

〈論 文〉

반도체패키지에서 의 층간박리 및 패키지균열에 대한 파괴역학적 연구(1) — 층간박리 —

박상선* · 반응운* · 엄윤용**

(1994년 4월 9일 접수)

A Fracture Mechanics Approach on Delamination and Package Crack in Electronic Packaging (I) — Delamination —

Sang Sun Park, Lyong Oon Pahn and Youn Young Earmme

Key Words : Stree Intensity Factor(응력강도계수), J-Integral(J적분), T-Stress(T응력), Mutual Integral(상호적분), Thermal Stress(열응력), Finite Element Method(유한요소법), Delamination(층간박리)

Abstract

In order to understand the delamination between leadframe and epoxy molding compound in an electronic packaging of surface mounting type, the stress intensity factor, T-stress and J-integral in fracture mechanics are obtained. The effects of geometry, material properties and molding process temperature on the delamination are investigated taking into account the temperature dependenc of the material properties, which simulates a more realistic condition. As the crack length increases the J-integral increases, which suggests that the crack propagates if it starts growing from the small size. The effects of the material properties and molding process temperature on stress intensity factor, T-stress and J-integral are less significant than the chip size for the practical cases considered here. The T-stress is negative in all eases, which is in agreement with observation that interfacial crack is not kinked until the crack approaches the edge of the leadframe.

1. 서 론

반도체가 매년 고집적화됨에 따라 칩(chip)의 크기도 증가되고 있다. 반면 전자기기는 크기면에서 경박단소의 경향으로 추구되어지고 있어 반도체패

키지의 두께는 점점 얇아지고 있다. 이와 함께 주로 사용되는 패키지의 실장형태는 리드(lead)의 간격(pitch)이 제한되어 있어 소형화에 한계가 있는 기존의 삽입형(insertion mounting type, Fig. 1(a))에서, 리드의 간격을 줄일 수 있고 기판의 양면에 실장함으로써 실장밀도를 높일 수 있는 표면실장형(surface mounnting type, Fig. 1(b))의 패키지로 그 형태가 바뀌고 있다.

그러나 기판에 실장시 접착부분(리드)만이 가열

*한국과학기술원 기계공학과

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

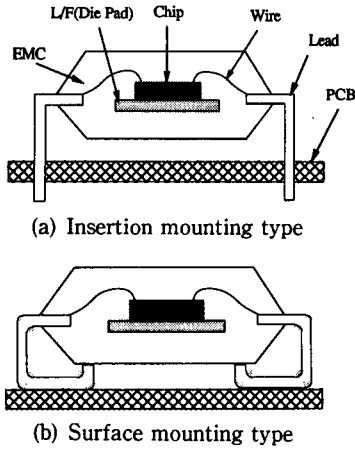


Fig. 1 Package type

되는 삽입형 패키지와는 달리 표면실장형 패키지는 실장시 패키지 전체가 210°C ~ 260°C에 노출되어 열충격하중에 의한 안정성 문제가 야기되므로 이를 고려한 최적의 패키지 설계가 필요하다. 열충격하중에 의해 발생하는 패키지의 손상형태로는 패키지 및 칩의 균열(crack), 계면층간박리(interface delamination) 및 연결선파손(wire bond breakage) 등이 있다.⁽¹⁾ 이중 주로 발생하는 파손형태는 Fig. 2와 같이 리드프레임(lead frame, L/F)과 수지의 접합면에서 층간박리후 수지의 파손으로 이어지는 형태이다.

Steiner와 Suhl⁽²⁾는 표면실장형 패키지에서 발생하는 균열에 영향을 주는 인자들을 조사하였으며, 이중 가장 중요한 인자로서 수지에 흡수되는 습기량을 들고 있는데, 이것은 수지에 흡수된 습기가 각 계면에 모이게 되어 이로 인한 계면파괴인성치의 저하 및 공정 중간에 포화수증기압에 의해 층간박리를 야기시키기 때문이다. Nguyen 등⁽³⁾은 패키지의 기하학적 형상이 응력에 주는 영향을 조사하여 칩의 크기에 따라 수지에 걸리는 응력이 크게 증가하고 있음을 보여주고 있다. Glaser와 Juare⁽⁴⁾는 VPS(vapor phase soldering)법과 IR(infrared reflow)법에 의한 패키지의 기판 실장시 패키지내의 온도분포와 응력분포를 구하였으며, 응력이 0이 되는 기준온도의 설정이 중요함을 언급하였다. Kornblum과 Glaser⁽⁵⁾는 패키지 균열진전이 일반적으로 알려진 습기팽창 뿐만 아니라 습기구배에 의해서도 진전한다는 새로운 메카니즘(mechanism)을 제시하였다. Miyake 등⁽⁶⁾은 L/F과 수지의 제

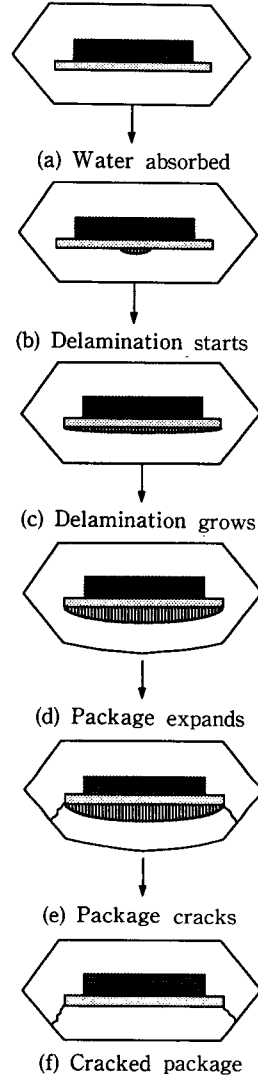


Fig. 2 Mechanism for moisture-induced package cracking on surface mount attachment (Manzione⁽¹¹⁾)

료에 따른 응력분포를 구하였으며 또한 2차원 모델과 3차원 모델을 비교한 결과가 서로 잘 일치하고 있음을 보여준다. Sullivan 등⁽⁷⁾은 광탄성실험과 수치해석을 동시에 수행하여 비교함으로써 수치해석시 온도에 따른 물성치를 사용할 때 실험에 의한 응력분포와 수치결과가 서로 잘 일치함을 보여주고 있다.

그러나 이들의 연구에서는 균열을 고려하지 않고 패키지내의 온도구배에 의한 응력분포만을 구하여 패키지의 신뢰성을 평가하였으며, 대부분의 연구자

들이 재료의 물성치를 일정하게 놓고 해석하였다. 그러나 외부하중 조건하에서 균열이 존재할 경우 이 균열선단에서 응력집중현상이 일어나므로 패키지의 정확한 신뢰성 평가를 위해서는 파괴역학 개념의 도입이 필요하며, 재료의 물성치는 유리전이 온도(glass transition temprature)를 지나면서 크게 변화되고 있으므로 물성치의 온도에 따른 변화를 고려해야 보다 신뢰성있는 평가를 할 수 있다.

파괴역학 매개변수로는 에너지방출률(energy release rate), 응력강도계수(stress intensity factor) 및 T응력 등이 있으며 이들을 보다 정확하게 계산하기 위하여 보존적분(J, M, L적분, 상호매개적분)을 이용하는 것이 바람직하다. 그러나 기계적하중만이 작용하는 경우 애초 제안된 보존적분을 그대로 이용할 수 있으나 열하중이 추가되는 경우 이들을 적절히 수정해야 되며 여러 연구자들^(8~10)은 열하중을 받는 경우에 대해 J, M적분이 보존되도록 수정하였다. 그리고 실제 패키지내의 수지의 물성치는 일반적으로 유리전이온도를 지나면서 매우 크게 변하기 때문에 온도에 따른 물성치의 변화를 고려해야만 한다. 이에 본 연구에서는 물성치가 일정하지 않는 경우에 대해서도 J적분이 보존되도록 수정하였다.

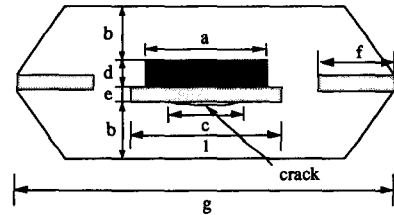
계면균열은 균질재료내의 균열과는 달리 일반적으로 혼합모드이기 때문에 균열선단에서 각각의 모드에 해당하는 응력강도계수를 구해야만 한다. 응력강도계수를 구하는 방법으로는 변위외삽법,⁽¹¹⁾ 특이요소법⁽¹²⁾ 및 보존적분을 이용하는 방법⁽¹³⁾ 등이 있다. 그러나 이 중 보존적분을 이용하는 경우 매우 안정된 값을 얻을 수 있으므로, 본 연구에서는 상호매개적분을 열하중이 작용하는 경우에 대해 수정하여 응력강도계수를 구하였다. 그러나 상호매개적분을 이용하는 경우 보조장을 이용하게 되는데 물성치가 온도에 따라 변하는 경우에 대한 해를 얻을 수 없기 때문에 응력강도계수를 구할 때는 실온에서의 물성치를 사용하여 계산하였다.

패키지내의 응력해석은 다음 장에서 자세히 언급할 층간박리 및 L/F의 모서리에서 발생하는 패키지균열로 나눌 수 있다. 따라서 본 연구의 제1부에서는 L/F과 수지의 계면에 존재하는 균열의 거동을 해석하기 위해 파괴역학 매개변수인 에너지방출률, 응력강도계수 및 T응력을 구하고, 이로부터 재료의 물성치, 기하학적 형상 및 공정의 변화에 대한 영향을 평가하고자 한다. 제2부⁽¹⁴⁾에서는 층

간박리 후에 균열이 수지로 꺾이는 현상에 대하여 M적분을 이용하여 위에 언급한 인자들의 영향에 대해 연구하고자 한다.

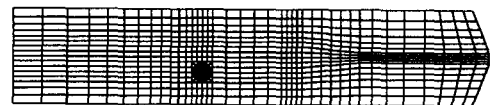
2. 문제의 모델링

앞서 언급하였듯이 표면실장형 패키지파손의 대표적인 형태는 L/F과 수지사이에서의 층간박리 후 패키지균열로 이어지는 파손이다. 이것을 상세히 기술하면 다음과 같다. 우선 수지의 습기흡수율이 매우 높기 때문에 몰딩(molding)을 한 패키지는 보통 수분을 흡수하고 있으며(Fig. 2(a)), 흡수된 습기는 L/F이나 칩의 습기흡수율이 매우 낮기 때

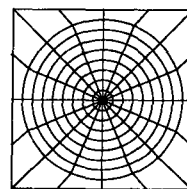


Location	Dimension(mm)
a	7.9
b	0.475
d	0.3
e	0.15
f	1.9
g	14.
l	8.5

Fig. 3 Analysis model and its dimension



(a)



(b)

Fig. 4 (a) Finite element mesh of the model
(b) Near crack tip region

Table 1 Material properties

		k (W/m°C)	ρ (kg/m ³)	C (J/kg°C)	E (GPa)	ν	α (ppm/°C)
L/F	Cu	196.6	8920	400	119.3	.34	16.9
	Alloy	15.91	8300	502.44	167	.29	10.1
Plastic	I	.67	1820	1884	12.753	.25	16
	II	1.46	2070	1170	16.3	.3	27
Chip		153	2330	703	165.5	.25	2.3

문에 L/F과 수지 또는 칩과 수지사이의 계면에 모이게 된다. (Fig. 2(b)) 계면에 모이게 된 습기는 소더링(soldering)을 할 때 포화수증기가 되고, 이때 계면에 수증기압이 가해지게 되어 완전한 층간 박리로 성장하게 되며(Fig. 2(c), Fig. 2(d)), 결국 이것은 패키지균열로 성장하게 된다. (Fig. 2(e))

현재 이와 같은 층간박리 및 패키지균열을 방지하기 위한 대책으로 수지의 개선, L/F의 형상 및 재질에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다. 또한 칩크기의 증가 또는 전체 패키지두께의 감소로 인한 응력의 증가를 완화시키기 위하여 전체적인 형상 및 위치의 변화에 대한 연구도 이루어지고 있다.

본 연구에서의 패키지해석은 비교적 값이 싸고 많이 사용되는 표면실장형 플라스틱패키지의 대표적 형상인 PLCC(plastic leaded chip carrier)를 택하여 행하였으며, 이를 단순화한 형상은 Fig. 3과 같다. 이 모델에 대하여 다음의 3가지 측면에서 연구를 하였다. 우선 물성치의 영향을 평가하기 위하여 현재 사용되어지고 있는 L/F과 수지의 재질을 변화시키고, 기하학적 형상으로는 칩크기, 패드의 크기 및 다운셋의 변화로 인한 파괴역학 매개변수의 변화를 고찰하였다. 여기서 패드의 크기란 Fig. 3에서 a/1을 뜻하며, 다운셋이란 칩과 L/F이

패키지 중심으로부터 벗어난 정도를 의미한다. 마지막으로 공정에 대한 평가는 단순히 물딩온도가 각각 210°C, 235°C 및 260°C에서 상온으로 냉각되는 경우에 대하여 해석하였다.

2차원과 3차원 모델의 해석결과를 비교할 때, 서로 차이가 없다는 기존의 연구결과⁽⁶⁾에 근거하여, 본 연구에서는 2차원 평면변형률 상태로 가정을 하였으며, 또한 해석의 편의상 와이어(wire)는 생략하였으며, 기하학적 형상의 대칭성을 고려하여 1/2만 해석하였다.

현재 대부분의 연구자들은 패키지를 기판(board)에 실장할 때 온도상승을 해석하였으며 실장 후 실온으로 냉각시킬 경우는 거의 해석되어 있지 않다. 그러나 Fig. 2로부터 알 수 있듯이 패키지내에 파손을 일으키는 것은 실장 후 냉각시킬 때의 응력일 것이므로, 본 논문에서는 초기에 패키지 전체가 기판실장 온도에서 상온으로 냉각되는 경우를 해석하였다.

유한요소해석을 위한 요소분할은 Fig. 4에 나타냈다. 패키지내의 응력분포 해석시 균열선단 근방에서는 특이요소를 사용하였고, 그 이외의 곳에서는 정규요소를 사용하였다. 요소의 수와 절점의 수는 각각 752, 2641개이며, 각 재료의 물성치는 Table 1과 Table 2에 나타내었다.^(6,15,16)

3. 수정 J적분

열하중이나 체적력이 없고 균열면상에 표면력이 0일때 Rice⁽¹⁷⁾에 의해 제안된 J적분은 다음과 같다.

$$J = \int_{\Gamma} (Wn_1 - t_i u_{i,1}) ds \quad (1)$$

여기서, Γ 는 균열하면에서 시작하여 균열상면에서

Table 2 Material properties vs. temperature

		25	100	150	175	215
Plastic I	α (ppm/°C)	16	25	32	66	73
	E(GPa)	12.753	12	5.3	4.5	2.1
Plastic II	α (ppm/°C)	27	36	43	78	85
	E(GPa)	16.3	16	8	7.5	3.5

끝나는 임의의 적분경로이다. J적분은 단위길이의 균열이 진전할 때의 에너지차, 즉 에너지방출률의 의미를 갖는다.⁽¹⁸⁾ 또한 임의의 적분경로에 대해 보존이 되며, 여러 계면균열모델에서도 경로독립성이 성립함을 Park과 Earmme⁽¹⁹⁾이 보인 바 있다.

반면 열하중이나 균열면상에 표면력이 존재하며, 물성치가 온도의 함수일 경우 J적분은 경로에 따라 그 값이 보존이 되지 않으며, 또한 에너지방출률의 의미를 갖지 않는다. 그러나 온도분포가 균일하지 않고, 탄성계수가 온도의 함수이더라도 적분경로를 균열선단에 취하면 J적분은 에너지방출률의 의미를 갖는다.⁽²⁰⁾ 자세한 유도과정은 부록 A에 나타내었으며 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Gamma_\epsilon} (Wn_1 - t_i u_{i,1}) ds \\ &= \int_{\Gamma + \Gamma_s} (Wn_1 - t_i u_{i,1}) ds \\ &\quad + \int_{A-A_\epsilon} \left(\sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} - \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij}^m \epsilon_{kl}^m \right) dA \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, Γ 는 앞에서 언급한 바와 같은 경로이며, Γ_s 는 균열면에서의 경로, Γ_ϵ 는 $\epsilon \rightarrow 0$ 인 경로, A 는 Γ 로 둘러 쌓인 면적, A_ϵ 은 Γ_ϵ 으로 둘러쌓인 면적, 그리고 n_i 는 Γ 상에서 수직인 단위벡터 성분으로 이를 Fig. 5에 나타내었다. t_i 는 트랙션벡터(traction vector) 성분, u_i 는 변위성분이다. W 는 기계적 변형률 에너지 밀도(mechanical strain energy density)로

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^m \quad (4)$$

로 정의된다.

여기서, ϵ_{ij} 는 전변형률(total strain)로서

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^m + \epsilon_{ij}^t \quad (5)$$

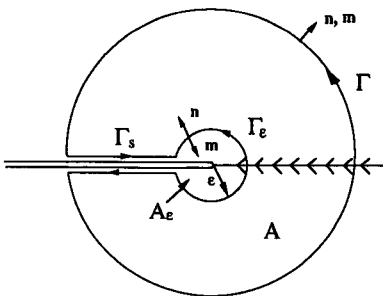


Fig. 5 Integration path

이며, ϵ_{ij}^m 는 기계적 변형률(mechanical strain), ϵ_{ij}^t 는 열변형률(thermal strain)이다.⁽²¹⁾

$$\epsilon_{ij}^t = \alpha(T)(T - T^0) - \alpha(T')(T' - T^0) \quad (6)$$

여기서, α 는 열팽창계수, T , T' , T^0 는 각각 현재의 온도, 초기온도, 기준온도이다.

C_{ijkl} 는 탄성계수로, 등방성재료일 경우

$$C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (7)$$

이다. 여기서, μ , λ 는 Lamé의 상수이며 δ_{ij} 는 크로네커델타(Kronecker delta)이다.

식(3)은 선적분과 면적분을 둘 다 포함하고 있으며, 선적분 수행시 응력과 변위구배는 Gauss점에서 비교적 정확하게 계산되기 때문에 Gauss점을 통과하는 경로를 택하게 된다. 그러나 FEM(finite element method)은 절점에서의 평형을 기초로 하기 때문에 Gauss점에서는 평형방정식을 만족시키지 못한다. Shih 등⁽²²⁾은 적절한 가중함수를 도입하면 선적분을 면적적으로 바꿀 수 있으며, 계산 결과는 이 가중함수에 별로 영향을 받지 않음을 보였다. 식(3)을 면적적으로 바꾸면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J &= \int_{A-A_\epsilon} \left[\left(\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{i,j} \right) q_{,j} + \left(\sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij}^m \epsilon_{kl}^m \right) q \right] dA - \int_{\Gamma_s} t_i u_{i,1} q ds \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, 가중함수 q 는 균열선단에서 1, 임의의 적분경로에서는 0이 되는 미분가능한 구분적연속함수(piecewise continuous function)이다.

4. 응력강도계수 및 위상각

복소응력강도계수, $K(=K_1 + iK_2)$ 는 균열선단 전방($\theta=0$)에서의 트랙션(traction)으로 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} \Big|_{\theta=0} = \frac{K r^{ie}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} \\ \epsilon &= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\kappa_1 \mu_2 + \mu_1}{\kappa_2 \mu_1 + \mu_2} \end{aligned} \quad (10)$$

이고 κ 는 평면변형률인 경우, $3-4\nu$, 평면응력인 경우, $(3-\nu)/(1+\nu)$ 이며, μ_i, ν_i ($i=1, 2$)는 각각 계면을 이루는 두재료의 위면과 아래면에서의 전단

계수와 푸와송비이다.

위의 정의로부터 알 수 있듯이 복소응력강도계수는 일반적으로 다음과 같은 형태가 된다.

$$K = \Lambda T \sqrt{LL}^{-i\epsilon} \quad (11)$$

여기서, T 는 작용응력, L 은 균열길이, 잔여길이 등과 같은 특성길이이며, Λ 는 작용응력의 위상각, L 과 다른길이와의 비 및 물성치에 의존하는 복소상수이다. 식(11)로부터 알 수 있듯이 응력강도계수 K 는 균질재료의 경우와는 달리 물리적으로 부적절한 단위를 포함하고 있다. 이에 Rice⁽²³⁾는 균질재료의 경우와 동일한 단위를 갖도록 다음과 같은 응력강도계수를 제안하였다.

$$K_I + iK_{II} = K \hat{r}^{i\epsilon} \quad (12)$$

계면균열의 경우 위상각에 따라 Λ 가 달라지게 되며 또한 위상각이 증가함에 따라 계면파괴인성치가 증가하기 때문에⁽²⁴⁾ 일반적으로 응력강도계수, 에너지방출률 및 위상각을 동시에 나타내 주어야 하는데 위상각은 다음과 같이 정의된다.

$$\phi = \tan^{-1} \frac{K_{II}}{K_I} = \tan^{-1} \frac{Im[K \hat{r}^{i\epsilon}]}{Re[K \hat{r}^{i\epsilon}]} \quad (13)$$

여기서, Re , Im 는 인수의 실수부와 허수부를 나타내며, 위의 정의로부터 알 수 있듯이 \hat{r} 의 선택에 따라 식(12)의 응력강도계수와 위상각이 달라지게 되나, 그 관계는 쉽게 알 수 있다. \hat{r} 은 일반적으로 파괴진전영역의 크기 또는 소성영역의 크기와 같은 재료에 기본을 둔 절대크기와 균열길이 등과 같은 형상에 기본을 둔 상대적크기로 나타내는 방법이 있다.⁽²⁴⁾ 전자의 경우는 실험값 등을 나타내는데, 후자의 경우 계면균열의 혼합모드 특성을 나타내는데 있어 장점이 있다. 본 연구에서는 현재 측정하고 있는 실험치와 비교할 목적으로 $\hat{r} = 1 \mu m$ 를 사용하였다.

에너지방출률, J적분과 응력강도계수와의 관계는 다음과 같다.⁽²⁵⁾

$$G = J = \frac{c_1 + c_2}{16 \cosh^2(\pi\epsilon)} K \bar{K} \quad (14)$$

여기서,

$$c_1 = \frac{1 + \kappa_1}{\mu_1}, \quad c_2 = \frac{1 + \kappa_2}{\mu_2} \quad (15)$$

따라서 계면균열의 경우 외부하중이 단축응력상태라도 균열선단에서는 혼합모드(mixed mode)이기

때문에 보존적분을 이용하여 응력강도계수를 구하기 위해서는 식(14)만으로는 부족하며 보조식이 필요함을 알 수 있다. 이에 대해 Chen과 Shield⁽¹³⁾는 탄성체내에 균열이 존재하는 두개의 서로 독립인 평형상태에 대한 상호매개적분을 도입함으로써 해결할 수 있음을 보였으며, 이것을 Wang과 Yan⁽²⁶⁾ 또는 Matos⁽²⁷⁾은 기계적하중이 작용하는 계면균열 문제에 적용하여 응력강도계수를 구하였다.

두개의 서로 독립된 계면균열문제를 각각 상점자 A 와 B 로 표시하기로 하자. 두개의 평형상태를 중첩함으로써 얻어지는 또 하나의 평형상태를 C 로 표시할 때 상태 C 에 대한 J적분은 다음과 같이 주어진다.

$$J^{(C)} = J^{(A)} + J^{(B)} + I_J^{(A,B)} \quad (16)$$

여기서, 상호매개적분 $I_J^{(A,B)}$ 는 식(14)와 (16)으로부터 응력강도계수와 다음의 관계가 있음을 알 수 있다.

$$I_J^{(A,B)} = \frac{c_1 + c_2}{8 \cosh^2(\pi\epsilon)} (K_1^A K_1^B + K_2^A K_2^B) \quad (17)$$

응력강도계수를 알고 있는 두개의 서로 다른 계면균열문제를 각각 B_1 과 B_2 로 표시하면 식(17)로부터 K_1^A , K_2^A 에 대한 2원 1차 선형방정식을 얻을 수 있으며 이로부터 K_1^A , K_2^A 는 다음과 같이 주어진다.⁽²⁸⁾

$$\begin{aligned} K_1^A &= \frac{8 \cosh^2(\pi\epsilon)}{c_1 + c_2} \left(\frac{I_J^{(A,B_1)} K_2^{B_2} - I_J^{(A,B_2)} K_2^{B_1}}{K_1^{B_1} K_2^{B_2} - K_1^{B_2} K_2^{B_1}} \right) \\ K_2^A &= \frac{8 \cosh^2(\pi\epsilon)}{c_1 + c_2} \left(\frac{I_J^{(A,B_2)} K_1^{B_1} - I_J^{(A,B_1)} K_1^{B_2}}{K_1^{B_1} K_2^{B_2} - K_1^{B_2} K_2^{B_1}} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

만일 보조장 B_1 으로 $K_1^{B_1} = 1$, $K_2^{B_1} = 0$, 보조장 B_2 로 $K_1^{B_2} = 0$, $K_2^{B_2} = 1$ 을 택하면 식(18)은 다음과 같이 간단히 주어진다.

$$\begin{aligned} K_1^A &= \frac{8 \cosh^2(\pi\epsilon)}{c_1 + c_2} I_J^{(A,B_1)} \\ K_2^A &= \frac{8 \cosh^2(\pi\epsilon)}{c_1 + c_2} I_J^{(A,B_2)} \end{aligned} \quad (19)$$

또한 상호매개적분의 적분형태는 다음과 같으며 자세한 유도과정은 부록 B에 기술하였다.

$$\begin{aligned} I_J^{(A,B)} &= \int_{r_c} (\sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^{B_1} n_i - t_i^A u_{i,1}^B - t_i^B u_{i,1}^A) ds \\ &= \int_{A-A_c} [(\sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^{B_1} + \sigma_{ij}^B \epsilon_{ij}^{A_1}) q \\ &\quad + (\sigma_{ij}^A u_{i,1}^B + \sigma_{ij}^B u_{i,1}^A - \sigma_{k_1}^A \epsilon_{k_1}^{B_1} \delta_{i,1}) q_j] dA \end{aligned}$$

$$-\int_{r_s} (t^A u_{r,1}^A + t^B u_{r,1}^B) q ds \quad (20)$$

여기서, 보조장 B 로는, 식(20)의 $I_j^{(A,B)}$ 를 계산하기 위한 적분경로로 둘러싸인 곳의 형상과 재료가 A 와 동일하기만 하면 적분경로 외부의 재료, 형상이나 하중에 관계없이 어떠한 해라도 사용할 수 있다.⁽²⁸⁾ 보조장으로는 Rice와 Sih,⁽²⁹⁾ Erdogan⁽³⁰⁾ 그리고 England⁽³¹⁾ 등이 해석한 해를 이용할 수도 있으나, 본 연구에서 사용된 해는 범현규와 엄윤용⁽³²⁾이 사용한 해를 열하중이 있는 경우에 대해 수정한 점근해로서 부록 C에 자세히 기술하였다.

위 방법의 정확성과 상호매개적분의 경로독립성을 검토하기 위해 기계적하중과 열하중의 경우에 대해 응력강도계수, J적분 및 위상각을 계산하였다. 먼저 기계적하중의 경우 Rice와 Sih⁽³⁰⁾가 해석한 균열길이가 $2a$ 인 무한평판의 계면균열에 대해서 수치해석을 하였다. 하중조건 및 물성치를 Fig. 6에 나타내었으며, 여기서, 아래평판에 일정한 σ_{xx} 를 작용한 이유는 계면에서 x 방향의 변형률을 일치시키기 위해서다.⁽³⁰⁾ Fig. 6의 문제(유한폭 W 와 유한높이 H)를 ABAQUS⁽²¹⁾를 사용하여 응력장 및 변위장을 구한 후, 식(20)으로부터 상호매개적분을 계산하였고, 이것을 식(18)에 대입하여 복소 응력강도계수를 구하였다. 최종적으로 Rice⁽²³⁾가 제안한 응력강도계수를 식(12)로부터 구하고 Table 3에 나타내었다. 여기서 적분영역은 균열선단을 중심으로 반경이 R_1, R_2, \dots, R_7 인 원을 택하

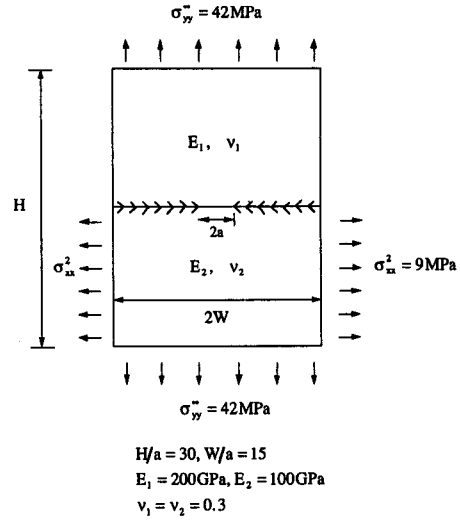
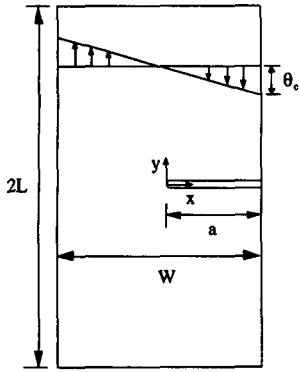


Fig. 6 Infinite plate with interfacial crack of length $2a$ under mechanical loading

였다. R_1 은 최소메쉬(mesh) 크기, $R_7 = a$ 로 하고 R_2, \dots, R_6 는 R_1 과 R_7 을 적절히 분할하고, 균열선단에서는 특이요소를 사용하였다. 그것을 영역(domain) 1, 2, \dots , 7로 하여 각 영역에 따른 경로독립성을 검토하였다. 또한 보조장으로는 부록 C의 식(C15)에서 $K_1^{B1} = 2$, $K_2^{B1} = 1$ 과 $K_1^{B2} = 1$, $K_2^{B2} = 2$ 를 각각 대입한 것을 이용하였다. Table 3에서 적분영역 1, 2, \dots , 7중 균열선단에서 가장 가까운 영역 1에서는 수치적으로 구한 응력장의 오차가 크므로

Table 3 Stress intensity factors for mechanical loading shown in Fig. 6

Domain	K_I (MPa $m^{1/2}$)	K_{II} (MPa $m^{1/2}$)	ϕ (degree)
1	74.5526	-4.5794	-3.5150
2	74.6823	-4.5949	-3.5207
3	74.6999	-4.5969	-3.5207
4	74.7042	-4.5974	-3.5217
5	74.7057	-4.5976	-3.5217
6	74.7063	-4.5977	-3.5217
7	74.7066	-4.5977	-3.5217
Average(2~7)	74.7009	-4.5970	-3.5215
Rice & Sih ⁽²⁸⁾	74.5242	-4.5232	-3.4733
% Error	0.237	1.632	1.388



$$\begin{aligned} \theta &= \theta_c (2x/W) \\ a/W &= 0.5, L/W = 2.0 \\ E &= 207 \text{ GPa}, \nu = 0.3 \\ \alpha &= 13.5 \times 10^{-6} / ^\circ \text{C} \end{aligned}$$

Fig. 7 Plate under thermal loading

Table 4 Normalized J-integral for thermal loading shown in Fig. 7 ($\sigma_0 = E\alpha\theta_c/(1-\nu)$)

Domain	$J/(\sigma_0^2 a/E)$
1	.7183
2	.7025
3	.7047
4	.7051
5	.7052
6	.7053
Average	.7068
Wilson&Yu ⁽⁸⁾	.7250
Shih et. al. ⁽²²⁾	.6744

평균을 취할 때 이 영역은 제외하였다. 모드 I의 경우 해석해와 매우 잘 일치하고 있으며, 모드 II의 경우 모드 I보다 값이 상대적으로 매우 작으며, 실제 해석해와도 오차가 1.5% 정도로 약간 크다.

다음에 열하중의 경우, Wilson과 Yu⁽⁸⁾ 그리고 Shih 등⁽²²⁾이 수치적으로 해석한 유한평판에 균열이 존재하고 x_1 방향으로 선형온도구배가 있는 문제를 예제로 하여 해석하였는데, 이 문제는 해석해가 없는 수치해이다. 형상 및 재료의 물성치를 Fig. 7에 나타내었으며, 적분영역은 기계적하중의 경우와

마찬가지다. 기계적하중의 경우와 마찬가지로 응력강도계수를 계산하여 식(14)로부터 J적분을 계산하였으며, 그 결과를 Table 4에 나타내었다. Wilson과 Yu⁽⁸⁾의 경우 적분영역은 균열선단에서 최외곽까지를 5등분하여 계산, 요소수가 비교적 작으며, Shih 등⁽²²⁾은 Wilson과 Yu⁽⁸⁾의 영역 4번째까지를 9등분하여 해석하였다. Shih 등⁽²²⁾은 요소수를 보다 증가시켜 이들의 해가 Wilson과 Yu⁽⁸⁾의 해보다 정확함을 주장하고 있다. 본 연구에서 수행한 결과는 Wilson과 Yu⁽⁸⁾와 약 2.6%, Shih 등⁽²²⁾과 약 4.6%의 오차를 보이고 있으며, 이들 두 결과 사이에 존재한다. 본 연구의 결과는 실제 균열선단에 특이요소를 사용하였기 때문에 보다 나은 결과가 될 수 있으며, 여러 다른 결과가 이루어지면 해의 타당성이 검토될 것으로 생각된다.

5. T응력

선형탄성 균열선단의 응력장에서 Williams⁽³³⁾ 급수전개의 두번째 항인 T응력은 파괴역학에서 중요한 역할을 한다. Larsson과 Carlsson⁽³⁴⁾ 그리고 Rice⁽³⁵⁾는 T응력의 부호 및 크기에 의해 평면변형률 균열선단의 소성영역의 크기와 모양이 크게 바뀌고 있음을 보였다. 또한 Cottrell과 Rice⁽³⁶⁾는 T응력의 부호가 모드 I 균열의 안정성(stability)에 관여되고 있음을 보였다. 즉, $T > 0$ 인 경우 재료의 결함등에 의하여 균열이 초기 균열면에서 벗어날 때 불안정하게 벗어나는 반면, $T < 0$ 인 경우 균열이 벗어나더라도 곡선기울기의 감소로 인하여 안정된 균열로 진전함을 보였다. Bilby 등⁽³⁷⁾은 비경화재료(non hardening material)에서 탄소성 균열선단의 3축 응력상태(hydrostatic triaxiality)가 T응력에 크게 영향을 받음을 보였다. 따라서 T응력은 J적분과 더불어 탄소성 균열선단 응력장에 중요한 매개변수임을 알 수 있으며, 일반적인 유한체에서 T응력을 효율적으로 정확하게 계산하는 것은 매우 중요하다 할 수 있다.

2차원 균질재료의 경우, 여러 연구자들^(37,38)은 다양한 하중형태, 균열길이 및 전체적인 기하학적 형상에 대해 T응력을 구하였으며 이중 Cardew 등⁽³⁸⁾은 상호매개적분을 이용하였으며, Nakamura와 Parks⁽³⁹⁾는 이를 3차원 균열에 적용하였다. 또한 범현균와 엄윤용⁽³²⁾은 2차원 계면균열문제에 적용, 반무한균열 및 특이점(dislocation, point force, couple)이

동시에 존재하는 문제를 해석하였다. 이에 본 연구에서는 유한체에 열하중이 작용하는 계면균열의 경우에 이를 적용하여 T응력을 구하고자 한다.

우선 온도차 ΔT 가 있는 열하중의 계면균열선단에서의 응력장은 다음과 같다. (부록 C)

재료 1 :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{Re[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} f_{11}^I(\theta) + \frac{Im[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} f_{11}^{II}(\theta) \\ &\quad + T_1 + \frac{8(\alpha_2^* - \alpha_1^*)}{c_1 + c_2} \Delta T + O(r) \\ \sigma_{22} &= \frac{Re[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} f_{22}^I(\theta) + \frac{Im[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} f_{22}^{II}(\theta) + O(r) \\ \sigma_{12} &= \frac{Re[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} f_{12}^I(\theta) + \frac{Im[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} f_{12}^{II}(\theta) + O(r) \end{aligned} \quad (21a)$$

재료 2 :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{Re[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{f}_{11}^I(\theta) + \frac{Im[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{f}_{11}^{II}(\theta) \\ &\quad + T_2 - \frac{8(\alpha_2^* - \alpha_1^*)}{c_1 + c_2} \Delta T + O(r) \\ \sigma_{22} &= \frac{Re[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{f}_{22}^I(\theta) + \frac{Im[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{f}_{22}^{II}(\theta) + O(r) \\ \sigma_{12} &= \frac{Re[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{f}_{12}^I(\theta) + \frac{Im[Kr^{i\epsilon}]}{\sqrt{2\pi r}} \tilde{f}_{12}^{II}(\theta) + O(r) \end{aligned} \quad (21b)$$

여기서, $f_b^I(\theta)$, $f_b^{II}(\theta)$, $\tilde{f}_b^I(\theta)$ 과 $\tilde{f}_b^{II}(\theta)$ 는 θ 에 의존하는 상수이며, α^* 는 평면변형률인 경우 $\alpha(1+\nu)$ 이며, 평면응력인 경우 α 이다.

상호매개적분에 보조장으로 사용되는 응력장은 Fig. 8과 같이 균열선단에 균열진전 방향으로 단위 집중하중이 작용하는 응력장으로써 다음과 같다.

재료 1 :

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{\pi r} \frac{c_2}{c_1 + c_2} (2\cos\theta - \sin\theta\sin 2\theta)$$

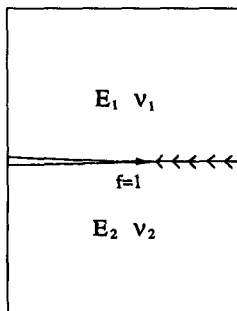


Fig. 8 Auxilliary field

$$\begin{aligned} \sigma_{22} &= -\frac{1}{\pi r} \frac{c_2}{c_1 + c_2} \sin\theta\sin 2\theta \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{\pi r} \frac{c_2}{c_1 + c_2} (\sin\theta + \sin\theta\cos 2\theta) \end{aligned} \quad (22a)$$

재료 2 :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{1}{\pi r} \frac{c_1}{c_1 + c_2} (2\cos\theta - \sin\theta\sin 2\theta) \\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{\pi r} \frac{c_1}{c_1 + c_2} \sin\theta\sin 2\theta \\ \sigma_{12} &= -\frac{1}{\pi r} \frac{c_1}{c_1 + c_2} (\sin\theta + \sin\theta\cos 2\theta) \end{aligned} \quad (22b)$$

따라서 점근해 식(21)과 보조장 식(22)를 상호매개적분 식(20)에 대입하게 되면 다음의 관계를 얻는다.

$$I^{(A,B)} = \frac{c_1}{8} T_1^{(A)} \quad (23)$$

여기서, $T_1^{(A)}$ 는 재료 1에서의 T응력이며 재료 2에서의 T응력은 $c_1 T_1^{(A)}/c_2$ 이다. 그리고 식(23)으로

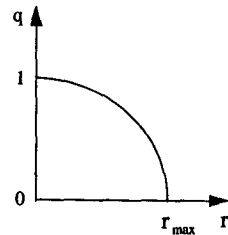
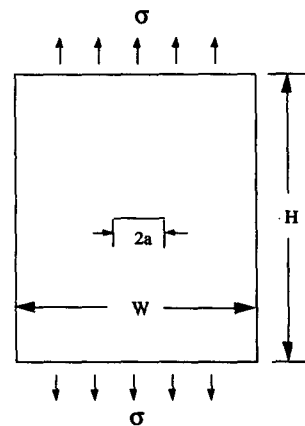


Fig. 9 Weight function



$$K_1 = \sigma\sqrt{\pi a}, G = \frac{K_1^2}{(E/1-\nu^2)}$$

$$T = -\sigma$$

$$E = 200\text{GPa}, \nu = 0.3$$

$$W/2a = 15, H/2a = 15$$

Fig. 10 Infinite homogeneous plate under uniaxial tension

Table 5 Infinite homogeneous plate under uniaxial tension shown in Fig. 10

Path no.	K_I (MPa m ^{1/2})	G (MPa m)	T-Stress (MPa)
1	74.91017	.02553248	-41.25839
2	74.90696	.02553029	-42.13243
3	74.90415	.02552838	-42.28189
4	74.90299	.02552758	-42.32334
5	74.90248	.02552724	-42.33838
6	74.90225	.02552708	-42.34488
7	74.90214	.02552700	-42.34809
Average	74.90349	.02552735	-42.29483
Exact	74.44306	.02521505	-42.00000
Errot(%)	0.618	1.238	0.702

부터 알 수 있듯이 열하중에 의한 상수항은 T응력에 영향을 주지 않으며, 단지 기계적하중만이 작용한 경우와 동일함을 알 수 있다. 그러나 일반적으로 열유속이 있고 온도가 좌표의 함수가 될 경우에는 균열선단의 응력장이 특이(singular)하기 때문에 위 식과 동일하게 주어지지 않는다.

식(22)로부터 알 수 있듯이 보조장 B에서의 응력장은 r^{-1} 특이성을 갖으며 또한 수치계산시 균열선단에서의 응력이 부정확하기 때문에 응력강도계수를 구할 때와는 달리 가중치 q 를 잘 조절해야 한다. 본 연구에서는 보조장 B에서의 r^{-1} 특이성을 제거하기 위해 Fig. 9에 보인 바와 같이 균열선단에서 q 의 기울기가 0이 되도록 2차 다항식을 사용하여 계산하였으며, 그 결과 경로에 따라 상호매개적분이 잘 보존되고 있음을 알 수 있었다. 열하중이 작용하는 경우 T응력에 대해 계산한 문헌이 없는 관계로 균질재료에서 단축응력($\sigma_{22}=\sigma$, $\sigma_{11}=\sigma_{12}=0$)이 작용하는 경우(Fig. 10)에 대해 해석하였다. (Table 5) 여기서 적분영역은 앞절의 예제와 동일하게 사용하였다. 수치해석 결과는 해석해($T=-\sigma$)와 0.7% 범위내에서 잘 일치하고 있으며 또한 경로독립성도 잘 만족되고 있음을 알 수 있다.

6. 수치계산의 결과 및 토의

6.1 온도분포

패키지가 기판실장 온도인 210°C에서 상온인

25°C로 냉각될 때 패키지의 온도분포를 상용 FEM 프로그램인 ABAQUS⁽²¹⁾를 이용하여 해석하였다. 이때 각각의 계면에서는 온도 및 열유속이 연속이며, 대칭면과 균열면에서는 단열로 가정하였다.

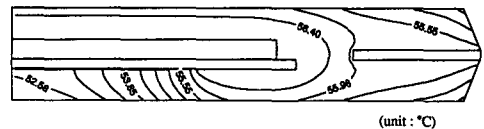


Fig. 11 Temperature distribution at 100 second. See Table 1 for material properties

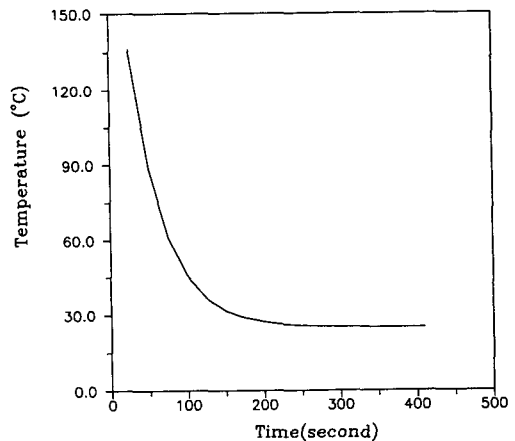


Fig. 12 Temperature variation at crack tip with time. See Table 1 for material properties (crack length : $c/l=0.654$)

100초후 패키지내의 온도분포를 Fig. 11에 나타내었으며 균열선단에서의 시간에 따른 온도변화를 Fig. 12에 나타내었다. Fig. 11에서 보는 바와 같이 여러 계면의 모서리(edge)에서 온도구배가 큼을 알 수 있다.

6.2 응력분포

패키지내의 온도구배에 의한 응력분포를 온도해석에서와 마찬가지로 ABAQUS⁽²¹⁾를 이용하여 해석하였으며 요소분할은 온도장 해석시의 요소분할을 그대로 사용하였다. y 축 대칭면에서는 x 방향의 변위를 0으로 하였으며 다른 임의의 한점에서 y 축의 변위를 0으로 하여 강제운동을 제거하였다. 그

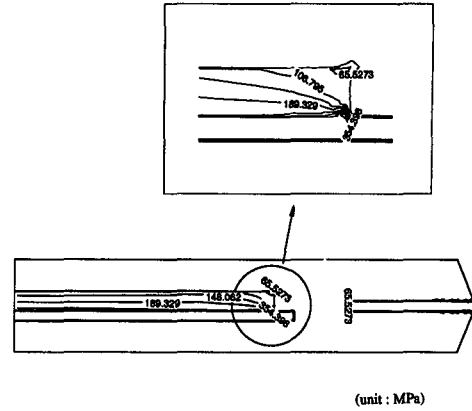


Fig. 13 Stress distribution at 100 second. See Table 1 for material properties

Table 6 Path independence of stress intensity factor, energy release rate and T-stress in analysis model shown in Fig. 3

Path no.	K_I (MPa mm ^{1/2})	G (MPa mm)	T-Stress (MPa)
1	.3207698	1.588451E-3	-121.5811
2	.3206973	1.586582E-3	-121.5821
3	.3206715	1.585985E-3	-121.5831
4	.3206592	1.585756E-3	-121.5841
5	.3206522	1.585676E-3	-121.5851
6	.3206475	1.585667E-3	-121.5861
7	.3206448	1.585701E-3	-121.5872

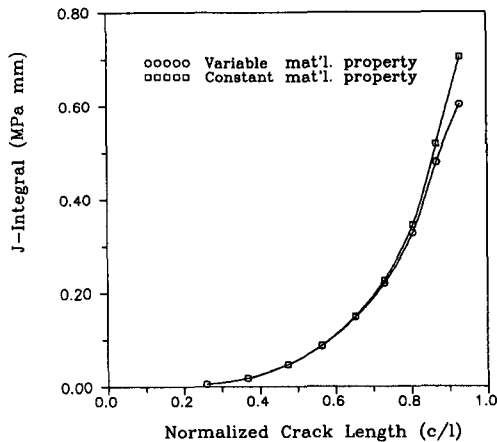


Fig. 14 J-Integral vs. normalized crack length for two cases, one with constant material properties and other with variable ones. See Table 1 for material properties

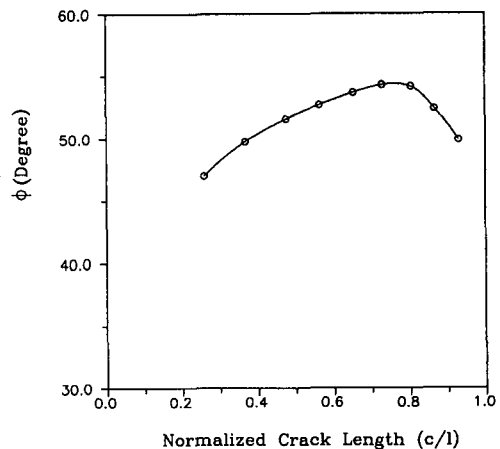


Fig. 15 Phase angle vs. normalized crack length. See Table 1 for material properties

리고 균열면에는 210°C에서의 포화수증기압인 2.12 MPa의 압력을 가하는 것으로 가정하였다. 온도분포와 마찬가지로 100초후 패키지내의 응력분포를 Fig. 13에 나타내었다. 즉 온도분포에서 예측되는 바와 같이 모서리 부분 및 균열선단 부위에서 응력이 집중됨을 알 수 있다.

6.3 응력강도계수, 위상각 및 J적분

위에서 구한 온도, 응력분포와 보조장을 이용하여 상호매개적분을 계산하였으며 이로부터 응력강도계수 및 위상각을 계산하였으며, J적분은 물성치를 일정하게 사용한 경우 응력강도계수로부터 구하

였고, 물성치가 온도의 함수인 경우 식(8)을 이용하여 계산하였다. 본 문제에서의 경로독립성은 Table 6에 나타낸 바와 같이 잘 보존되고 있음을 알 수 있다. 이를 바탕으로 수지 및 L/F의 재료를 바꾸어서 물성치(E, ν, α)의 영향에 대해 알아보았으며 또한 칩의 크기, 패드의 크기 및 다운셋을 변경함으로써 패키지의 기하학적 형상의 영향에 대해 연구하였으며, 마지막으로 VPS시의 온도변화에 의한 공정 변화의 영향을 고찰하였다.

우선 물성치가 온도에 따라 변하는 경우와 실온에서의 물성치로 일정하게 사용한 경우를 Fig. 14에 나타내었다. 이때 물성치가 일정한 경우 실제보다 약간 과대평가하고 있다. 이것은 탄성계수 저하에 의한 응력완화를 고려하지 못하였기 때문인 것으로 생각되며, 실제 실험을 수행한 Sullivan 등⁽⁷⁾의 결과와도 서로 일치하고 있다. 위상각은 거의 모든 경우에 대하여 약 40°~60°사이 에 있으며 대표적인 경우에 대하여 Fig. 15에 나타내었다. 이것은 열하중의 경우 전단응력에 의한 응력특이성이 매우 큼을 나타내고 있다.

본 연구에 사용된 수지들의 차이점은 수지에 첨가되는 실리카(silica)의 차이로 인하여 열팽창계수 및 탄성계수가 서로 다르다. L/F으로 Cu를 사용하고 수지의 재료를 바꾸었을 경우에 대해 응력강도계수와 J적분을 Fig. 16에 나타내었다. 그림에서

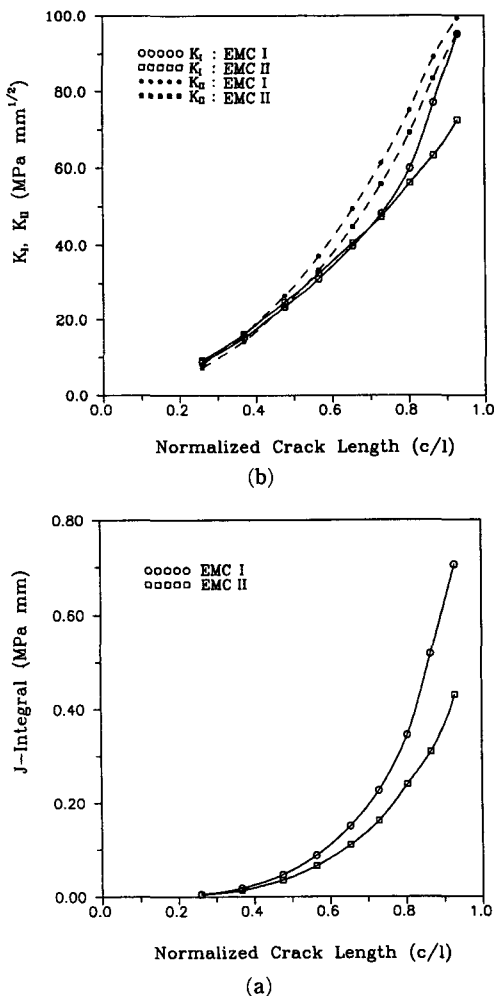


Fig. 16 (a) Stress intensity factors, (b) J-integral vs. normalized crack length for two kinds of EMCs. See Table 1 for material properties

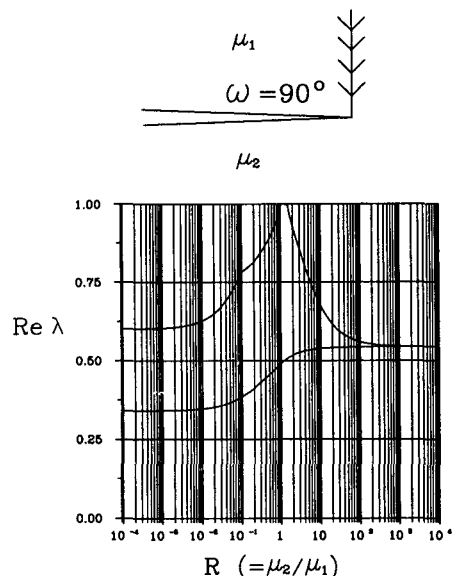
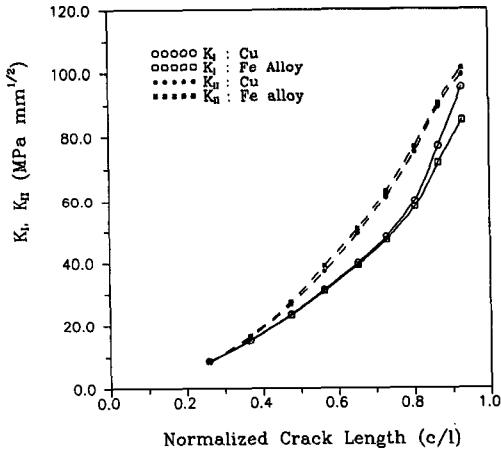


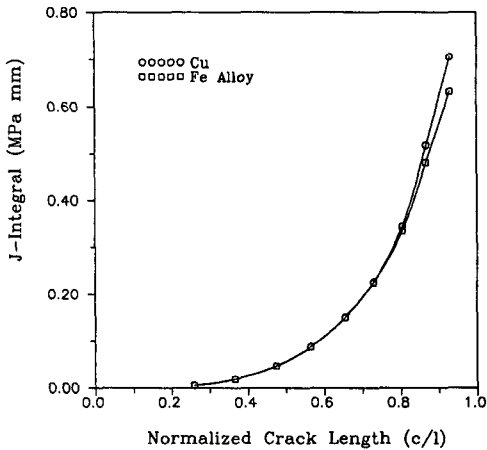
Fig. 17 Singularity order with shear modulus ratio

보는 바와 같이 균열이 L/F과 수지의 모서리에 가까워질수록 차이가 커지고 있음을 알 수 있는데, 이것은 모서리 부분에서의 응력집중의 차이로 인한 것임을 알 수 있다. 우선 기계적하중만이 작용하는 경우 모서리에서의 응력은 일반적으로 $\sigma \sim r^{Re\lambda-1}$ 의 특성을 갖으며 두개의 접합부위가 $\omega, 2\pi-\omega$ 로 이루어진 경우에 대해 ω 가 90°일 경우 λ 를 구하면 Fig. 17과 같다. 따라서 본 연구에 사용된 두 경우에 대해 전단계수의 비, R 은 각각 0.1146과 0.1408이며 $Re\lambda-1$ 는 각각 -0.6093과 -0.5984이다. 따라서 수치 II의 경우 특이차수(singular order)가

더 작으므로 Fig. 16과 같은 결과를 보인 것으로 생각된다. 그러나 수지를 고정시키고 L/F으로 Cu와 Fe 합금을 사용하는 경우에 대해서 R 은 각각 0.1146과 0.0779이므로 Fe합금의 경우에 특이차수가 더 큼에도 불구하고 Fig. 18에 나타난 바와 같이 더 낮은 결과를 초래하였다. 이것은 Fe합금과 수치 I의 열팽창계수의 차이로 인하여 생긴 것으로 판단된다. 따라서 모서리 부분에서의 응력집중을 평가할 경우 탄성계수, 푸아송비 및 열팽창계수 모두를 포함하는 특이차수 해석이 매우 중요하다고 할 수 있다.



(a)



(b)

Fig. 18 (a) Stress intensity factors, (b) J-Integral vs. normalized crack length for two kinds of lead-frames. See Table 1 for material properties

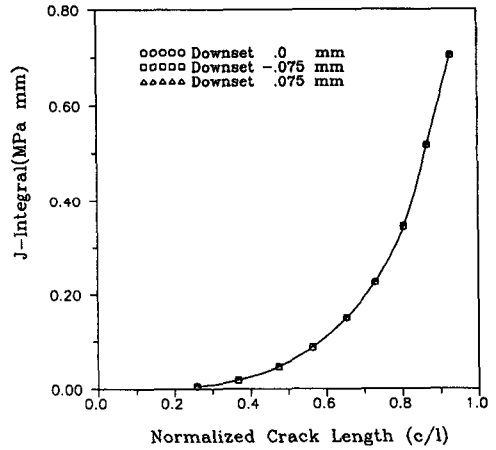


Fig. 19 J-Integral vs. normalized crack length for three kinds of downsets. See Table 1 for material properties

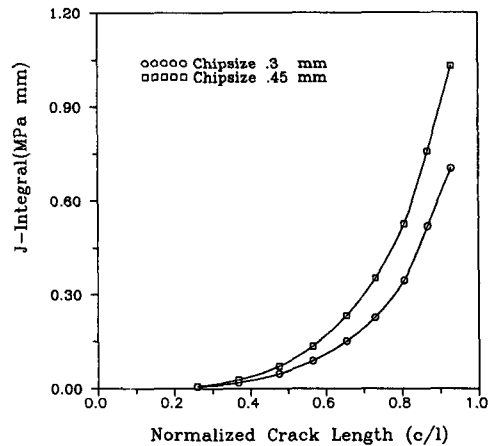


Fig. 20 J-Integral vs. normalized crack length for two kinds of chip sizes. See Table 1 for material properties

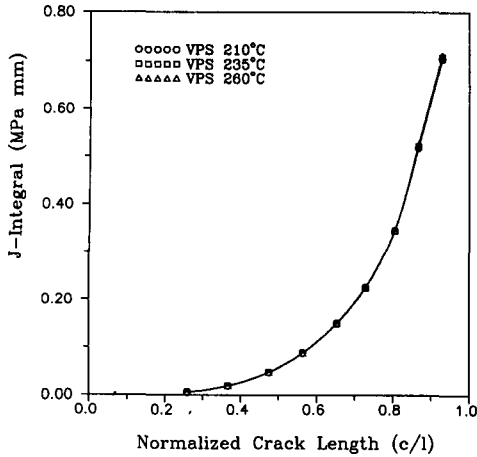


Fig. 21 J-Integral vs. normalized crack length for three kinds of vapor phase soldering temperatures. See Table 1 for material properties

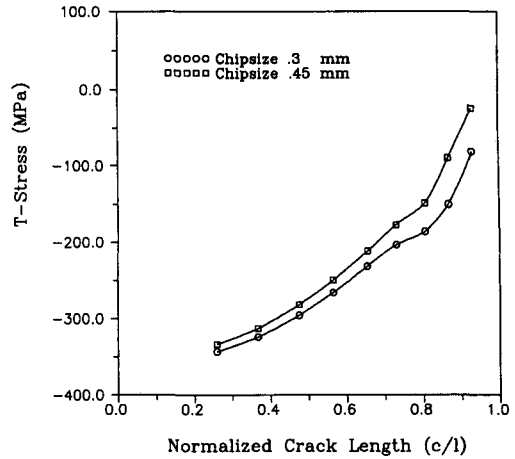


Fig. 22 T-stress vs. normalized crack length for two kinds of chip sizes. See Table 1 for material properties

기하학적 형상의 영향으로 우선 다운셋은 Fig. 19에 나타난 바와 같이 거의 영향을 끼치지 않는다. 그러나 칩의 크기 및 패드의 크기를 변화시키는 경우 Fig. 20에 나타난 바와 같이 재료의 물성치가 끼치는 영향보다 큼을 알 수 있다. 즉, 이것은 재료의 기하학적 위치 및 크기의 변화로 인하여 강성(stiffness)의 변화를 초래하여 큰 굽힘응력(bending stress)이 작용함을 알 수 있다. 위에 언급한 다운셋의 변경은 단순히 칩과 L/F의 크기를 그대로 하고 위치만을 약간 변화시키게 되므로 강성이 거의 변하지 않게 되어 Fig. 18과 같은 결과를 나타낸 것으로 보인다. 따라서 현재 칩의 크기를 증가시키는 경향에 대해, 칩크기의 증가에 따른 에너지방출률의 증가를 패드크기의 감소 및 전체적인 패키지 폭의 변화를 통하여 에너지방출률을 감소시키는 방향으로 설계가 이루어져야 할 것이다.

마지막으로 VPS 온도의 영향을 알아보기 위하여 210°C, 235°C 및 260°C에서 상온으로 냉각될 때를 해석한 결과 층간박리에는 거의 영향을 끼치지 않는 것으로 나타났다. (Fig. 21) 즉, 열유속이 균열선단에서 특이(singular)하지 않으며 또한 응력장에는 단순히 x방향의 응력만이 영향을 받기 때문인 것으로 생각된다.

6.4 T응력

T응력은 앞절에서 언급한 바와 같이 일반적으로 소성영역의 크기, 모양 및 균열의 안정성과 관련이

있다. 균열의 안정성과 관련하여 $T > 0$ 인 경우 불안정하며, $T < 0$ 인 경우 균열이 제조과정중의 결함에 의해 꺾이게(kinked) 되더라도 곧 안정된 균열로 진전함을 언급하였다. 본 연구에서 수행한 모든 경우에 대해 T응력은 0보다 작았으며(Fig. 22) 이것은 패키지내의 균열이 대체적으로 층간박리 중간에 꺾이지 않고 L/F과 수지의 모서리 부분에 이르러 패키지균열로 진전되는 현상과 일치한다.

7. 결론

본 연구에서는 반도체패키지의 층간박리에 대해서 파괴역학을 도입하여 해석을 하였다. 즉 J적분, T응력 및 상호매개계분을 통한 응력강도계수의 개념을 고려하였으며 이들을 열하중이 작용하는 경우에 대해 수정하였다. 여러 모델에서의 차이점은 주로 모서리에서의 응력집중과 강성의 변화로 인한 굽힘응력의 영향에 의한 것임을 알 수 있었다. 따라서 최적의 패키지설계가 되기 위해서는 이 모서리 부분에서의 응력을 완화시키도록 기하학적 형상 및 재료의 선정이 이루어져야 함을 알 수 있다. T응력을 계산한 결과 모든 경우에 0보다 작았으며 이것은 패키지내의 균열이 대체적으로 층간박리 중간에 꺾이지 않고 L/F과 수지의 모서리부분에 이르러 패키지균열로 진전되는 현상과 일치하였다. 따라서 급속히 발전하는 반도체패키지의 해석은 파괴역학을 도입함으로써 매우 정량적으로 평가할 수

있을 것으로 기대된다.

후 기

이 연구는 과학기술처 특정연구개발사업인 “미소 전자 부품에서의 패키지 설계기술 및 신뢰성 확보에 관한 연구”에서 수행된 것으로 관계자 여러분께 감사사를 드립니다.

참고문헌

- (1) Manzione, L. T., 1990, *Plastic Packaging of Microelectronic Devices*, Van Nostrand Reinhold, New York.
- (2) Steiner, T. O. and Suhl, D., 1987, “Investigations of Large PLCC Package Cracking During Surface Mount Exposure,” *IEEE Trans. on Components, Hybrids and Manufacturing Technology*, Vol. CHMT-10, pp. 209~216.
- (3) Nguyen, L. T., Gee, S. A. and Bogert, W. F. v. d., 1991, “Effects of Configuration on Plastic Package Stresses,” *ASME J. of Electronic Packaging*, Vol. 113, pp. 397~404.
- (4) Glaser, J. C. and Juare, M. P., 1989, “Thermal and Structural Analysis of a PLCC Device for Surface Mount Processes,” *ASME J. of Electronic Packaging*, Vol. 111, pp. 172~178.
- (5) Kornblum, Y. and Glaser, J. C., 1989, “Combined Moisture and Thermal Stresses Failure-Mode in a PLCC,” *ASME J. of Electronic Packaging*, Vol. 111, pp. 249~254.
- (6) Miyake, K., Suzuki, H. and Yamamoto, S., 1985, “Heat Transfer and Thermal Stress Analysis of Plastic-Encapsulated ICs,” *IEEE Trans. on Reliability*, Vol. R-34, pp. 402~409.
- (7) Sullivan, T., Rosenberg, J. and Matsuoka, S., 1988, “Photoelastic and Numerical Investigation of Thermally Induced Restrained Shrinkage Stresses in Plastics,” *IEEE Trans. on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology*, Vol. 11, pp. 473~480.
- (8) Wilson, W. K. and Yu, I. W., 1979, “The Use of the J-Integral in Thermal Stress Crack Problems,” *Int. J. Fract.*, Vol. 15, pp. 377~387.
- (9) Kishimoto, K., Aoki, S. and Sakata, M., 1980, “On the Path Independent Integral-J,” *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 13, pp. 841~850.
- (10) 반응운, 1992, “계면균열 문제에서 M-적분의 계산,” 석사학위논문, 한국과학기술원.
- (11) Yamada, Y., Ezawa, Y. and Nishiguchi, I., 1979, “Reconsiderations on Singularity of Crack Tip Elements,” *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 14, pp. 1525~1544.
- (12) Barsoum, R. S., 1976, “On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics,” *Int. J. Meth. Engng.*, Vol. 10, pp. 25~37.
- (13) Chen, F. H. K. and Shield, R. T., 1977, “Conservation Laws in Elasticity of the J-Integral Type,” *ZAMP J. Appl. Math. Phys.*, Vol. 28, pp. 1~22.
- (14) 박상선, 반응운, 엄윤용, 1994, “반도체패키지에서의 층간박리 및 패키지균열에 대한 파괴역학적 연구-2 : 패키지균열,” 대한기계학회논문집, 제18권 제8호, pp. 2158~2166.
- (15) 이상혁, 김경섭, 안승호, 오동열, 박 기, 1990, “4M DRAM 20 SOJ Package 열응력 분포 해석,” *Semiconductor Technical Journal*, Vol. 5, pp. 300~306.
- (16) Kawamura, N., Kawakami, T., Matsumoto, K., Sawada, K. and Taguchi, H., 1993, “Structural Integrity Evaluation for a Plastic Package During the Soldering Process,” *EFP-Vol. 4-1, Advances in Electronic Packaging*, pp. 91~95.
- (17) Rice, J. R., 1968, “A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks,” *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 35, pp. 379~386.
- (18) Bui-Diansky, B. and Rice, J. R., 1973, “Conservation Laws and Energy-Release Rates,” *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 40, pp. 201~203.
- (19) Park, J. H. and Earmme, Y. Y., 1986, “Application of Conservation Integrals to Interfacial Crack Problems,” *Mechanics of Materials*, Vol. 5, pp. 261~276.
- (20) Atluri, S. N., 1986, “Energetic Approaches and Path-Independent Integrals in Fracture Mechanics,” *Computational Methods in the*

- Mechanics of Fracture*(ed. by S. N. Atluri), Vol. 2, Elsevier Science Publishers, New York.
- (21) ABAQUS User's Manual, Ver. 5. 2, HKS Inc.
- (22) Shih, C. F., Moran, B. and Nakamura, T., 1986, "Energy Release Rate Along a Three Dimensional Crack Front in a Thermally Stressed Body," *Int. J. Fract.*, Vol. 30, pp. 79~102.
- (23) Rice, J. R., 1988, "Elastic Fracture Mechanics Concepts for Interfacial Cracks," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 55, pp. 98~103.
- (24) Hutchinson, J. W. and Suo, Z., 1991, "Mixed Mode Cracking in Layered Materials," *Advance in Applied Mechanics*, Academic Press, Vol. 29, pp. 63~91.
- (25) Malyshev, B. M. and Salganik, R. L., 1965, "The Strength of Adhesive Joints Using the Theory of Cracks," *Int. J. Fract. Mech.*, Vol. 1, pp. 114~128.
- (26) Wang, S. S. and Yau, J. F., 1981, "Interfacial Cracks in Adhesively Bonded Scarf Joints," *AIAA Journal*, Vol. 19, pp. 1350~1356.
- (27) Matos, P. P. L., McMeeking, R. M., Charalambides, P. G. and Drory, M. D., 1989, "A Method for Calculating Stress Intensities in Bimaterial Fracture," *Int. J. Fract.*, Vol. 40, pp. 235~254.
- (28) 최낙운, 1992, "접촉을 고려한 원호계면균열의 해석 및 응력강도계수계산," 박사학위논문, 한국과학기술원.
- (29) Rice, J. R. and Sih, G. C., 1965, "Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 418~423.
- (30) Erdogan, F., 1965, "Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials with Cracks," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 403~410.
- (31) England, A. N., 1965, "A Crack Between Dissimilar Media," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 400~402.
- (32) 범현규, 엄윤용, 1994, "보존적분을 이용한 응력강도계수와 T응력의 계산," 대한기계학회 논문집, 제18권, 제1호, pp. 121~126.
- (33) Williams, M. L., 1959, "The Stress Around a Fault of Crack in Dissimilar Media," *Bull. Seis. Soc. Am.*, Vol. 49, pp. 199~204.
- (34) Larsson, S. G. and Carlsson, A. J., 1973, "Influence of Non-Singular Stress Terms and Specimen Geometry on Small Scale Yielding at Crack Tips in Elastic-Plastic Material," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 21, pp. 263~278.
- (35) Rice, J. R., 1974, "Limitations to Small Scale Yielding Approximation for Crack Tip Plasticity," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 22, pp. 17~26.
- (36) Cottrell, B. and Rice, J. R., 1980, "Slightly Curved or Kinked Cracks," *Int. J. Fract.*, Vol. 16, pp. 155~169.
- (37) Bilby, B. A., Cardew, G. E., Goldthorpe, M. R. and Howard, I. C., 1986, "A Finite Element Investigation of the Effect of Specimen Geometry on the Fields of Stress and Strain at the Tip of Stationary Cracks," *Size Effects in Fracture, Institution of Mechanical Engineers*, London, pp. 37~46.
- (38) Cardew, G. E., Goldthorpe, M. R., Howard, I. C. and Kfoury, A. P., 1984, "On the Elastic T-term," *Fundamentals of Deformation and Fracture*(Eshelby Memorial Symposium) (ed. by K. J. Miller and B. A. Bilby), Cambridge University Press, Cambridge, pp. 465~476.
- (39) Nakamura, T. and Parks, D. M., 1992, "Determination of Elastic T-Stress Along Three-Dimensional Crack Fronts Using an Interaction Integral," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 29, pp. 1597~1611.
- (40) Muskhelishvili, N. I., 1953, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Trans. by Radok, J. R. M., Noordoff, Leyden.

부 록

A. 수정 J적분

Rice⁽¹⁷⁾에 의해 제안된 J적분은 다음과 같다

$$J = \int_r (Wn_1 - t_i u_{i,1}) ds \quad (A1)$$

이 J적분은 탄소성재료에 기계적하중이 작용할 경우 특이점이 없는 임의의 폐경로에 대해 0이며, 균열하면에서 시작하여 균열상면에서 끝나는 임의의

적분경로에 대해 에너지방출률의 의미를 갖는다.

그러나 온도구배가 존재하며, 탄성계수가 온도의 함수일 경우 임의의 폐경로(Fig. 5)에 대해서 Gauss 정리와 평형방정식을 이용하면 적분은 다음과 같다.

$$\int_{\Gamma+\Gamma_s-\Gamma_e} (Wn_1 - t_i u_{i,1}) ds = \int_{A-A_e} (W_{,1} - \sigma_{ij} \epsilon_{ij,1}) dA \quad (A2)$$

따라서 열하중이 작용할 때 임의의 적분경로에 대하여 J적분은 다음과 같이 주어진다.⁽²⁰⁾

$$J = \int_{\Gamma_e} (Wn_1 - t_i u_{i,1}) ds = \int_{\Gamma+\Gamma_s} (Wn_1 - t_i u_{i,1}) ds + \int_{A-A_e} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} - W_{,1}) dA \quad (A3)$$

식(A.3)는 W의 정의에 따라 여러 다른 형태를 가지게 되나^(8,9) 균열선단에서 온도가 특이(singular)하지않기 때문에 모두가 같아지게 된다. 다음에 대표적인 네가지 경우에 대하여 정리하면 다음과 같다.

(i) $W_1 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^m$

$$J = \int_{\Gamma+\Gamma_s} (W_1 n_1 - t_i u_{i,1}) ds + \int_{A-A_e} \left(\sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} - \frac{1}{2} C_{ijkl,1} \epsilon_{ij}^m \epsilon_{kl}^m \right) dA \quad (A4)$$

(ii) $W_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$

$$J = \int_{\Gamma+\Gamma_s} (W_2 n_1 - t_i u_{i,1}) ds + \int_{A-A_e} \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} - \sigma_{ij,1} \epsilon_{ij}) dA \quad (A5)$$

(iii) $W_3 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^m \epsilon_{ij}$

$$J = \int_{\Gamma+\Gamma_s} (W_3 n_1 - t_i u_{i,1}) ds + \int_{A-A_e} \frac{1}{2} [\sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} - \sigma_{ij,1} \epsilon_{ij} - (\beta \theta \epsilon_{kk})_{,1}] dA \quad (A6)$$

(iv) $W_4 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^m \epsilon_{ij}^m$

$$J = \int_{\Gamma+\Gamma_s} (W_4 n_1 - t_i u_{i,1}) ds + \int_{A-A_e} \left[\sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} - \frac{1}{2} C_{ijkl,1} \epsilon_{ij}^m \epsilon_{kl}^m \right]$$

$$- \frac{1}{2} (\beta \theta \epsilon_{kk})_{,1}] dA \quad (A7)$$

여기서,

$$\beta = \frac{E \alpha}{1 - 2\nu} \quad (A8)$$

물성치가 온도에 무관할 경우 식(A4)~식(A7)은 다음과 같이 표현된다.

(i) $J = \int_{\Gamma+\Gamma_s} (W_1 n_1 - t_i u_{i,1}) ds + \int_{A-A_e} \alpha \sigma_{kk} \theta_{,1} dA \quad (A9)$

(ii) $J = \int_{\Gamma+\Gamma_s} (W_2 n_1 - t_i u_{i,1}) ds + \int_{A-A_e} \frac{1}{2} \beta (\epsilon_{kk} \theta_{,1} - \theta \epsilon_{kk,1}) dA \quad (A10)$

(iii) $J = \int_{\Gamma+\Gamma_s} (W_3 n_1 - t_i u_{i,1}) ds + \int_{A-A_e} \beta \theta \epsilon_{kk,1} dA \quad (A11)$

(iv) $J = \int_{\Gamma+\Gamma_s} (W_4 n_1 - t_i u_{i,1}) ds + \int_{A-A_e} \frac{1}{2} \beta (\epsilon_{kk} \theta_{,1} - \theta \epsilon_{kk,1}) dA \quad (A12)$

식(A4)과 (A8)을 Shih 등⁽²²⁾이 제안한 영역적분으로 바꾸면 다음과 같다.

$$J = \int_{A-A_e} \left[(\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{ij}) q_{,j} + \left(\sigma_{ij} \epsilon_{ij,1} - \frac{1}{2} C_{ijkl,1} \epsilon_{ij}^m \epsilon_{kl}^m \right) q \right] dA - \int_{\Gamma_s} t_i u_{i,1} q ds \quad (A13)$$

$$J = \int_{A-A_e} [(\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{ij}) q_{,j} + \alpha \sigma_{kk} \theta_{,1} q] dA - \int_{\Gamma_s} t_i u_{i,1} q ds \quad (A14)$$

여기서, 가중함수 q는 균열선단에서 1, 임의의 적분경로에서는 0이 되는 미분가능한 구분적 연속함수이다.

B. 상호매개적분

두개의 서로 독립된 계면균열문제를 각각 상점자 A와 B로 표시하고, 두개의 평형상태를 중첩함으로써 얻어지는 또하나의 평형상태를 상점자 C로 나타내자. J적분의 정의 및 식(18)로부터 $J^{(A,B)}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$J^{(A,B)} = \int_{\Gamma_e} (\sigma_{ij}^A \epsilon_{ij}^{AB} n_1 - t_i^A u_{i,1}^A - t_i^B u_{i,1}^B) ds \quad (B1)$$

$$= \int_{\Gamma + \Gamma_s} (\sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^{mB} n_1 - t_i^A u_{i,1}^B - t_i^B u_{i,1}^A) ds \\ + \int_{A-A_c} (\sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij,1}^{tB} + \sigma_{ij}^B \varepsilon_{ij,1}^{tA}) dA \quad (B2)$$

식(B2)는 부록 A에서와 마찬가지로 임의의 폐경로에 대해 상호매개적분을 구하고 균열선단에서의 값을 취함으로써 구하였다.

마찬가지로 식(B2)를 영역적분으로 나타내면 다음과 같다.

$$I^{(A,B)} = \int_{A-A_c} [(\sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij,1}^{tB} + \sigma_{ij}^B \varepsilon_{ij,1}^{tA}) q \\ + (\sigma_{ij}^A u_{i,1}^B + \sigma_{ij}^B u_{i,1}^A - \sigma_{ki}^A \varepsilon_{ki}^{mB} \delta_{i,j}) q_{,j}] dA \\ - \int_{\Gamma_s} (t_i^A u_{i,1}^B + t_i^B u_{i,1}^A) q ds \quad (B3)$$

C. 직선계면균열의 균열선단에서의 응력장

기계적하중이 작용하는 탄성체에서의 응력 및 변위는 2개의 Muskhelishvili⁽⁴⁰⁾ 복소포텐셜로 표현된다. 열하중이 작용하는 경우 온도에 대한 복소포텐셜이 존재하며 정상상태(steady state)의 경우에 대해 Muskhelishvili⁽⁴⁰⁾와 동일한 방법에 의해 유도하면 응력 및 변위는 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})] \\ \sigma_{22} + i\sigma_{12} = \bar{\Phi}(\bar{z}) + (\bar{z} - z)\Phi'(z) + \Omega(z) \\ 2\mu(u_{1,1} + iu_{2,1}) = \kappa\Phi(z) + (\bar{z} - z)\Phi'(\bar{z}) \\ - \bar{\Omega}(\bar{z}) + 2\mu\alpha^*\Theta(z) \quad (C1)$$

여기서,

$$T(x_1, x_2) = \frac{1}{2}[\Theta(z) + \bar{\Theta}(\bar{z})] \quad (C2)$$

T 는 온도이며, α^* 는 평면변형률의 경우 $\alpha(1+\nu)$, 평면응력의 경우 α 이다.

아래에서는 반무한균열 및 위면과 아래면에 온도차, θ 가 주어지는 문제의 해를 구하고자 하며 아래에 기술한 방법은 Rice⁽²³⁾가 온도차가 없는 경우에 구한 방법과 동일하다. 위면과 아랫면에서의 해를 각각 $\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$ 과 $\Phi_2(z)$, $\Omega_2(z)$ 라 표시하기로 하자.

x_1 축을 따라 $(\sigma_{22} - i\sigma_{12})_1 = (\sigma_{22} - i\sigma_{12})_2$ 이기 때문에 다음이 성립된다.

$$\Phi_1^+ + \bar{\Omega}_1^- = \Phi_2^- + \bar{\Omega}_2^+ \quad (C3)$$

$\Phi_1(z)$, $\Omega_1(z)$ 은 R_1 에서 해석적이고 $\bar{\Phi}_1(z)$, $\bar{\Omega}_1(z)$ 은 R_2 에서 해석적이기 때문에 다음과 같이 전 영역에서 해석적인 함수를 도입할 수 있다.

$$\Phi_1(z) - \bar{\Omega}_2(z) = \Phi_2(z) - \bar{\Omega}_1(z) = 2g(z) \quad (C4)$$

또한 접합면에서 $(u_1 + iu_2)_1 = (u_1 + iu_2)_2$ 이므로 $(u_{1,1} + iu_{2,1})_1 = (u_{1,1} + iu_{2,1})_2$ 이 성립되며 이것을 복소포텐셜로 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\kappa_1}{\mu_1}\Phi_1^+ - \frac{1}{\mu_1}\bar{\Omega}_1^- + 2\alpha_1^*\Theta_1^+ \\ = \frac{\kappa_2}{\mu_2}\bar{\Phi}_2^- - \frac{1}{\mu_2}\bar{\Omega}_2^+ + 2\alpha_2^*\Theta_2^- \quad (C5)$$

본 문제에서는 온도가 일정하기 때문에 Θ_1^+ , Θ_2^- 을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Theta_1^+ = \Theta_2^- = \theta = T + iT_c \quad (C6)$$

여기서, T_c 는 조화함수 T 의 공액함수(conjugate function)로서 본 문제에서는 상수이다.

따라서 식(C5)로부터 식(C4)에서와 마찬가지로 균열면을 제외한 전 영역에서 해석적인 관계식이 유도된다.

$$\frac{\kappa_1}{\mu_1}\Phi_1(z) + \frac{1}{\mu_2}\bar{\Omega}_2(z) \\ = \frac{\kappa_2}{\mu_2}\Phi_2(z) + \frac{1}{\mu_1}\bar{\Omega}_1(z) + 2(\alpha_2^* - \alpha_1^*)\theta \quad (C7)$$

따라서 식(C4)와 식(C7)로부터 $\Phi_2(z)$, $\bar{\Omega}_1(z)$ 및 $\bar{\Omega}_2(z)$ 은 $\Phi_1(z)$ 과 $g(z)$ 로 나타낼 수 있으며 다음과 같이 표현된다.

$$\Phi_2(z) = e^{2\pi\epsilon}\Phi_1(z) + \frac{1}{\kappa_2\mu_1 + \mu_2}[(\mu_2 - \mu_1)2g(z) \\ + 2(\alpha_1^* - \alpha_2^*)\theta] \\ \bar{\Omega}_1(z) = e^{2\pi\epsilon}\Phi_1(z) + \frac{\mu_1\mu_2}{\kappa_2\mu_1 + \mu_2}[-2C_2g(z) \\ + 2(\alpha_1^* - \alpha_2^*)\theta] \\ \bar{\Omega}_2(z) = \Phi_1(z) - 2g(z) \quad (C8)$$

마지막으로 균열면에서의 트랙션이 0인 조건과 식(C8)로부터 다음과 같은 Hilbert 문제가 유도된다.

$$\Phi_1^+ + \bar{\Omega}_1^- = 0$$

또는

$$\Phi_1^+ + e^{2\pi\epsilon}\Phi_1^- = \frac{\mu_1\mu_2}{\kappa_2\mu_1 + \mu_2}[2C_2g(z) \\ + 2(\alpha_2^* - \alpha_1^*)\theta] \quad (C9)$$

따라서 Muskhelishvili⁽⁴⁰⁾의 방법에 따라 해를 구하면, Homogeneous 해와 Particular 해는 다음과 같이 주어진다.

$$\Phi_1^h(z) = z^{-1/2-ie} \quad (\text{C10}) \quad \text{여기서}$$

$$\Phi_1^f(z) = \frac{\Phi_1^h(z)}{2\pi i} \frac{\mu_1 \mu_2}{K_2 \mu_1 + \mu_2} \int_{-\infty}^0 \frac{2c_2 g(t) + 2(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \theta}{\Phi_1^{h+}(t)(t-z)} dt \quad (\text{C11})$$

여기서, $g(z)$ 는 전영역에서 해석적이기 때문에 위의 해는 유수정리(residue theorem)에 의해 쉽게 구해진다.

$$\Phi_1^f(z) = \frac{1}{c_1 + c_2} [2c_2 g(z) + 2(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \theta] \quad (\text{C12})$$

따라서 완전한 해의 형태는 식(C8), 식(C10) 및 식(C12)로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\Phi_1(z) = e^{-\pi\epsilon} z^{-1/2-ie} f(z) + \frac{2c_2}{c_1 + c_2} g(z) + \frac{2(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \theta}{c_1 + c_2}$$

$$\Omega_1(z) = e^{\pi\epsilon} z^{-1/2+ie} \bar{f}(z) - \frac{2c_2}{c_1 + c_2} \bar{g}(z) - \frac{2(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \bar{\theta}}{c_1 + c_2}$$

$$\Phi_2(z) = e^{\pi\epsilon} z^{-1/2-ie} f(z) + \frac{2c_1}{c_1 + c_2} g(z) - \frac{2(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \theta}{c_1 + c_2}$$

$$\Omega_2(z) = e^{-\pi\epsilon} z^{-1/2+ie} \bar{f}(z) - \frac{2c_1}{c_1 + c_2} \bar{g}(z) - \frac{2(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \bar{\theta}}{c_1 + c_2} \quad (\text{C13})$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (\text{C14})$$

으로 임의의 해석함수이며, 균열선단에서의 점근해(asymptotic solution)을 나타내면 다음과 같다.

$$\Phi_1(z) = \frac{\bar{K} e^{-\pi\epsilon}}{2\sqrt{2}\pi \cosh \pi\epsilon} z^{-1/2-ie} + \frac{1}{4} (T_1 + iU_1) + \frac{2(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \theta}{c_1 + c_2}$$

$$\Omega_1(z) = \frac{K e^{\pi\epsilon}}{2\sqrt{2}\pi \cosh \pi\epsilon} z^{-1/2+ie} - \frac{1}{4} (T_1 - iU_1) - \frac{2(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \bar{\theta}}{c_1 + c_2}$$

$$\Phi_2(z) = \frac{\bar{K} e^{\pi\epsilon}}{2\sqrt{2}\pi \cosh \pi\epsilon} z^{-1/2-ie} + \frac{1}{4} (T_2 + iU_2) - \frac{2(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \theta}{c_1 + c_2}$$

$$\Omega_2(z) = \frac{K e^{-\pi\epsilon}}{2\sqrt{2}\pi \cosh \pi\epsilon} z^{-1/2+ie} - \frac{1}{4} (T_2 - iU_2) + \frac{2(\alpha_2^* - \alpha_1^*) \bar{\theta}}{c_1 + c_2} \quad (\text{C15})$$

여기서, K 는 복소응력강도계수이며 T 와 U 는 각각 T응력과 강체운동을 뜻한다. 식(C15)는 각각 오른편 세째항(온도변화에 따른 기여항)이 없는 경우 범현규와 엄운용⁽³²⁾의 결과와 일치한다.