 진동해석, *대한조선학회 논문집, 제28권 제2호*, 1991

[5] Guyan, R.J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", *AIAA J., Vol. 11, No. 2*, 1965

[6] Leung, A.Y.T., "An Accurate Method of Dynamic Condensation in Structural Analysis", *Inter. for Numerical Methods for Engineers, Vol. 12*, 1978

[7] Kidder, R.L., "Reduction of Structural Frequency Equations", *AIAA J., Vol. 11, No. 6*, 1973

[8] Miller, C.A., "Dynamic Reduction of Structural Models", *Journal of the Structural Div., ASCE, Oct.*, 1980

[9] Paz, M., "Practical Reduction of Structural Models", *Journal of the Structural Eng., Vol. 109, No. 11*, 1983

[10] Hurty, W.C., "Vibration of Structural Systems by Component Mode Synt hesis", *J. of the Engineering Mechanics Div., ASCE, Vol. 86*, 1960

[11] Craig, R.R., Bampton, M.C., "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis", *AIAA J., Vol. 6, No. 7*, 1988

[12] Hou, S.N., "Review of Modal Synthesis Techniques and A New Approach", Shock and Vibration Bulletin, 40, pt. 4, 1969

[13] Sotiropoulos, G.H., "Comment on the Substructure Synthesis Method", *J. Sound and Vibration, Vol. 94*, 1984

[14] 김병현외, 부분구조진동형합성방법에 의한 대형구조계의 진동해석, *대한조선학회 논문집, 제30권, 제3호*, 1993

[15] 박석주외, 부분구조합성법에 의한 진동해석과 동특성 최적화, *한국박용기관학회지, 제13권, 제4호*, 1989

[16] 김병현외, 진동수 구속조건을 갖는 대형구조계의 효율적 동특성 최적화방법, *대한조선학회 논문집, 제31권, 제2호*, 1994

[17] Heo, J.H., Ehmann, K.F., "A Method for Substructureal Sensitivity Synth esis", *J. Vibration and Acoustics, Vol. 113, April*, 1991