

(論 文)

# 단면이 원형경계를 갖는 실린더 축의 비틀림해석

김윤영\* · 오경민\*\*

(1994년 2월 17일 접수)

## The Torsion Analysis of a Cylindrical Bar with the Cross-Section Bounded by Circles

Yoon Young Kim and Kyeong Min Oh

**Key Words :** Torsion(비틀림), Rod(축), Torsional Rigidity(비틀림 강성), Laplace's Equation (라플라스방정식)

### Abstract

The torsion problem in a cylindrical rod is usually formulated in terms of either the warping function or the Prandtl stress function. In a rod whose cross-section is bounded by circles and rectangles, we develop an analytic solution approach based on the warping function, which satisfies Laplace's equation. The present formulation employs polynomials and the Fourier series-type solutions, both of which satisfy exactly the governing differential equation. Using the present method, the maximum shear stress and torsional rigidity are efficiently and accurately calculated and the present results are compared with those by other methods. The specific numerical examples include the case with eccentric holes which was investigated earlier. The finite element results are also compared with the present results.

### 1. 서 론

최근 각종 구조물의 경량화 추세로 말미암아 자동차, 항공기 등에서는 박판보와 같이 속이 비어 있는 구조요소가 점점 더 많이 활용되고 있다. 자동차, 항공기 등과 같은 구조물의 응력/진동해석시에는 이와 같은 요소를 통상적으로 보요소로 이상화하여 모델링하는데, 이 때 보의 단면 특성들, 즉 휨강성과 비틀림강성 등의 정확도가 해석결과에 상당한 영향을 미칠 수 있다. 이들 강성을 결정하기 위해 간단한 단면 형상에 대해서는 수작업으로, 매우 얇은 두께를 갖는 박판보에서는 박판보해석 전용 해석기법을 사용하고, 그렇지 못한 경우에는

통상적으로 유한요소해석 등과 같은 수치해석기법을 사용하고 있다. 이러한 단면 특성치 평가와 관련하여, 본 연구에서는 특히 보의 비틀림특성(전단 응력, 비틀림강성)을 구하는 해석적인 기법을 제시하고자 하며, 수치예제를 통해 본 해석방법의 효용성을 입증하고자 한다.

이미 잘 알려진 바와 같이 원형이 아닌 단면을 갖는 축이 비틀림 하중을 받을 때에는, 소위 뒤틀림(warping)이 일어나게 된다. 이러한 뒤틀림을 지배하는 방정식은 라플라스방정식으로서, 이의 정식화는 오래 전에 St. Venant에 의해 이루어졌다. 이와 같은 라플라스방정식의 일반적 해법으로 복소변수법,<sup>(1)</sup> 경계요소법<sup>(2,3)</sup>이나 유한요소법<sup>(4)</sup> 또는 유한차분법<sup>(5)</sup> 등의 수치해법들이 있다.

한편, 해석적인 기법을 채택한 논문들로서는 푸리에시리즈에 근저한 해석해를 이용하여 여러 개의

\*정회원, 서울대학교 기계설계학과

\*\*서울대학교 대학원 기계설계학과

구멍을 갖는 원형영역에서의 해법을 제시한 논문<sup>(6)</sup>이 있고, 최근 다항식과 푸리에 코사인시리즈를 활용하여 직선경계를 갖는 영역에서 해석법을 제시한 논문<sup>(7,8)</sup>도 있다. 이러한 해석적 기법은 앞에서 열거한 다른 방법들보다도 훨씬 효율적이며 정확하다는 것이 이들 논문에 의해 지적되어온 바, 이러한 해석적 기법의 개발이 공학적으로 상당한 중요한 의미를 갖게 된다.

본 논문에서는 첫째, Bird와 Steele<sup>(6)</sup>의 기법을 응용하여 단면이 여러 개의 구멍을 갖는 축의 비틀림문제를 효율적으로 해석해 보았고, 둘째, 해석해를 활용하여 직사각형 외부경계와 원형 내부경계로 이루어진 단면을 갖는 축의 비틀림문제를 해석하는 기법을 제안하였다. 특히 원형경계만을 갖는 실린더 축의 비틀림문제는 본 논문에서 사용하는 푸리에시리즈를 이용하면 단 2항으로 그 경계조건을 나타낼 수 있고, 또한 푸리에시리즈의 직교성을 이용하면 간단하게 비틀림강성을 구할 수 있기 때문에 본 해석기법이 더욱 효율적이다.

해석기법의 타당성과 정확성을 검증하기 위해, Wilson<sup>(9)</sup>이 고려한, 원형단면이 편심원을 갖는 축의 비틀림문제를 포함한 몇몇 문제를 살펴보았다. Wilson의 문제에 대해 그의 결과, ANSYS 유한요소결과,<sup>(10)</sup> 그리고 본 해석결과를 비교, 검토 하였다. 그리고 직사각단면의 중심에 원을 갖는 경우에 대해서도 유사한 비교해석을 수행해 보았다.

## 2. 축의 비틀림 지배방정식

축의 비틀림문제는 대체로 Prandtl의 응력함수로 정식화한다. 그러나 본 문제와 같이(Fig. 1) 다중 연결된 경우 변위의 유일성(single-valuedness)을 보장하기 위한 조건을 추가로 만족시켜야 하기 때문에 본 연구에서는 축방향의 변위를 나타내는 뒤틀림함수(warping function)로 직접 정식화된 식을 이용하고자 한다.

Fig. 1에 있는 형상의 축이 비틀림을 받을 때  $z$  방향의 뒤틀림변위(warping displacement)를  $w$ , 그리고  $xy$ 평면에서의 평면내 변위를  $u, v$ 라 하면 이들 변위는 St. Venant 비틀림 정식화에 의해 다음으로 주어진다.

$$w(x_0, y_0, z_0) = \alpha\varphi(x_0, y_0) \quad (1)$$

$$u(x_0, y_0, z_0) = -\alpha z_0 y_0$$

$$v(x_0, y_0, z_0) = \alpha z_0 x_0 \quad (2)$$

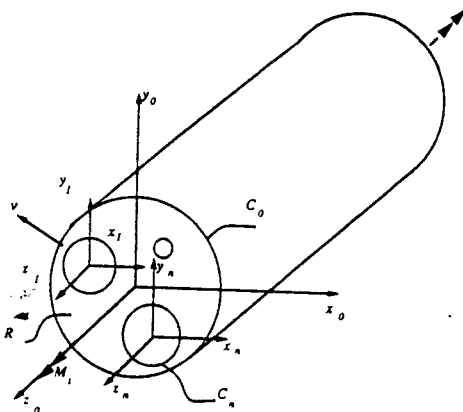


Fig. 1 The geometry and coordinate systems are shown for a cylindrical rod whose cross-section is bounded by circles.

식(1,2)에서  $\alpha$ 는 단위 길이당 비틀림각이며  $(x_0, y_0, z_0)$ 는 외부경계를 나타내는 원의 중심에 있는 전체 좌표계이다. (또한 Fig. 1에서  $(x_i, y_i, z_i; i=1, 2, \dots, n)$ 는 통상 내부원의 중심에 위치하며 그 축이  $(x_0, y_0, z_0)$ 의 좌표축과 평행한 국부좌표계로서 해석을 용이하게 하기 위하여 도입하였다.)

식(1)에서 뒤틀림함수  $\varphi$ 에 대한 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.<sup>(11)</sup>

$$\nabla^2 \varphi(x_0, y_0) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d\varphi}{dv} = y_0 \nu_{x_0} - x_0 \nu_{y_0} \text{ on boundary } C \quad (4)$$

식(3)은 라플라스방정식이며, 식(4)에서  $\nu$ 는 원형경계에 수직인 단위벡터를 나타낸다. ( $\nu \cdot z_0 = 0$ ) 식(1,2)에 의한 전단응력은

$$\sigma_{yx} = G\alpha \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} + x_0 \right)$$

$$\sigma_{zx} = G\alpha \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} - y_0 \right) \quad (5)$$

여기서,  $G$ 는 전단계수이다. 또한 비틀림강성  $D$ 의 정식화인

$$D = M_z / \alpha \quad (M_z = \text{축방향 비틀림모멘트})$$

을 이용하면 다음과 같이 비틀림강성에 대한 식을 얻는다.

$$D = G \left\{ \iint_R (x_0^2 + y_0^2) dA \right\} + \iint_R \left( x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dA \quad (6)$$

식(6)에서 첫번째 항은 축방향 관성모멘트  $I_{zz}$ 로

서 원과 직사각형 경계를 갖는 단면에서는 간단히 구할 수 있다. 그리고 두번째 항은 뒤틀림에 의해 생기는 보정을 나타내는 항으로 형상에 따라 강성  $D$ 에 상당한 영향을 끼칠 수 있다. 식(1~6)는 비틀림을 받는 축의 해석에 관해 이미 잘 알려져 있는 중요 결과만을 정리한 것이다.

만약 식(6)에서의 두번째 항을 확산정리(divergence theorem)을 이용하여 단면의 경계를 나타내는 곡선들의 집합인  $C(C=C_0+C_1+\dots+C_n)$ 에서의 선적분(line integral) 형태로 바꾸면 다음과 같이 표시되는데,

$$\begin{aligned} & \iint_R \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dA \\ &= \iint_R \left[ \frac{\partial}{\partial y} (x\varphi) + \frac{\partial}{\partial x} (y\varphi) \right] dA \\ &= \int_C -\varphi \left( \frac{d\varphi}{ds} \right) ds \end{aligned} \quad (7)$$

이와 같은 선적분을 사용하면, 본 연구에서 채택할 해석적 기법이 가장 쉽게 적용됨을 알 수 있다. 자세한 내용은 다음 절에서 설명하기로 한다.

### 3. 단면이 원형경계만을 갖는 경우

식(3,4)는 고전적 경계치문제로서 먼저 원형경계를 갖는 영역에서의 라플라스방정식의 해법에 대해 살펴보고자 한다.<sup>(6)</sup> 극좌표계에서 지배방정식인 라플라스방정식을 기술하면

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial \varphi}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_i^2} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, n) \quad (8)$$

식(8)에서  $r_i$ 와  $\theta_i$ 는 Fig. 2에 정의된 극좌표계이다.

라플라스방정식으로 지배되는 경계치문제를 풀기 위해서 식(8)이 선형 미분방정식이라는 사실을 이용하고자 한다. 즉, Fig. 2 영역에서의 해를 Fig. 3에서 제시된 바와 같이 여러 영역에서 사용될 수 있는 해를 중첩해서 구할 수 있다.

이를 구체적으로 설명하면 Fig. 3의 좌측에 있는 문제 해석을 위해, 경계  $C_0$ 로 둘러싸인 영역에서의 가능한 엄밀해(이것은  $\varphi^{(0)}$ 로 놓자.)와 구멍  $C_i$  ( $i=1, \dots, n$ ;  $n$ 은 구멍의 개수)를 갖는 두한 영역에서 가능한 엄밀해(이것은  $\varphi^{(i)}$ 로 놓자.  $i=1, 2, \dots, n$ )를 중첩하는데, 구체적 형태는 다음과 같다.

$$\varphi_{TOTAL} = \varphi^{(0)} + \sum_{i=1}^n \varphi^{(i)} \quad (9)$$

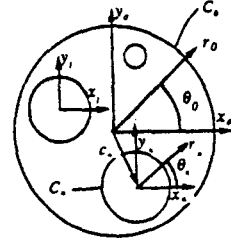


Fig. 2 The polar coordinate systems are shown in a multiply connected region bounded by circles.

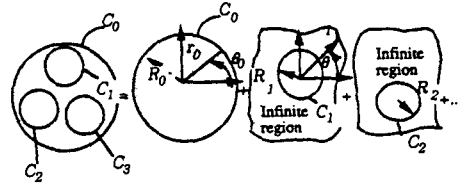


Fig. 3 The superposition of different sets of solutions defined in different regions is employed to solve the problem in a multiply-connected region. ( $R_i$  ( $i=0, \dots, n$ ): the radius of the circle)

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(r_0, \theta_0) = & A_0^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k^{(0)} \left( \frac{r_0}{R_0} \right)^k \sin k\theta_0 \right. \\ & \left. + A_k^{(0)} \left( \frac{r_0}{R_0} \right)^k \cos k\theta_0 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(r_i, \theta_i) = & A_0^{(i)} \frac{\log r_i / R_0}{\log R_i / R_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k^{(i)} \left( \frac{r_i}{R_i} \right)^{-k} \right. \\ & \left. \sin k\theta_i + A_k^{(i)} \left( \frac{r_i}{R_i} \right)^{-k} \cos k\theta_i \right] \end{aligned} \quad (i=1, \dots, n) \quad (11)$$

여기서,  $R_i$ 는 원형경계  $C_i$ 를 나타내는 반지름이며,  $A_k^{(i)}$ ,  $a_k^{(i)}$ 는 각각 푸리에 코사인, 사인시리즈로 주어지는 엄밀해와 관련된 상수인데, 식(10,11)을 중첩한 결과식인 식(9)를 경계  $C_i$  ( $i=0, 1, \dots, n$ )에서의 경계조건인 식(4)에 대입하여 구할 수 있다.

사용되는 해(10,11)가 푸리에시리즈 형태를 취하고 있기 때문에 경계조건도 이와 같이 푸리에시리즈로, 즉 푸리에시리즈 계수로 나타내면 매우 편리할 것이다. 즉, 경계  $C_i$ 에서 주어진 경계조건  $\frac{d\varphi}{ds}$ 를 다음과 같이 정의한 다음

$$\begin{aligned} & 2\pi R_i \left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{on C_i} \\ &= \frac{F_0^{(i)}}{2} + \sum_{k=1}^{N_i} (f_k^{(i)} \sin k\theta_i + F_k^{(i)} \cos k\theta_i) \end{aligned} \quad (i=0, 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

경계조건을 식(12)에서의 푸리에계수 ( $F_k^{(i)}, f_k^{(i)}$ )로 나타낸다. 여기서,  $N_i$ 는 수치계산을 수행할 때 경계  $C_i$ 에서 실제로 사용되는 푸리에시리즈의 최고 차항을 나타낸다.

앞으로의 편의를 위해 다음과 같이 푸리에계수로 이루어지는 열벡터(column vector)를 정의하자.

$$F^{(i)} = \begin{Bmatrix} F_0^{(i)} \\ f_1^{(i)} \\ F_1^{(i)} \\ \vdots \\ f_{N_i}^{(i)} \\ F_{N_i}^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad A^{(i)} = \begin{Bmatrix} A_0^{(i)} \\ a_1^{(i)} \\ A_1^{(i)} \\ \vdots \\ a_{N_i}^{(i)} \\ A_{N_i}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (i=0,1,2,\dots,n) \quad (13)$$

$$F = \begin{Bmatrix} F^{(0)} \\ F^{(1)} \\ \vdots \\ F^{(n)} \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{Bmatrix} A^{(0)} \\ A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

식(14)에 정의된 열벡터들(column vectors)의 크기는  $2(N_0+N_1+\dots+N_n)+n$ 임을 알 수 있는데, 실제 수치계산에서 통상  $N_0=N_1=\dots=N_n=N$ 을 주로 사용하므로 그 크기는  $n(2N+1)$ 이 된다.

모든  $C_i(i=0,1,2,\dots,n)$ 에서 푸리에계수 ( $F_k^{(i)}, f_k^{(i)}$ )로 주어진 경계조건  $d\varphi/d\nu$ 으로부터 미지수  $A$ 를 구하기 위해서는, 이 미지수  $A$ 와 경계조건을 나타내는  $F$ 와의 관계를 연결하는 행렬  $FM$ 를 먼저 형성한 다음, 다음의 연립대수방정식을 풀면 된다.

$$F = FM \cdot A \quad (15a)$$

$$\begin{Bmatrix} F^{(0)} \\ F^{(1)} \\ \vdots \\ F^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} FM^{(0,0)} & FM^{(1,0)} & \dots & FM^{(n,0)} \\ FM^{(0,1)} & FM^{(1,1)} & \dots & FM^{(n,1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ FM^{(0,n)} & FM^{(1,n)} & \dots & FM^{(n,n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A^{(0)} \\ A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (15b)$$

식(15b)에서  $FM^{(i,j)}$ 는 각 좌표계들간의 관계와 식(10,11)을 사용하면 엄밀한 형태로 구할 수 있다.<sup>(6)</sup>

$FM$  행렬을 엄밀한 형태로 구할 수 있으므로, 경계조건인 식(4)가 푸리에시리즈의 형태인 식(12)로 어떻게 표시되나 구해보기로 하자.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi}{d\nu} \right|_{on C_i} &= y_0\nu x_0 - x_0\nu y_0 \\ &= (\nu \times r_0) \cdot e_z \\ &= \nu \times (c_i + r_i) \cdot e_z \\ &= c_{x_0} \sin\theta_i - c_{y_0} \cos\theta_i \quad (i=1,2,\dots,n) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,  $c_i(c_{x_0}, c_{y_0})$ 는 전체 좌표계  $(x_0, y_0)$ 로부터 국부좌표계  $(x_i, y_i)$  ( $i=0, \dots, n$ )의 좌표중심까지의 거리를 나타내는 위치벡터이다. 식(16)의 마지막 결과로부터  $C_i$ 에서의 경계조건  $d\varphi/d\nu$ 를 나타내는 푸리에계수 중 0이 아닌 항은 단지  $f^{(i)}$ 와  $A^{(i)}$ 뿐인데 그 값은

$$\begin{aligned} f^{(i)} &= 2\pi R_i c_{x_0} \\ F^{(i)} &= -2\pi R_i c_{y_0} \quad (i=0,1,\dots,n) \end{aligned} \quad (17)$$

식(17)의 결과로부터 각 경계에서의 경계조건이 단지 2개의 시리즈항으로만 표현되는 흥미로운 사실을 알 수 있고, 이로 인해 여기서 채택된 해석기법으로 비틀림 문제의 해를 상당히 쉽게 구할 수 있음을 예상할 수 있다. 또한  $\left. \frac{d\varphi}{d\nu} \right|_{on C_0} = 0$ 인데 이 경우는  $\nu$ 와  $r_0$ 가 서로 평행하기 때문이다.

관계식(15)와 경계조건인 (17)을 이용하여 미지수  $A$ 를 결정하였을 때, 축의 전단응력, 비틀림 강성등을 모두 구할 수 있는데, 특히 비틀림 강성에 대한 구체적 식을 유도하고자 한다. 이를 위해 앞에서 유도된 식(7)의 마지막 표현을 사용하면 다음과 같이 매우 간단한 형태로 구하게 된다.

$$\begin{aligned} D &= I_{xx} + \int_C -\varphi \left( \frac{d\varphi}{d\nu} \right) dS \\ &= I_{xx} + \int_{C_0} + \int_{C_1} + \dots \\ &= I_{xx} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (c_{x_0} \phi^{(i)} - c_{y_0} \Phi^{(i)}) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서,  $i=0$ 일 때  $c=0$ 이므로  $D$ 에 기여하는 바가 없게 되며  $\phi^{(i)}, \Phi^{(i)}$  등은 경계에서의 비틀림함수값으로 다음과 같이 정의된 값이다.

$$\begin{aligned} \phi^{(i)}|_{on C_i} &= \Phi_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{N_i} (\Phi_k^{(i)} \cos k\theta_i + \phi_k^{(i)} \sin k\theta_i) \end{aligned} \quad (19)$$

#### 4. 단면이 원형과 직선경계를 갖는 경우

비틀림을 받는 축의 단면이 원형과 일반적 직선 경계를 갖는 경우 해석적인 방법으로 해를 구하기는 매우 어렵다. 따라서 본 절에서 내부에 원형구멍을 갖는 직사각단면을 갖는 경우(Fig. 4)에 어떻게 해석적인 해를 활용하여 문제를 해석할 수 있는지 살펴보고 이를 토대로 일반적인 경우에는 어떤 접근 방법을 택할 것인지를 고찰해 보자 한다. 이 문제의 해석을 위해 Fig. 5에서처럼 구멍을 갖는

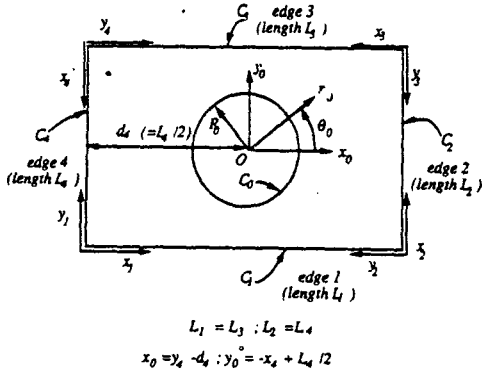


Fig. 4 The cross-section of a cylindrical bar with a circular hole at the center. The local Cartesian coordinates are also shown.

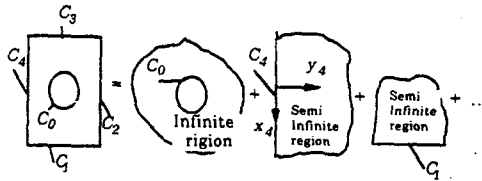


Fig. 5 Different types of solutions are superposed to properly account for different types of boundaries.

무한영역과 4개의 반무한영역에서 사용될 수 있는 엄밀해를 중첩해 보고자 한다.

Fig. 5에서 구멍을 갖는 무한영역에서의 해는 앞 절에서와 같이 식(11)을 활용하고(단, 이 때의  $i$ 를 0으로 놓자.) 기타 직선경계를 갖는 반무한영역에서는 직교좌표계에서 사용될 수 있는 라플라스 방정식의 엄밀해 중 다음의 형태를 선정해 보았다. (여기서,  $\varphi_{TOTAL} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \dots + \varphi^{(4)}$ 로 결정되는 것은 전과 동일하다.)

$$\begin{aligned} \varphi^{(i)}(x_i, y_i) &= A_0^{(i)} \frac{(x_i - L_i/2)^2 - y_i^2}{L_i^2} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ e^{-\frac{2k\pi}{L_i} y_i} \left\{ a_k^{(i)} \sin\left(\frac{2k\pi x_i}{L_i}\right) \right. \right. \\ &\left. \left. + A_k^{(i)} \cos\left(\frac{2k\pi x_i}{L_i}\right) \right\} \right] \\ (i=1, 2, 3, 4) \end{aligned} \quad (20)$$

식(20)과 유사한 형태인 식(21)의 엄밀해가 단순 불록다각형에서 라플라스방정식의 해법개발에 사용된 바 있는데, (7,8)

$$\varphi^{(i)}(x_i, y_i) = A_0^{(i)} \frac{(x_i - L_i/2)^2 - y_i^2}{L_i^2}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k^{(i)} e^{-\frac{2k\pi y_i}{L_i}} \cos\left(\frac{2k\pi x_i}{L_i}\right) \right] \quad (21)$$

이 연구(7,8)에서 식(21)형태의 다항식의 중요성을 지적하였다. 비록 식(21)에서처럼 코사인시리즈만으로 해석이 가능하나, 본 연구에서는 완전한 푸리에시리즈(full Fourier series)인 식(20)의 형태를 사용하여 식(11)과 대응이 되도록하여 정식화하였고 아울러 수치계산의 효율성을 증대시키고자 하였다. 전 절에서와 마찬가지로 직선경계부에서의 경계조건을 다음과 같이 정의하면

$$\begin{aligned} L_i \frac{d\varphi^{(i)}}{dy} \Big|_{on C_i} &= \frac{F_0^{(i)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ f_k^{(i)} \sin\frac{2k\pi x_i}{L_i} \right. \\ &\left. + F_k^{(i)} \cos\frac{2k\pi x_i}{L_i} \right\} \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\varphi^{(i)}|_{on C_i} = \Phi_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \phi_k^{(i)} \sin\frac{2k\pi x_i}{L_i} + \Phi_k^{(i)} \cos\frac{2k\pi x_i}{L_i} \right\} \quad (22b)$$

경계조건  $F$  ( $F$ 의 정의 등은 앞절과 동일)와 미지수  $A$ 의 관계는 식(15)와 동일한 형태로 기술할 수 있다. 이 문제에서의 주 관건은 어떻게  $FM^{(i,j)}$ 를 효율적으로 형성하느냐에 달려 있다.

$FM^{(i,j)}$ 는 물리적으로  $j$ -번째 경계  $C_j$ 와 관련된 극부해  $\varphi^{(j)}$ 가  $i$ -번째 경계  $C_i$ 에 미치는 영향을 나타내는데 이  $FM^{(i,j)}$ 를 구하기 위해서는 좌표들간의 관계와 이에 따른 극부해  $\varphi^{(j)}$ 가  $C_i$ 에서 어떤 값을 갖는지를 구해야 한다. 이를 위해, 먼저  $C_j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) 직선경계를 갖는 반무한영역에서 정의되는 해  $\varphi^{(j)}$  ( $j=1, 2, 3, 4$ )가 원형경계  $C_0$ 에서 어떤 식으로 표시되는지를 구하기 위해  $j=4$ 인 경우를 선정해 구체적으로 설명하고자 한다.

먼저 극부좌표계  $(x_4, y_4)$ 와  $(x_0, y_0)$ 의 관계는 Fig. 4에서 표시해 놓았다. 식(20)의 첫번째 항( $i=4$ )이  $C_0$ 에서의 미치는 영향을 구하기 위해 다음의 식을  $C_0$ , 즉  $r_0 = R_0$ 에서 구해보면

$$\begin{aligned} &\left[ (x_4 - L_4/2)^2 - y_4^2 \right]_{on C_0 (r_0=R_0)} \\ &= [Re(z_0^2) - 2d_4 Re(z_0) - d_4^2]_{on C_0 (r_0=R_0)} \\ &= -[d_4^2 + 2R_0 d_4 \cos \theta_0 + R_0^2 \cos^2 \theta_0] \end{aligned} \quad (23)$$

여기서,  $z_0$ 는 복소변수인데 그 정의는 다음과 같다.

$$z_0 = x_0 + iy_0 = r_0 e^{i\theta_0}$$

식(23)에서처럼 복소변수의 사용이 계산을 매우 용이하게 함을 알 수 있다.

식(20)의 두번째 항은 다음처럼 변환되는데

$$\begin{aligned} & \left[ e^{\frac{-2k\pi}{L_s} y_4} \begin{Bmatrix} \cos \frac{2k\pi}{L_s} x_4 \\ \cos \frac{2k\pi}{L_s} x_4 \end{Bmatrix} \right]_{r_0=R_0} \\ &= \left[ (-1)^k e^{\frac{k\pi d_4}{L_s}} \begin{Bmatrix} Re \\ -Im \end{Bmatrix} e^{\frac{-2k\pi}{L_s} z_0} \right]_{r_0=R_0} \\ &= e^{\frac{-k\pi d_4}{L_s}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{m!} \left( \frac{2k\pi}{L_s} \right)^m R_0^m \begin{Bmatrix} \cos m\theta_0 \\ \sin m\theta_0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

식(24)에서의 우변의 두번째 식을 얻기 위해 다음의 식을 이용하였다.

$$e^{\frac{-2k\pi}{L_s} z_0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \left( \frac{2k\pi}{L_s} \right)^m z_0^m \quad (25)$$

상기의 결과들을 이용하면 손쉽게  $FM^{(0,j)}$  ( $j=1,2,3,4$ )를 구할 수 있는데 이 과정은 수치적분등에 의존하지 않고 엄밀하게 이루어짐을 알 수 있다.

다음은  $C_0$ 의 원형경계를 갖는 유한영역에서 정의되는 해가 직선경계  $C_i$  ( $i=1,2,3,4$ )에서 어떻게 구해지는지를 살펴보자. 식(11)은  $\log$ 항과 기타  $r_0$ 에 대한 다항식으로 표시되는데, 이를 위해 다음과 같은 식을 활용할 수도 있을 것이다.

$$\log r_0 = - \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{-\xi x_0} \cos \xi y_0 d\xi + \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{-\xi} d\xi \quad (26a)$$

$$\frac{\cos m\theta}{r^m} = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{m-1} e^{i\lambda x} \cos i\lambda y d\lambda \quad (x > 0) \quad (26b)$$

$$\frac{\sin m\theta}{r^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \lambda^{m-1} e^{i\lambda x} \sin i\lambda y d\lambda \quad (26c)$$

이 식의 형태에서 보듯이 이 식들은 직선경계부가 무한할 때 효과적으로 적용될 수 있다. 이러한 관계식을 이용하여 반무한 평면에 구멍이 있는 탄성문제를 해석한 논문<sup>(12)</sup> 등이 있다. 그러나 본 문제는 유한한 길이를 갖는 경우이므로 식(26)에 주어진 적분식을 푸리에시리즈로 근사적으로 변화하여 사용하든지 아니면 FFT<sup>(13)</sup>를 이용하여 직접  $C_0$ 에서의 푸리에계수를 구할 수 있다. 본 논문에서 이 두가지 방법을 실제 비교해 본 결과 FFT를 사용하는 것이 더욱 효율적으로 결과를 얻을 수 있음을 알게 되었다.

이 절에서 다루는 문제에 대한 비틀림 강성  $D$ 는 식(7)와 식(22)를 이용하면 다음에서처럼 매우 간단하게 표현할 수 있는 것이 본 해석기법의 장점 중의 하나이다.

$$D = I_{zz} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \left( \sum_{k=1}^{N_i} \phi_k^{(i)} f_k^{(i)} \right) \quad (27)$$

여기서,  $f_k^{(i)}$ 은 직선경계  $C_i$  ( $i=1,2,3,4$ )에서의  $d\varphi/dv$ 의 값으로 엄밀한 형태로 구할 수 있다.

### 5. 수치예제

먼저 Fig. 6에서처럼 편심구멍을 갖는 원형 축의 비틀림 강성과 최대 전단응력을 구해보기로 한다. Wilson<sup>(9)</sup>이 다룬 비교적 적은 편심비를 갖는 경우에 대해 본 해석결과와, Wilson의 결과 그리고 ANSYS 유한요소해석 결과와 비교해 보고자 한다. \* 유한요소해석에서는 2차원 열문제와 Prandtl 응력함수와의 유사성을 이용하여 결과를 얻었다.

Fig. 7는 편심구멍의 위치  $c_1$ 를 바꾸어 가면서

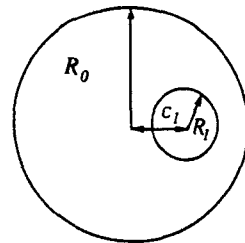


Fig. 6 The cross-section of a circular cylinder of radius  $R_0$  with an eccentric hole of radius  $R_1$ . (eccentricity =  $c_1$ )

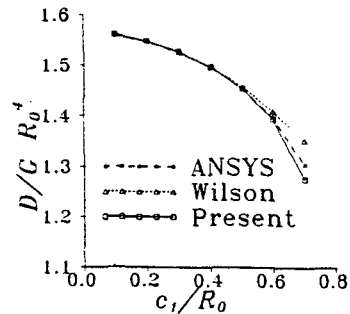


Fig. 7 The variation of the torsional rigidity  $D$  for various hole locations  $c_1$ . ( $R_0=1.0, R_1=0.25$  in Fig. 6)

\*본 기법은 1개 이상의 구멍이 있는 원형 단면을 갖는 축의 비틀림 문제에도 수정없이 적용되나 기존 연구 결과와 비교하기 위하여 이 문제를 선택하였다.

강성값의 변화를, Fig. 8는 최대 전단응력의 크기  $\tau$ 의 변화를 살펴 보았다. 여기서  $\tau$ 의 정의는 다음과 같으며

$$\tau = \sqrt{\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2}$$

Fig. 7과 Fig. 8의 결과를 얻기 위해  $R_0=1$ ,  $R_1=0.25$ 인 값을 사용하였다.

Figs. 7, 8에서 편심원이 경계  $C_0$ 에 가까운 경우를 제외하고 세 결과가 매우 근접함을 알 수 있다. 그러나 편심원이 경계에 가까게 다가감에 따라 Wilson의 결과가 본 결과와 유한요소결과와 많이 차이가 나는데, 이 경우는 Wilson의 결과가 잘 맞지 않는 지역이기 때문이다. 본 해석 결과는 매우 적은 수로도 빠르게 효율적으로 수렴하는데  $R_1=0.8$ 일 때 그 수렴정도와 정확도를 Table 1, 2에서 유한요소해석 결과와 비교해 보았다.

본 해석결과와 항의 수가 증가함에 따라 균일하게 수렴하는데 비해 유한요소해석 결과는 요소망 형성 방법에 따라라도 그 값이 차이가 남을 알 수 있었고 수렴된 결과를 얻기 위해 매우 많은 요소가 필요함을 알 수 있었다. 많은 요소수로 계산된 유한요소결과와 본 해석결과와의 차이는 비틀림 강성  $D$ 에서는 1.25%, 최대 전단응력  $\tau$ 에는 약 0.6% 정도 미만인 것으로 나타나 대체로 두 결과는 일치한다고 볼 수 있다.

또한 편심원의 중심위치를 고정시키고( $c_1=0.1$ ) 편심원의 반지름  $R_1$ 을 변화시켰을 때의 최대 전단응력과 비틀림 강성이 어떻게 변화해 가는지도 살펴 보았는데, 그 결과를 Figs. 9, 10에 실었다. 본 해석 결과가 작은  $R_1/R_0$ 에 대해서 Wilson의 결과나 ANSYS해석 결과와 모두와 거의 일치하며, 큰

$R_1/R_0$ 에 대해서는 ANSYS 결과와 근접함을 알 수 있다.

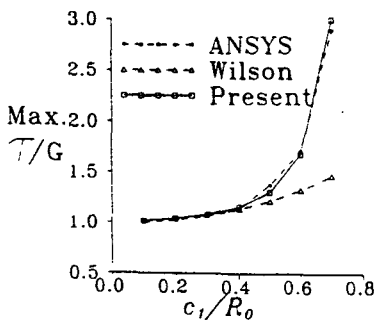
두 번째 예제는 Fig. 4에서처럼 원형구멍을 갖는 직사각 단면 형상에서의 비틀림 문제인데, 비틀림 강성을 Fig. 11에서 살펴 보았다. 이 그림은 정사각 단면에서의 내부 구멍의 크기가 커짐에 따라 비

**Table 1** Convergence of the present results for the torsional rigidity  $D$  and the maximum shear stress as the number- $N$  of the series terms increases

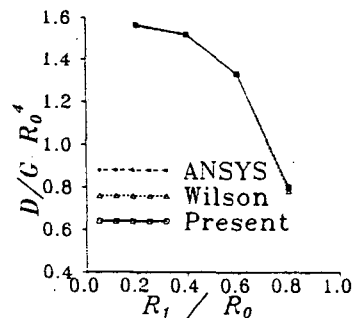
N (No. of terms)	D/G $R_0^4$	Max. $\tau$ /G
4	1.344	1.691
8	1.317	1.998
16	1.289	2.523
32	1.276	2.912
64	1.276	2.995

**Table 2** Convergence of the ANSYS finite element results for the torsional rigidity  $D$  and the maximum shear stress  $\tau$  as the number of elements increases

No. of elements	D/G $R_0^4$	Max. $\tau$ /G
359 (Equal mesh)	1.303	2.803
1289 (Equal mesh)	1.304	2.719
4742 (Equal mesh)	1.304	2.827
7447 (Unequal mesh)	1.295	2.897
11261 (Unequal mesh)	1.292	3.013



**Fig. 8** The variation of the maximum shear stress  $\tau$  for various hole locations  $c_1$ . ( $R_0=1.0$ ,  $R_1=0.25$  in Fig. 6)



**Fig. 9** The variation of the torsional rigidity  $D$  for varying radii  $R_1$  of the circular hole. ( $R_0=1.0$ ,  $c_1=0.1$  in Fig. 6)

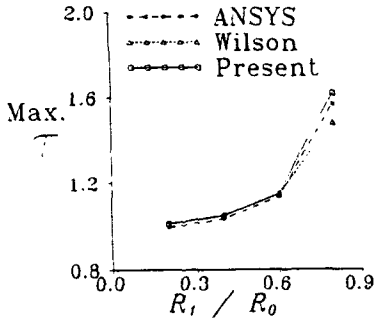


Fig. 10 The variation of the maximum shear stress  $\tau$  for varying radii  $R_1$  of the circular hole. ( $R_0=1.0$ ,  $c_1=0.1$  in Fig. 6)

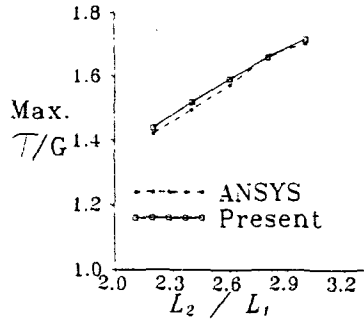


Fig. 13 The maximum shear stress  $\tau$  for varying aspect ratios  $L_2/L_1$ . (See Fig. 4 for geometry :  $L_1=L_3=2$ ,  $R_0=0.5$ )

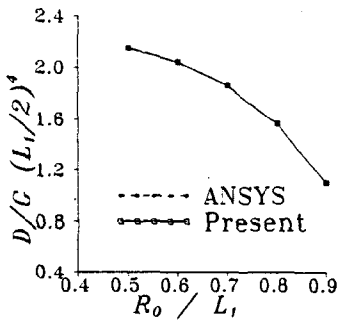


Fig. 11 The variation of the torsional rigidities  $D$  as a function of the radius  $R_0$  of the hole. ( $L_1=L_2=L_3=L_4=2$  in Fig. 4)

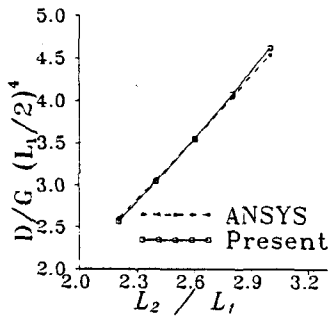


Fig. 12 The torsional rigidities  $D$  for varying aspect ratios  $L_2/L_1$ . (See Fig. 4 for geometry :  $L_1=L_3=2$ ,  $R_0=0.5$ )

틀림 강성의 감소를 보여주고 있는데, 본 해석 결과와 유한요소해석 결과가 잘 일치하고 있다. 또한

본 해석으로부터 등가 전단 응력 선도(contour of equal shear stress  $\tau$ )도 그려 보았는데 사각변의 중심에서 최대치를 갖고, 그 크기도 ANSYS 해석 결과와 매우 잘 일치함을 확인할 수 있었다.

마지막 수치예제로 구멍이 있는 직사각형 단면을 갖는 실린더에서 한 변의 길이  $L_1(=L_3)$ 과 내부원의 반지름  $R_0$ 을 고정시키고 ( $L_1=2$ ,  $R_0=0.5$ ) 다른 한 변의 길이  $L_2(=L_4)$ 를 변화시켰을 때, 비틀림 강성과 최대 전단응력값이 어떻게 변하는지 살펴 보았다. (Figs. 12, 13) 이 경우에도 본 해석결과와 ANSYS 결과와 잘 일치하였으며, 본 해석에서는 적은 수의 항으로도 수렴된 결과를 얻을 수 있었다.

## 6. 결론

본 논문에서는 원형경계와 간단한 직선경계로 이루어진 단면 형상을 갖는 실린더에서의 비틀림문제를 살펴보았다. 해석적인 기법으로, 주어진 단면 형상에 대해 비틀림강성과 전단응력 분포를 구해 보았다. 이 기법에서는 특수영역에서 비틀림의 지배방정식을 엄밀히 만족시키는 해를 중첩하여, 경계조건이 매우 간단하게 표현될 뿐 아니라, 해석해를 사용했기 때문에 수렴성이나 정확성이 기존의 수치해석방법 들보다 매우 우수함을 알 수 있었다. 직선경계와 원형경계와 같은 비교적 간단한 단면 형상에 대해서 해석을 수행하였으나, 복잡한 형상을 갖는 경우에는 전체 영역을 몇 개의 대형영역으로 분할해서 해석할 수 있으므로,<sup>(7)</sup> 본 연구에서 제시된 방법의 응용여하에 따라 그 실용성과 효율성을 높일 수 있다고 본다.

## 후 기

본 연구는 한국과학재단 터보·동력기계연구센터



의 지원에 의해 수행되었으며 이에 감사드립니다.

### 참고문헌

- 1) Churchill, R. V. and Brown, J. W., 1984, *Complex Variables and Applications*, 3rd Ed., McGraw-Hill Book Co., New York.
- 2) Choi, J. H. and Kwak, B. M., 1989, "A Boundary Integral Equation Formulation Derivative Unknowns for Two-Dimensional Potential Problems," *J. Appl. Mech.*, Vol. 56, pp. 617~623.
- 3) Kassab, A. J. and Hsieh, C. K., 1990, "Application of the Complex Variable Boundary Element Method to Solving Potential Problem in Doubly Connected Domains," *Int. J. Num. Methods Eng.*, Vol. 29, pp. 161~179.
- 4) Wilson, E. L. and Nickell, R. E., 1966, "Applications of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis," *J. Nuclear Engineering and Design*, Vol. 4, pp. 276~286.
- 5) Dunsinberre, G. M., 1961, *Heat Transfer Calculations by Finite Differences*, International Textbook Company, Scranton, Pa.
- 6) Bird, M. and Steele, C. R., 1992, "A Solution Procedure for Laplace's Equation on Multiply Connected Circular Domains," *J. Appl. Mech.*, Vol. 59, pp. 398~404.
- (7) Kim, Y. Y. and Yoon, M. S., 1993, "Analysis of the Mode III Crack Problems Based on Analytical Solutions," *Asian Pacific Conference on Fracture and Strength '93, JSME*.
- (8) 김윤영, 윤민수, 1993, "해석해를 이용한 단순 볼록 다각형에서의 라플라스방정식의 해법," 대한기계학회논문집, 제17권, 제11호, pp. 2773~2781.
- (9) Wilson, T. S., 1942, "The Eccentric Circular Tube," *Aircr. Eng.*, Vol. 14, No. 157, March 1942.
- (10) Johnson, D. H., 1986, "Torsion Analysis with the ANSYS Thermal Analogy," *ANSYS Tech-Notes*, Vol. 1, pp. 1.3.1~1.3.26.
- (11) Sokolnikoff, I. S., 1956, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Co., New York.
- (12) Lee, M., Jasiuk, I. and Tsuchida, E., 1992, "The Sliding Circular Inclusion in an Elastic Half-Plane," *J. Appl. Mech.*, Vol. 59, pp. S57~S64.
- (13) Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T., 1989, "Numerical Recipes in C," KALA Co. Cambridge.