

〈論 文〉

다변수 변분해법에 의한 비적합 4절점 사각형 평면응력 및 평면변형률 요소의 개발

주상백* · 신호철**

(1994년 3월 15일 접수)

The Development of Incompatible Finite Elements for Plane Stress/Strain Using Multivariable Variational Formulation

Sang-Baek Ju and Hyo-Chol Sin

Key Words : Incompatible Displacement(비적합 변위), Multivariable Variational Formulation (다변수 변분해법), Bending Stiffness Locking(굽힘 강성과잉), Incompressibility (비압축성)

Abstract

Two kinds of 4-node plane stress/strain finite elements are presented in this work. They are derived from the modified Hellinger-Reissner variational principle so as to employ the internal incompatible displacement and independent stress fields, or the incompatible displacement and strain fields. The introduced incompatible functions are selected to satisfy the constant strain condition. The elements are evaluated on several problems of bending and material incompressibility with regular and distorted elements. The results show that the new elements perform excellently in the calculation of deformation and stresses.

1. 서 론

일반적으로 4절점 변위 기저 평면응력요소는 굽힘하중에 대하여 강성과잉현상을 보이며, 선형 탄성문제에서 비압축성 재료의 해석시에 그 해가 크게 손상되는 것으로 알려져 있다. 이러한 4절점 변위 기저요소가 갖는 문제점에 대한 해결방법의 하나로 굽힘문제에서는 요소의 수를 늘리는 방법이 사용되고 있으나, 이는 계산의 측면에서 비경제적

4절점 평면응력요소의 굽힘에 대한 강성과잉문

제는 Wilson⁽¹⁾의 Q6에서 광복합한 해결책이 제시되었다. 이는 기존의 4절점 변위요소에 고차의 비적합 변위모드를 추가하여, 이를 정축약(static condensation)에 의해 요소의 경계에서 제거함으로써 비압축성 및 비압축성 재료의 굽힘문제에 대해 좋은 결과를 얻었다. 그러나, Q6는 요소의 형상이 직사각형이 아닐 때에는 패치테스트를 통과하지 못하므로 유한요소 해의 수렴성을 보장하지 못한다. 이러한 Q6의 단점은 Taylor⁽²⁾에 의하여 극복되었는데 이는 요소의 강성행렬의 수치적분 과정에서 일정 변형률조건을 만족하도록 감차적분기법을 도입한 것이다.

한편, Malkus와 Hughes^(3,4)는 선택적 감차적분(SRI, selective reduced integration)에 의하여 과잉강성문제를 해결하였는데, 이는 체적항에 대해서

*서울대학교 대학원 기계설계학과

**정회원, 서울대학교 기계설계학과

는 한점적분을, 나머지 항에 대해서는 완전적분을 수행한다. SRI 역시 비압축성 재료에 대하여 과잉강성현상을 피할 수 있다. 그러나 SRI는 영에너지모드가 포함되어 있으므로, 강성행렬의 안정성이 결여되는 결점이 있다.

전통요소의 비압축성에 대한 과잉강성문제는 Herrmann⁽⁸⁾에 의하여 변분해법 상에서 최초로 이론적 기초가 제시된 이래로, Pian⁽⁵⁾의 혼합변분원리에 의한 유한요소 정식화와 SRI,⁽⁴⁾ 이를 좀더 일반적인 형상에 적용할 수 있게 한 B-bar⁽²³⁾ 방법 등이 제시되었다.

지난 30년간, 위의 비적합 요소와 감차적분요소의 발전과 더불어, Pian⁽⁵⁾에 의하여 혼합변분원리를 사용한 혼합유한요소(hybrid finite element)가 개발, 사용되어 왔다. 혼합유한요소의 특징으로는 각각 독립적인 변위장 및 응력장 함수의 도입과 이에 의한 Hellinger-Reissner 변분해법을 들 수 있다. 그 후 여러 연구자들에 의하여 여러 형태의 선택적인 응력장 함수의 혼합요소가 제안되었으며, 이러한 응력장 함수의 도입이론에 관해서는 최근의 Pian과 Wu⁽⁶⁾ 등의 최적 응력장 함수에 대한 연구가 주목할 만하다.

또 다른 형태의 4절점 다변수 유한요소로서, Belytschko와 Bachrach⁽⁷⁾는 각각 독립적인 변위장, 응력장 및 변형률장 함수를 도입하여, Hu-Washizu 변분해법을 이용한 평면응력/평면변형률 요소(QBI, quintessential bending/incompressible plane stress/strain element)를 개발하였다. QBI는 강체운동 벡터에 직교하는 hourglass 벡터에 의한 적합 변위장과 독립적인 응력장, 변형률장을 Hu-Washizu 변분원리에 의하여 정식화하는 기법을 쓴 요소이다. 여기서, hourglass 벡터란 진동 해석분야에서, 기존의 외삽 시간적분코드에 많이 쓰이는 한점적분요소의 영에너지 모드를 제어하기 위해 고안된 벡터이다. 한점적분요소의 영모드는 요소의 형상이 마치 모래시계와 같이 변형되며 발생하는 데, 이러한 요소의 형상에 따른 불안정성을 제어하기 위하여 요소의 강체운동 벡터에 직교하고, 일정 응력조건을 만족하는 변위의 기술방법이 필요하게 되었고 이러한 작업은 Belytschko와 Ong⁽¹²⁾에 이르러 정립되었다.

Hourglass 벡터의 직교성을 이용한 변위의 기술 방식은 다변수 변분원리에 의한 요소의 정식화 과정에서 역행렬의 크기를 최소화하고, 정식화 상의

단순함을 제공한다. 그러나, QBI는 기존의 다변수 유한요소에 비해, 요소의 찌그러짐에 대해 그 거동이 기존의 hybrid요소보다 나쁘다는 것이 단점이다.

본 연구의 목적은 기존 평면응력/변형률 요소에서 발생하는 굽힘이나 비압축성 재료의 해석에서 발생하는 강성과잉현상을 제거하고 해의 정확도가 높고 요소의 찌그러짐에 대하여도 민감하지 않은 요소의 개발에 있다. 본 연구에서는 이를 위하여 비적합 변위와 독립적인 응력장 또는 독립적 변형률장을 포함하는 두가지 수정된 Hellinger-Reissner 변분원리를 사용하여 두가지 형태의 새로운 평면응력/변형률 요소를 개발하였다.

첫째 요소는 우선 수정된 Hellinger-Reissner 범함수의 경계조건으로부터 완전 다항식(complete polynomials)으로 기술된 응력장의 초기 보간함수를 최적화하고, 도입된 비적합 변위가 요소의 일정 변형률 조건을 만족하도록 한 것이다. 요소의 강성행렬은 Hellinger-Reissner 변분해법에 따라, 최적화된 응력장과 hourglass 벡터를 이용하여 기술된 적합 변위장에 의하여 구성하였고, 이를 편이상 비적합 최적 응력장 요소(ISO, incompatible stress-optimized element)라 명명하였다.

두번째 요소에서는 절점 적합조건을 만족하는 비적합 변위를 도입하고 hourglass 벡터에 의한 적합 변위장과 ISO의 응력장 대신 독립된 변형률장을 도입하여, 이 3가지 독립적인 물리장에 의하여 Hellinger-Reissner 범함수를 수정하였다. 또한, 이 수정된 Hellinger-Reissner 범함수식에 변형률장을 독립적인 가상함수로 도입하고, hourglass 벡터에 의한 적합변위와 절점조건을 만족하는 비적합 변위장에 의한 이산화 과정과 효율적으로 수정된 혼합 변분방법에 의해 요소의 강성행렬을 구하였다. 이를 비적합 가상 변형률요소(IAS, incompatible assumed-strain element)라 명명하였다.

ISO와 IAS는 전통요소의 결합으로 지적되는 굽힘과 비압축성에 대한 거동에서 좋은 결과를 나타낼 뿐만 아니라, 요소의 찌그러짐에 대해서도 해에 큰 영향을 받지않는 것으로 나타났다. 또한 변분해법 과정에서 비적합 변위에 의한 효과를 충분히 고려하고, 변형률을 독립적인 물리량으로 가상한 IAS는 변형에 대해 요소의 거동이 우수하고, 응력 값 역시 기존의 가상응력요소에 비해 정확한 것으로 나타났다.

2. 비적합 변위의 도입

기존의 4절점 변위기저요소를 사용하여 굽힘문제를 풀때 강성과잉현상이 생기는 원인 중의 하나는 4절점 요소의 보간함수 상의 불완전성때문이다. 즉, 굽힘변형의 다항식에 의한 이론해의 최고 차항이 3차임에 반해 4절점 요소 내부의 형상함수는 선형의 보간함수로 주어지므로 4절점 변위기저 요소의 보간함수로는 굽힘에 대한 거동을 충분히 기술할 수 없게 되어 유한요소 해의 수렴성이 현저하게 떨어지게 된다. 실제 수학적으로 유한요소 해의 수렴성은 요소의 형상함수가 완전 보간함수에 의해서 기술되었을 때 가장 이상적인 상태가 된다는 사실은 이미 잘 알려져 있다. 이러한 4절점 변위요소의 보간함수 상의 불안정성은 고차의 내부 변위를 도입함으로써 완전 보간 함수화하여 요소의 수렴성을 향상시키고자하는 노력은 오랜 시간동안 여러 연구자들에 의해 수행되어 왔다. Q6와 QM6는 이러한 고차의 내부 변위를 도입한 최초의 성공적인 요소로서, 굽힘문제에 대하여 기존의 4절점 변위모델 요소에 비해 상당히 높은 수렴성을 갖는다.

이러한 고차의 비적합 내부변위의 도입문제와 유한요소의 수렴성에 관한 관계는 몇가지 제약조건이 만족되어야 한다. 1970년대, Strang과 Fix⁽¹⁰⁾는 이에 관하여 요소의 경계에서 비적합 변위의 수직방향 성분이 제거되어야한다는 다음의 조건을 제시하였다.

$$\oint_{\Gamma_e} \mathbf{n}^T \mathbf{u}_i d\Gamma = 0 \quad (1)$$

여기서, \mathbf{n} 은 요소의 경계에서의 수직방향벡터이고, \mathbf{u}_i 는 비적합 변위장이며, T 는 전치행렬을 의미한다.

식(1)은 연구자들에 의하여 요소의 개발에서 비적합 변위의 도입에 관한 필수적인 사항으로 인식되어 왔다. 그러나, 요소개발 분야에서 실제로 요소의 수렴성을 만족하는 비적합 변위가 도입된 것은 QM6가 최초이다. 하지만 QM6의 정식화 방법은 2차원 축대칭 요소에는 적용이 불가능하며, 따라서 유한요소 일반에 적용 가능한 비적합 변위의 도입에 관한 이론은 여러 연구자들의 관심사가 되어 왔다. 최근에 이르러 Pian과 Sumihara⁽¹⁶⁾에 의해 비적합 변위가 혼합 변분원리를 이용한 유한요

소에 사용되었다. 이러한 혼합 변분원리에 의한 가상응력요소에서 비적합 변위의 사용은 변위의 보간함수에 완전성을 주기 위해서라기 보다는 최적의 응력장을 구하기 위한 방법으로 제시되었다.

요소의 개발에 있어 비적합 내부변위의 도입은 영에너지 모드가 포함된 선택적 감차적분법이나 일괄 감차적분법⁽⁴⁾에 비해 평면응력요소에서 굽힘문제에 대한 안정된 해를 제공한다.

최근, Wu⁽²⁴⁾는 그간의 이러한 비적합 변위의 상태에서 고려되어야 할 사항을 정리하였다. 그중 중요한 것을 들면, 요소의 경계에서 요소 간의 연속성을 손상시키지 않아야 하며, 또한 선택된 비적합 변위장이 각 절점에 의해 기술되는 적합 변위장과 상호 독립적이어야 한다는 것이다.

잘 알려진 바와 같이 요소들 간의 경계에서의 변형에 대한 비연속성은 필연적으로 발생한다. 그러므로 고려사항 중의 전자는 요소의 수렴성을 유지하기 위한 요소 경계간의 최소한의 연속성을 의미하며, 이를 달리 표현하면 요소 간의 강체운동은 허용되지 않는다는 의미이다. 그리고 적합 변위장과 비적합 변위장의 상호 독립성이란 가정된 비적합 변위의 보간함수 계수들이 적합 변위장의 계수들처럼 절점변수에 의한 물리량으로 표현될 수 없고, 단지 요소 내부의 임의적인 변위성분을 의미하는 양적 개념이라는 의미이다. 이것은 최소한 요소의 절점에서 비적합 변위성분이 소거되어야 함을 의미한다. 이를 비적합 절점 적합조건이라 부르고 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_i = \mathbf{N}_q \mathbf{q} + \mathbf{N}_i \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_i &= \begin{cases} \mathbf{N}_i \boldsymbol{\lambda} & \xi \neq \xi_i, \eta \neq \eta_i \text{ 일 때} \\ \mathbf{0} & \xi = \xi_i, \eta = \eta_i \text{ 일 때} \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, \mathbf{u}_q 와 \mathbf{u}_i 는 각각 요소의 적합 변위장과 비적합 변위장을 나타내며, \mathbf{N}_q 와 \mathbf{N}_i 는 각각 적합 변위와 비적합 변위의 보간함수 행렬, \mathbf{q} 와 $\boldsymbol{\lambda}$ 는 각각 적합 변위의 절점 변수와 비적합 변위의 보간함수 계수, 그리고 ξ_i 와 η_i 는 요소의 각 절점좌표이다.

식(2)는 실제 비적합 요소의 설계에서 비적합 변위장의 보간함수를 도입할 때 고려할 사항이나 위의 조건과 요소의 수렴성을 동시에 만족시키는 유용한 보간함수를 찾지못한 불가능하다. 따라서 식(2)에 의한 보간함수 선택에 있어서는 요소의 수렴성을 만족하는 일정 응력 조건에 의한 수정이 필요하며, 이는 다음의 과정을 통해 이루어진다.

먼저, 일정 응력조건에 대한 일정 변형률조건을 비적합 변위장으로부터 얻어진 변형률에 부여하여 다음의 식으로 나타낸다.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\lambda^* = \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda + \boldsymbol{\varepsilon}_c = (\mathbf{DN}_\lambda) \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon}_c = \mathbf{B}_\lambda \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon}_c \quad (3)$$

여기서, $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 는 일정 응력에서 일정 변형률 조건을 부여하기 위한 변형률 상수이다. 변분 방법의 정식화 과정에서 식(3)의 제한조건을 다음의 적분식으로 표현할 수 있다.

$$\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}_c (\mathbf{B}_\lambda \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon}_c) d\Omega = 0 \quad (4)$$

위의 식으로부터 $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ 는

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = -\frac{1}{\Omega^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\lambda d\Omega \boldsymbol{\lambda} \quad (5)$$

이므로, 변분과정의 비적합 변위와 그 변형률에 대한 관계행렬은

$$\mathbf{B}_\lambda^* = \mathbf{B}_\lambda - \frac{1}{\Omega^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\lambda d\Omega \quad (6)$$

가 된다.

실제의 요소 개발에 있어서, 식(1)에 의한 비적합 변위의 도입문제는 각 요소의 특성에 따라 개별적으로 다르게 행해져야 한다. 본 연구에서는 평면 응력 요소에서 식(1)의 비적합 변위 수렴조건을 만족시키는 보간함수를 변분과정과는 독립적으로 구하였다. 동시에 식(2)에서 식(6)의 과정에서와 같이 비적합 변위의 절점 적합 조건과 일정 응력 조건을 만족하는 보간함수에 의해 2차원 평면 응력 요소에 대한 정식화를 수행하였다.

본 연구에서는 위의 식(1)에 의한 비적합 변위의 보간함수와 다변수 변분해법에 유리한 조건을 제공하는 hourglass 벡터에 의한 적합 변위장, 그리고 독립된 응력장에 의한 Hellinger-Reissner 변분원리를 이용한 정식화 과정과, 동시에 식(2)에서 식(6)까지의 과정에 따라 선택된 비적합 변위와 독립된 변형률장에 의한 수정된 Hellinger-Reissner 변분법에 따른 평면응력 및 변형률요소를 개발하였다.

3. 최적 응력장 함수에 의한 비적합 평면응력 및 변형률요소

응력장 함수의 선택은 가상 응력 hybrid 요소에 있어서 매우 중요하다. 응력장 선택에 있어서 초기의 hybrid 모델^(15,17,18)은 평형방정식을 만족하는 물

리좌표계에 의한 좌표변수를 주로 사용하였으나, 최근에는 에너지 적합조건을 만족하는 주좌표계 상의 좌표변수에 의해 섭동이론으로 응력장을 기술하거나,⁽¹⁶⁾ 주좌표계에서의 응력을 주좌표계의 원점에서 물리좌표계 상으로 전환하는 기법⁽¹⁹⁾이 주로 사용되고 있다.

3장에서는 식(1)의 조건을 만족시키는 비적합 내부변위를 구하여, 이 비적합 내부변위에 의해, Pian과 Wu⁽⁶⁾의 응력장 최적화기법을 사용하여 응력장의 최종적 보간함수를 구하였다. 또한 이 독립 응력장의 수정과 hourglass 변위의 도입에 의한 효율적인 변분해법 개발을 통해 평면응력 유한요소를 정식화하였다.

3.1 비적합 변위장을 갖는 가상 응력요소의 Hellinger-Reissner 변분해법

일반적으로, 고차의 비적합 변위함수는 막요소에서 굽힘에 대한 과잉강성문제를 해결하는데 유용하다. 그러나 요소의 경계에서 비적합 변위 모드가 제거되지 않으면, 요소의 일정 변형률조건을 만족하지 못하게 되므로 수렴성에 문제가 생기게 된다. Strang과 Fix⁽¹⁰⁾는 식(1)과 같이 비적합 변위요소가 패치테스트를 통과하기 위한 조건을 제시하였는데, 이를 Hellinger-Reissner 범함수에 경계조건으로 대입하기 위해 수정하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}_c^T (\mathbf{D} \mathbf{u}_\lambda) d\Omega = 0 \quad (7a)$$

$$\oint_{\Gamma^e} \boldsymbol{\sigma}_c^T \mathbf{n}^T \mathbf{u}_\lambda d\Gamma = 0 \quad (7b)$$

여기서, \mathbf{D} 는 변형률 변위 미분작용소(differential operator)이고, \mathbf{u}_λ 는 비적합 변위, \mathbf{n} 은 경계에서의 수직벡터, $\boldsymbol{\sigma}_c$ 는 응력장의 일정항이다. 위의 조건과 비적합 변위항을 포함하는 Hellinger-Reissner 범함수는 다음의 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} = & \int_{\Omega^e} \left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{D} \mathbf{u}_q) + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{D} \mathbf{u}_\lambda) \right] d\Omega \\ & + \oint_{\Gamma^e} \boldsymbol{\sigma}_c^T \mathbf{n}^T \mathbf{u}_\lambda d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

여기서, $\boldsymbol{\sigma}$ 는 응력장, \mathbf{C} 는 요소의 응력 변형률 관계 행렬, \mathbf{u}_q 는 적합 변위장을 나타낸다.

3.2 일정 변형률조건을 만족하는 평면응력 요소의 비적합 변위장 구성

식(2)의 절점 적합조건을 만족하는 비적합 변위

장이 항상 식(1)의 비적합 요소 수렴조건을 만족하는 것은 아니다. 예를 들어 비적합 요소 Q6는 절점적합 조건을 만족하는 비적합 함수 $1-\xi^2$, $1-\eta^2$ 를 도입하였으나 요소의 수렴성을 보장하는 일정 변형을 패치테스트를 통과하지 못한다. 그러므로 절점 적합조건은 비적합요소의 수렴성에 대한 절대적인 조건은 아니다. 비적합 변위 도입에 있어서 이러한 문제로 인하여 요소의 설계에서 비적합 변위의 도입 시에 요소의 수렴성을 보장하기 위한 비적합 변위의 수정기법이 여러 연구자들^(2,6,16,21)에 의해 제안되어 왔다. 본 연구에서는 절점 적합조건에 의하지 않고 직접적으로 식(1)을 만족하는 비적합 변위를 도입하였다. 식(1)은 평면응력상태에서 다음의 식이 된다.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{u}_\lambda \det \mathbf{J} d\xi d\eta = 0 \quad (9)$$

Q6, QM6 및 Pian 등의 $5\beta-I^{(6)}$ 에 사용된 비적합 변위장 $1-\xi^2$, $1-\eta^2$ 은 위의 식을 만족시키지 못하므로, 식(9)를 만족하도록 적합 변위장의 항을 첨가하여 다음과 같이 가정한다.

$$\mathbf{u}_\lambda = \begin{Bmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\lambda \boldsymbol{\lambda} \quad (10)$$

$$\mathbf{N}_\lambda = \begin{bmatrix} 1-\xi^2 & 1-\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi^2 & 1-\eta^2 \\ C_1\xi+C_2\eta & D_1\xi+D_2\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1\xi+C_2\eta & D_1\xi+D_2\eta \end{bmatrix} \quad (11)$$

가 되고, C_1 , C_2 , D_1 , D_2 는 식(9)에 의하여 다음과 같이 요소의 절점의 좌표로 표현된다.

$$C_1 = D_1 = -\frac{2}{3} \frac{a_1 b_1 - a_2 b_2}{a_3 b_1 - a_1 b_3} \quad (8)$$

$$C_2 = D_2 = -\frac{2}{3} \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_3 b_1 - a_1 b_3} \quad (12)$$

여기서,

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

위에서 구한 비적합 함수는 적합 변위장의 다항식 항 ξ 와 η 을 포함하고 그 계수들이 절점변수에 의해 표현되지만, 요소의 경계에서 그 영향을 제거함으로써 요소 간의 연속성을 보장할 수 있게 되어 비적합 변위의 도입에 따른 요소의 수렴성에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.

3.3 Hourglass 벡터를 이용한 적합 변위장 및 변형률장의 구성

일반적으로 C^0 등매개변수의 4절점 사각요소의 변위와 물리평면 상의 좌표는 형상함수에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_q(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 h_i \mathbf{u}_{q_i} \\ \mathbf{x}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 h_i \mathbf{x}_i \\ h_i &= \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서, ξ_i , η_i 는 주좌표계 상의 요소의 절점의 좌표이고, $\mathbf{x}_i^T = [x_i, y_i]$ 는 물리 평면 상의 절점의 좌표이다. Hourglass 벡터를 이용한 변위장에 대한 기술은 다변수 유한요소의 정식화 과정에서 식(13)을 사용하는 것보다 유용한데, 이는 변형률장이 변위장에 대한 물리좌표계 상의 미분치로 주어질 때, B행렬 상에서 Jacobian의 영향을 받지 않는 일정 값을 갖는 부분이 생겨, 역행렬의 크기가 줄기 때문이다.⁽¹¹⁻¹⁴⁾ 이 기술방식에 의하면 변위장은 다음과 같다.⁽⁷⁾

$$\mathbf{u}_q = (\boldsymbol{\Delta}^T + x \mathbf{p}_x^T + y \mathbf{p}_y^T + \mathfrak{I} \boldsymbol{\gamma}^T) \mathbf{u}_{q_i} \quad (14)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_y^T &= \frac{1}{4J_0} [-a_1 + a_3 \quad -a_1 - a_3 \quad a_1 - a_3 \quad a_1 + a_3] \\ \mathbf{p}_x^T &= \frac{1}{4J_0} [b_1 - b_3 \quad b_1 + b_3 \quad -b_1 - b_3 \quad -b_1 - ba_3] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathfrak{I} = \xi \eta \quad (16)$$

$$\mathfrak{I}_{,x} = \frac{(b_3 \eta - b_1 \xi)}{\det \mathbf{J}} \quad (17)$$

$$\mathfrak{I}_{,y} = \frac{(-a_3 \eta + a_1 \xi)}{\det \mathbf{J}} \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{h}}{4} - a_4 \mathbf{p}_x^T - b_4 \mathbf{p}_y^T \quad (19)$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{1}{4} (x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ b_4 &= \frac{1}{4} (y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \end{aligned} \quad (20)$$

$$h^T = [1 \ -1 \ 1 \ -1] \quad (21)$$

$$A = \frac{1}{4} t - a_0 p_x^T - b_0 p_y^T \quad (22)$$

$$t^T = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \quad (23)$$

$$a_0 = \frac{1}{4} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (24)$$

$$b_0 = \frac{1}{4} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \quad (24)$$

변위장을 식(14)로 표시하면, 변형률장은 다음과 같이 상수항 행렬과 보간함수 행렬로 나뉘어 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = Du_q = (B_0 + B_q) q \quad (25)$$

여기서,

$$B_0 = \begin{bmatrix} p_x^T & 0 \\ 0 & p_y^T \\ p_y^T & p_x^T \end{bmatrix}, \quad B_q = \begin{bmatrix} \mathfrak{I}_{,x} \gamma^T & 0 \\ 0 & \mathfrak{I}_{,y} \gamma^T \\ \mathfrak{I}_{,y} \gamma^T & \mathfrak{I}_{,x} \gamma^T \end{bmatrix} \quad (26)$$

위의 식에서 얻어진 B_q 는 다음의 성질을 갖는다.⁽¹⁵⁾

$$\int_{\Omega_e} B_q d\Omega = 0 \quad (27)$$

위의 성질은 요소의 강성행렬 구성시 행렬의 대각선 블록을 제외한 모든 항을 영으로 하므로 계산상의 효율을 높일 수 있다. 이와 관련하여 3.5절 강성행렬의 구성에서 더 다루기로 한다.

3.4 비적합 변위장에 의한 응력장의 최적화

응력장을 상수항과 보간함수항으로 나누어 표시하면

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_h \quad (28)$$

이고, 위의 식을 식(8)의 선적분에 대입해 보면 다음과 같다.

$$\int_{r_e} \sigma_c^T n^T u_i d\Gamma + \int_{r_e} \sigma_h^T n^T u_i d\Gamma \quad (29)$$

위의 식에서 첫째항은 일정 변형률조건 (9)를 만족하는 식(10)과 식(11)의 비적합 변위에 의해서 소거되고, 두번째항을 영으로 만족시키는 응력장을 구하기위해 우선 선적분을 면적분으로 바꾸면,

$$\int_{\Omega_e} [\sigma_c^T (Du_i) + (D^T \sigma_h) u_i] d\Omega = 0 \quad (30)$$

가 된다. 응력장에 대한 형상함수를 상수항과 다항

식항으로 나누어 다음과 같이 가정한다.

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_h = B_c + N\sigma\beta \quad (31)$$

$$\sigma_c = [I_{3 \times 3}] \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

$$\sigma_h = N\sigma\beta = \begin{bmatrix} \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \\ \beta_7 \\ \beta_8 \\ \beta_9 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

식(33)과 식(10)을 식(30)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\beta^T T_M \lambda = 0 \quad (34)$$

여기서,

$$T_M = \int_{\Omega_e} [N^T B_c + B_c^T N] d\Omega \quad (35)$$

$$Du_i = B_i \lambda$$

$$D^T \sigma = B\sigma\beta \quad (36)$$

다변수 변분해법에 의한 유한요소 강성행렬의 안정성은 Babuska-Brezzi⁽¹⁶⁾조건으로 판별할 수 있다. 이에 의하면 영에너지 모드를 없애기 위한 다변수 유한요소의 응력장 차원의 크기는 적합 변위장과 비적합 변위장 차원의 크기와 요소의 강체 운동의 개수에 의해 결정된다. T_M 행렬의 크기는 응력장의 보간함수의 변수 수와 요소 내부의 비적합 변위의 변수 수에 따라 결정되는데, 최종적인 응력장 변수는 초기에 가정한 응력장의 변수에서 비적합 변위 수를 빼면 된다. 이를 식으로 나타내면,

$$n_{\beta_r} = n_{\beta_i} - n_\lambda \quad (37)$$

이 된다. 여기서, n_{β_i} 와 n_{β_r} 은 각각 초기와 최종의 응력장의 차원이고, n_λ 는 비적합 변위의 차원을 나타낸다. 위의 과정에서 n_{β_i} 는 9이고 n_λ 는 4이므로 식(37)에 따르면 n_{β_r} 는 5가 됨을 알 수 있다. 식(8)에서 응력변수 β 의 수를 결정하는 조건은 Babuska-Brezzi 조건식에 의하면

$$n_{\beta_r} \geq n_q + n_\lambda - R \quad (38)$$

이 되어, 적합변위 차원 n_q 은 8, 강체운동의 수 R 은 3에 의하여 응력장의 차원은 최소 9가 되어야 함을 알 수 있다. 이는 위의 결과와 다르므로 결국 식(8)의 범함수를 위의 과정으로 정식화했을 때,

요소의 강성행렬이 안정화될 수 없음을 의미하는데 이에 따라 기존의 비적합 변위를 포함하는 범함수의 수정이 요구된다. 즉 요소의 범함수 식에 비적합 내부 변위를 포함하는 항을 제거하여 다음의 식으로 재구성한다.

$$\Pi_{HR}^{modified} = \int_{\Omega^e} \left[-\frac{1}{2} \sigma^T C^{-1} \sigma + \sigma^T (D u_q) \right] d\Omega \quad (39)$$

위의 범함수 식을 사용하면, 위에서 구한 응력장의 차원이 식(38)을 만족함을 알 수 있다. Pian과 Wu⁽⁶⁾는 이와 관련하여, 식(39)의 사용을 식(8)과 함께 선택적인 문제로 보고 있으나, 실제 요소의 정식화 과정에서 응력 최적화방법에 따라 구한 응력장은 범함수 식(8)에 의한 강성행렬 구성에서 강성행렬의 rank 충분조건을 만족하지 못한다. 실제로 Pian 등이 언급한 바와 같이 식(8)의 내부 변위를 포함하는 항이 고차의 다항식들로 구성되어 있기 때문에 상대적으로 값이 작아 무시할 수 있는 것뿐 아니라, 응력 최적화기법에 의해 구한 응력장은 식(8)에 의한 강성행렬의 불안정성을 초래한다. 따라서 응력 최적화기법에 따른 요소의 정식화에서 식(8)과 같이 비적합 변위를 포함한 범함수식은 사용이 불가능하다. 식(39)는 요소의 강성행렬을 구성하는 범함수 식에서 일정 변형률조건을 만족하는 내부 변위가 응력의 최종적인 형태를 규정하는 데 이용되므로, 실제의 강성행렬의 구성은 내부변위의 영향을 포함하는 응력장의 형상함수와 적합 변위장에 의하여 이루어짐을 의미한다.

식(35)에서 T_M 은 다음과 같이 두 부분으로 나뉜다.

$$\begin{aligned} T_M \beta &= T_{M1} \beta_1 + T_{M2} \beta_2 = 0 \\ \beta_1^T &= [\beta_4 \ \beta_7 \ \beta_8 \ \beta_9], \quad \beta_2^T = [\beta_5 \ \beta_6] \end{aligned} \quad (40)$$

위의 식에서 β_1 은 요소의 형상이 직사각형일 때 ($a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = 0$) T_M 의 행렬 중 영이 아닌 행으로 결정한다. 식(40)에서

$$\beta_1 = T_{M1}^{-1} T_{M2} \beta_2 \quad (41)$$

가 되어, 최종적인 고차의 응력장 함수는

$$\begin{aligned} \sigma_h^t &= \left\{ \begin{bmatrix} \eta^* & 0 \\ 0 & \xi^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} - \left\{ \begin{bmatrix} \xi^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^* & \eta^* \end{bmatrix} T_{M1}^{-1} T_{M2} \right\} \\ \beta_2 &= N_h^t \beta_h \end{aligned} \quad (42)$$

가 된다. 여기서, $\xi^* = \xi - \xi_0$, $\eta^* = \eta - \eta_0$ 이고, 선형의 보간함수로 기술된 등매개 좌표변수의 Jaco-

bian 행렬의 절대치를 $\det J = J_0 + J_1 \xi + J_2 \eta$ 로 표시할 때,

$$\xi_0 = \frac{J_1}{3J_0}, \quad \eta_0 = \frac{J_2}{3J_0} \quad (43)$$

이고, 이는 다음의 조건을 만족하도록 응력장의 형상함수 식을 수정한 것이다.

$$\int_{\Omega^e} \sigma_h^t d\Omega = 0 \quad (44)$$

3.5 강성행렬의 구성

식(39)에 이산화된 응력장과 변위장의 행렬식을 적용한다. 즉, 식(31)과 식(25)를 식(39)에 대입하면, 식(27)과 식(44)에 의해 변형률장과 응력장의 상수행렬과 곱해지는 응력장과 변형률장 행렬은 소거되어 다음의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \Pi_{HR}^{modified} &= -\frac{1}{2} \beta_c^T C^{-1} \beta_c \Omega^e + \beta_c^T B_0 q \Omega^e \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta_h^T H_{\sigma\sigma} \beta_h + \beta_h^T H_{\sigma q} q \end{aligned} \quad (45)$$

여기서,

$$H_{\sigma\sigma} = \int_{\Omega^e} N_{\sigma^T} C^{-1} N_{\sigma} d\Omega \quad (46)$$

$$H_{\sigma q} = \int_{\Omega^e} N_{\sigma^T} B_q d\Omega \quad (47)$$

이고, Ω^e 는 요소의 체적이다. 식(45)의 범함수 식으로부터 강성행렬을 구하면,

$$K = K_0 + K_h \quad (48)$$

이다. 여기서, 강성행렬은 상수행렬과 고차행렬로 나눌 수 있는데, 상수행렬은 적분에 의하지 않고 결정되며, 고차행렬은 2점 수치적분으로 구할 수 있다. 상수행렬과 고차행렬은 다음의 식으로 표현된다.

$$K_0 = B_0^T C B_0 \Omega^e, \quad K_h = H_{\sigma q}^T H_{\sigma\sigma} H_{\sigma q} \quad (49)$$

4. 가상 변형률을 갖는 비적합 평면응력 및 변형률요소

ISO의 비적합 내부 변위는 요소의 경계에서 응력장과 일정 변형률조건을 만족시켜 최적 응력장의 형상함수에 포함되지만 이러한 응력장을 식(8)의 완전한 비적합 변위에 의한 범함수식에 사용하면 강성행렬을 구하는 과정에서 행렬이 불안정해지는 현상이 생긴다. 이러한 현상으로 인하여 식(8)

의 적용이 불가능해 진다. 따라서, Pian과 Wu의 최적 응력장은 식(8) 혹은 식(39)의 범함수 선택 문제가 아니라 비적합 변위를 응력의 최적화 과정에 도입한 것이라 해야 할 것이다.

이는 또한 고차의 비적합 변위의 영향이 상대적으로 요소의 거동에 작게 반영됨을 의미하므로, 비적합 변위의 도입에도 불구하고 변위값은 응력장의 변화에 대해 큰 영향을 받지 않게 된다.

이번 장에서는 가상 변형률과 비적합 변위에 의한 Hellinger-Reissner 변분해법을 사용하여, 비적합 변위의 영향을 범함수식 안에서 충분히 고려한 요소에 대해 다루고자 한다.

4.1 가상 변형률을 가진 비적합 요소의

Hellinger-Reissner 변분해법

독립적인 가상 변형률과 비적합 내부 변위에 의하여 고전적 형태의 Hellinger-Reissner 범함수를 수정하면 다음과 같다.

$$\Pi_{HR} = \int_{\Omega^e} [\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} (\mathbf{D} \mathbf{u}_q) + \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} (\mathbf{D} \mathbf{u}_\lambda) - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}] d\Omega \quad (50)$$

이때, 변형률장을 다음과 같이 상수행렬과 보간함수 행렬로 나누어 표시한다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{N}_\varepsilon \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\varepsilon}_c + \boldsymbol{\varepsilon}_h = \boldsymbol{\alpha}_c + \mathbf{N}_\varepsilon^* \boldsymbol{\alpha}_h \quad (51)$$

변위장과 변형률장이 가상된 범함수식에서 식(38)의 Babuska-Brezzi 조건식은 다음과 같다.

$$n_\varepsilon \geq n_q + n_\lambda - R \quad (52)$$

위의 식에 따르면 가상 변형률장의 차원은 최소 9가 되어야 하므로, 고차의 가상 변형률장은

$$\boldsymbol{\varepsilon}_h = \mathbf{N}_\varepsilon^* \boldsymbol{\alpha}_h = \begin{bmatrix} \xi^* & \eta^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^* & \eta^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^* & \eta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} \quad (53)$$

이 된다. 여기서 $\xi^* = \xi - \xi_0$, $\eta^* = \eta - \eta_0$ 이고, ξ_0 와 η_0 는 식(43)와 같다. 비적합 내부 변위장을

$$\mathbf{u}_\lambda = \mathbf{N}_\lambda \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 1 - \xi^2 & 1 - \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \xi^2 & 1 - \eta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (54)$$

과 같이 가정하고, 이산화된 변형률장과 식(14)에

의한 변위장을 식(49)의 범함수식에 적용하면,

$$\begin{aligned} \Pi_{HR} = & -\frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}_c^T \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha}_c \Omega^e + \boldsymbol{\alpha}_c^T \mathbf{B}_0 \mathbf{q} \Omega^e - \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}_h^T \mathbf{H}_{\varepsilon\varepsilon}^* \boldsymbol{\alpha}_h \\ & + \boldsymbol{\alpha}_h^T \mathbf{B}_{eq} \mathbf{q} + \boldsymbol{\alpha}_c^T \mathbf{H}_{\varepsilon\lambda} \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (56)$$

이 된다. 여기서,

$$\mathbf{H}_{\varepsilon\varepsilon} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\varepsilon^{*T} \mathbf{C} \mathbf{N}_\varepsilon^* d\Omega \quad (56)$$

$$\mathbf{H}_{\varepsilon q} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\varepsilon^{*T} \mathbf{C} \mathbf{B}_q d\Omega \quad (57)$$

$$\mathbf{H}_\lambda = \int_{\Omega^e} \mathbf{C} \mathbf{B}_\lambda d\Omega \quad (58)$$

$$\mathbf{H}_{\varepsilon\lambda} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\varepsilon^{*T} \mathbf{C} \mathbf{B}_\lambda d\Omega \quad (59)$$

이고, 위의 식에서 \mathbf{H}_λ 를 소거하기 위해 비적합 내부 변위장에 의한 내부 변형률장 행렬을 다음과 같이 수정한다.

$$\mathbf{B}_\lambda^* = \mathbf{B}_\lambda - \frac{1}{\Omega^e} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\lambda d\Omega \quad (60)$$

식(50)의 변분에 의하여 가상행렬을 구하면, 다음과 같이 일정값을 갖는 부분과 2점 적분을 요하는 행렬 두 부분으로 나누어 진다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_h \quad (61)$$

여기서,

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{B}_0 \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}_0 \quad (62)$$

$$\mathbf{K}_h = \mathbf{H}_{\varepsilon q}^T \mathbf{G} \mathbf{H}_{\varepsilon q} \quad (63)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} - \mathbf{H}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \mathbf{H}_{\varepsilon\lambda}^* (\mathbf{H}_{\varepsilon\lambda}^{*T} \mathbf{H}_{\varepsilon\varepsilon}^{-1} \mathbf{H}_{\varepsilon\lambda}^*)^{-1} \mathbf{H}_{\varepsilon\lambda}^{*T} \mathbf{H}_{\varepsilon\varepsilon} \quad (64)$$

$$\mathbf{H}_{\varepsilon\lambda}^* = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\varepsilon^{*T} \mathbf{C} \mathbf{B}_\lambda^* d\Omega \quad (65)$$

5. 수치테스트와 결과

이번 장에서는 본 연구에서 개발된 요소모델과 이미 발표된 문헌의 다른 요소모델들을 이용하여, 다각도의 수치테스트를 통해 요소의 성능과 그 특징을 비교 분석하였다. 먼저 본 수치실험에 사용된 요소들을 간략히 살펴보면 다음과 같다.

(1) Q4는 등매개변수 4절점 사각 평면응력, 평면 변형률 요소이다.

(2) Q6는 Wilson⁽¹⁾ 등의 비적합 변위요소이며 이는 앞서 언급한 바와 같이 굽힘에 대하여 과잉강성현상이 없으나, 일정 변형률 패치테스트를 통과

하지 못한다.

(3) QM6는 Taylor 등⁽²⁾의 Q6를 수정하여 패치 테스트를 통과하도록 한 요소이다.

(4) Qc6는 Chen 등⁽²⁰⁾의 등매개변수 유사 적합 변위 요소이다.

(5) NQ10⁽²¹⁾은 3차의 형상함수까지 도입한 요소로써 10개의 비적합 내부 변위를 가지며 가상변위 일 원리에 의한 변분해법과 정적 축약법에 의해 정식화되어 있다.

(6) 5 β -II⁽⁶⁾는 비적합 변위에 의해 응력장을 최적화하는 기법을 사용한 요소이다.

(7) SRI⁽⁴⁾은 선택적 감차적분에 의하여 굽힘에 대한 강성과잉과 비압축성 강성과잉을 제거한 요소이다.

(8) QBI⁽⁷⁾은 Hu-Washizu 변분원리에 의하여 독립적인 응력장, 변형률장을 도입한 요소로서 변분 원리의 복잡성에도 불구하고 정식화가 용이하다.

(9) ISO는 본 연구에서 개발된 요소로서, 5 β -II와 기본적으로 성질이 같으나, 응력장 및 변형률장에 의한 강성행렬 구성과정에서 행렬의 대각선 블록을 제외한 모든 부분이 영이 되어 5 β -II에 비해 역행렬의 크기가 작은 것이 특징이다.

(10) ISA는 9개의 독립적인 변형률장과 4개의 비적합 내부 변위를 모두 고려한 요소로서 비적합 변형률장에 대하여 일정 변형률 조건을 만족하도록 수정하였다.

5.1 수치예 1

Fig. 1은 끝단에서 굽힘모멘트와 전단 휨하중을 각각 받고 있는 평면응력상태의 직선 외팔보를 도시한 것으로, 그림에서와 같이 5개의 찌그러진 형태의 요소를 사용하여 점 A에서의 처짐값과 점 B에서의 응력값을 계산하였다. Table 1은 ISO와 IAS를 사용한 결과와 다른 요소의 결과⁽⁶⁾를 함께 표시한 것이다. 표에서 보는 바와 같이 고전적인 변위기저 4절점 요소인 Q4는 굽힘에 대한 강성 과잉 현상이 뚜렷하며, 비적합 요소인 Q6와 QM6는 강성과잉현상을 보이지는 않으나 응력값에서 혼합 유한요소에 비해 해의 정확성이 떨어지는 것으로 나타났다. NQ10의 결과는 가상 일원리를 이용한 요소로는 변위 및 응력값에서 가장 좋은 것으로 나타났다으나 비적합 변위의 차원이 10이고 최고 차항이 3차까지 설정되어 있으므로 정축약법에 의한 강성행렬 구성이 복잡하여 비효율적이며 비적합 변위

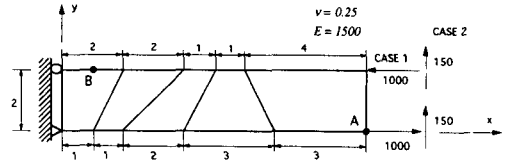


Fig. 1 Straight beam test by using distorted plane stress mesh

Table 1 Comparison of plane stress solution by different quadrilateral elements

Elemets	Case 1		Case 2	
	ν_A	σ_{xB}	ν_A	σ_{xB}
Q4	47.5	-1761	50.7	-2448
Q6	98.4	-2527.5	100.4	-3354.6
QM6	96	-2511	97.9	-3388
Qc6	96.07	-2438.9	98.12	-3338.9
NQ10	96.	-2986	97.9	-4021
5 β -II	96.18	-3014	98.19	-4137
ISO	96.18	-3014	98.19	-4137
IAS	98.45	-3002	100.54	-4158
Exact sol.	100.00	-3000	102.625	-4080

의 3차 다항식을 포함하는 항이 영에너지 모드를 포함하는 것으로 알려져 있다. 고전적 혼합변분방법을 수정하여 역행렬의 크기를 5에서 2로 줄인 ISO는 고전적인 혼합변분원리에 의해 정식화된 5 β -II와 같은 거동을 보여 수정된 변분법과 고전적인 혼합변분방법과의 등치관계를 입증하고 있다. 비적합 변위를 요소의 강성행렬 구성에서 고려한 IAS는 변형에 가장 정확한 값을 나타내고 있으며 이는 비적합 함수가 굽힘에 대한 요소의 거동에 반영됨을 보여주고 있다. IAS는 응력값에서도 가상 응력장을 갖는 다른 혼합요소보다 정확한 결과를 보이는데 이는 혼합요소에서 일반적으로 쓰이는 독립적 응력장이 변형률장으로 대체된다 하더라도 응력값에 대한 결과가 손상되지 않음을 보여준다.

5.2 수치예 2

Fig. 2는 끝단에서 전단하중을 받고 있는 두꺼운 원형 보를 나타내고 있으며 각 점에서의 변형과 응

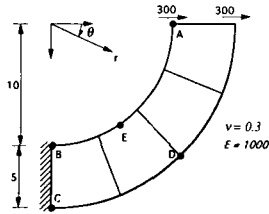


Fig. 2 An example of clamped circular beam under end shear load

Table 2 An example of clamped circular beam under end shear load

Elements	u_A	σ_{xB}	σ_{xC}	$\sigma_{\theta D}$	$\sigma_{\theta E}$
Q4	58.32	1773	-840.7	-629	1336
Q6	62.75	1545	-941.8	-694	1400
QM6	82.67	1783	-1320.0	-991	1643
NQ10	84.66	1781	-1509.0	-1097	1566
ISO	85.24	1753	-1484.9	-1088.2	1580
IAS	87.17	1789	-1553.1	-1113.3	1595
Exact sol.	90.41	2214	-1476.0	-1044	1230

력에 대한 결과를 여러 다른 요소의 결과⁽²¹⁾와 함께 Table 2에 수록하였다. 결과에서 Q4는 이 경우에도 강성과잉현상을 나타내고 있으며, 특이할 만한 사실은 이 문제의 경우 Q6의 결과가 QM6에 비하여 현저하게 떨어지고 있는 사실이다. 이는 원형보의 경우, 요소의 경계에서 비적합 변위의 영향이 소거되지 않는 Q6는 요소의 경계에서의 비적합 변위로 인하여 해의 손상을 받는 것으로 추측된다. 굽힘에 대한 변형값에서는 IAS가 가장 정확한 값을 나타내고 있다. 응력 최적화기법을 사용한 ISO는 전체적으로 응력값에서 좋은 거동을 나타내고 있다.

5.3 수치예 3, 4

Figs. 3, 4와 Tables 3, 4는 끝단에서 전단하중을 받는 평면변형률 상태의 보문제에 대하여 일정한 형태의 요소들(수치예 3)과 일정 각도로 기울어진 형태의 요소에 의하여 보의 윗쪽 단면만을 해석한 결과⁽⁷⁾로, 재료의 압축성($\nu=0.25$)의 경우와 비압축성($\nu=0.4999$)의 경우를 모두 고려한 결과이다. 변형에 대하여 압축성 혹은 비압축성에 관계없이

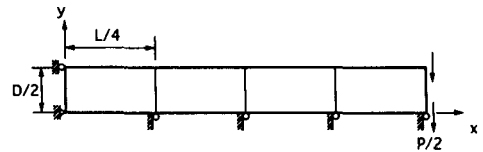


Fig. 3 Cantilever beam regular meshes with end shear load

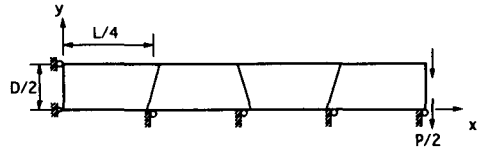


Fig. 4 Cantilever beam skewed meshes with end shear load

Table 3 Tip-deflection ratio for the antisymmetric beam mesh

Elements	$\nu=0.25$	$\nu=0.4999$
Q4	0.715	0.0613
Q6	0.989	0.989
QBI	0.989	0.989
SRI	0.924	0.800
ISO	0.989	0.990
IAS	0.989	0.990
Exact	1.000	1.000

Table 4 Tip-deflection ratio for the antisymmetric skewed beam mesh

Elements	$\nu=0.25$	$\nu=0.4999$
Q4	0.696	0.0614
Q6	0.957	0.965
QBI	0.950	0.959
SRI	0.778	0.902
ISO	0.986	0.980
IAS	0.987	0.984
Exact	1.000	1.000

ISO와 ISA는 다른 요소들에 비하여 우수한 결과를 보이고 있으며, 이는 이들 요소가 비압축성 재료에 대하여 강성과잉현상을 보이지 않음을 의미한다

다. 이 때, 사용된 물리량은 $D=12$ in, $L=48$ in, $P=40$ kips, $\theta=4.764^\circ$ 이다. Table 3의 규칙적 메쉬에 의한 굽힘해석에서 Q4는 비압축성 재료에 대하여 해의 정확성이 현저하게 떨어지고 있으며 Q4를 선택적으로 감차적분한 SRI는 비압축성에 대한 강성과잉현상이 제거되지만 정확도는 다른 비적합 요소에 비하여 떨어지는 것으로 나타났다. Fig. 4의 사다리꼴형 메쉬에 대하여 Table 4에 나타난 바와 같이 ISO와 IAS는 다른 요소에 비하여 요소형상의 찌그러짐에 대해서도 크게 영향을 받지 않는 것으로 나타났다.

5.4 수치예 5

Table 5는 Fig. 5는 얇은 링에 대칭의 하중이 가해지는 문제에 대하여, 링의 1/4로 대칭형 경계조건을 사용하여 해석한 결과이다. 8개의 균등한 요

Table 5 Result for ring test

Elements	Tip-deflection ratio
Q4	0.363
SRI	0.458
QBI	0.984
ISO	0.984
IAS	0.989
Exact	1.000

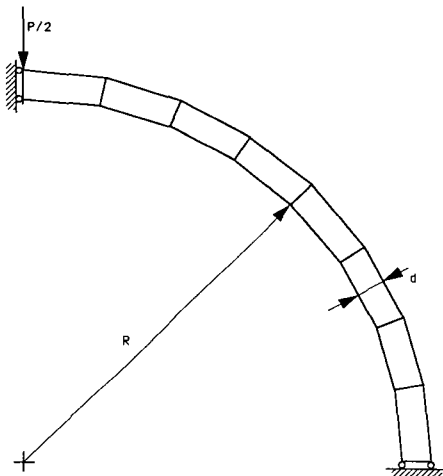


Fig. 5 One quadrant of the thin ring subjected to equal and opposite diametral forces

소로 링을 분할하였으며 이때, $E=10^7$ psi, 반경 $R=10$ in, 길이 $d=20$ lbf, Poisson비는 0.25로 하였다. 위의 문제에 대한 해석하는 참고문헌⁽²²⁾에 수록되어 있다. 결과에서 SRI는 링의 굽힘문제에 대하여 Q4 크게 개선된 결과를 보이지는 않고 있다. IAS는 가장 정확한 값을 나타내고 있다.

6. 결 론

본 연구는 비적합 변위의 도입과 다변수 변분해법에 의해 2차원 평면응력 및 변형률요소를 개발하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 본 연구에 의한 유한요소의 정식화 과정에서 비적합 변위의 도입은 2차원 보의 굽힘문제에서 전통변위요소에서 발생하는 과잉강성현상을 제거할 수 있으며, 비압축성 재료에서의 해석에서도 해를 손상시키지 않는다.

(2) 직교성을 갖는 hourglass 벡터에 의한 적합 변위와 수정된 응력장 혹은 변형률장을 사용한 다변수 유한요소의 정식화는 역행렬의 크기가 줄어들 효율적일 뿐만 아니라 기존의 다변수 요소의 정식화와 동일한 결과를 나타낸다.

(3) 일정 변형률조건을 만족하는 비적합 변위는 요소의 수렴성을 높이며 일정응력 패치테스트를 통과한다.

(4) 비적합 변위와 독립적인 변형률의 보간함수를 사용한 변분해법에 의해 개발된 요소는 변형뿐만 아니라 응력값에서도 높은 정확성을 갖는다.

후 기

본 연구는 터보·동력기계 연구센터의 지원으로 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

(1) Wilson, E. L., Taylor, R. L., Doherty W. P. and Ghaboussi, J., 1973, "Incompatible Displacement Models," in ; Fenves S. J., et al., eds, *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Academic Press, New York.
 (2) Taylor, R. L., Beresford, P. J. and Wilson, E. L., 1976, "A Non-conforming Element for Stress Analysis," *Int. J. Numer. Meth. & Engng.*, Vol.

- 10, pp. 1211~1219.
- (3) Hughes, T. J. R., 1977, "Equivalence of Finite Elements for Nearly Incompressible Elasticity," *J. Appl. Mech.*, Vol. 44, pp. 181~183.
- (4) Malkus, D. S. and Hughes, T. J. R., 1978, "Mixed Finite Element Method Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. 15, pp. 63~81.
- (5) Pian, T. H. H., 1964, "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions," *AIAA J.*, Vol. 2, pp. 1333~1336.
- (6) Pian, T. H. H. and Wu, C. C., 1988, "Rational Approach for Choosing Stress Terms for Hybrid Finite Element Formulations," *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, Vol. 26, pp. 2331~2343.
- (7) Belytschko, T. and Bachrach, W. E., 1986, "Efficient Implementation of Quadrilaterals with High Coarse-Mesh Accuracy," *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 54, pp. 279~301.
- (8) Herrmann L. R., 1965, "Elasticity Equation for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by Variational Theorem," *AIAA J.*, Vol. 3, pp. 1896~1900.
- (9) Simo, J. C., Taylor, R. L. and Pister, K. C., "Variational and Projection Methods for Volume Constraint in Finite Deformation Elastoplasticity," *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 51, pp. 177~208.
- (10) Strang, G. and Fix, G. J., 1973, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- (11) Liu, W. K., Ong, J. S. J. and Uras, R. A., 1985, "Finite Element Stabilization Matrices — A Unification Approach," *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 53, No. 3, pp. 13~46.
- (12) Belytschko, T., Ong, J. S. J., Liu, W. K. and Kennedy, J. M., 1984, "Hourglass Control in Linear and Nonlinear Problems," *Comp. Meths. Appl. Eng.*, Vol. 43, pp. 251~276.
- (13) Kosloff, D. and Frazier, G. A., 1978, "Treatment of Hourglass Pattern in Low Order Finite Element Codes," *Int. J. Numer. Analyt. Meths. Geomech.*, Vol. 2, pp. 57~72.
- (14) Bachrach, W. E., Belytschko, T., 1986, "Axisymmetric Element with High Coarse-mesh Accuracy," *Comput & Struct.*, Vol. 23, pp. 323~331.
- (15) Spilker, R. L., 1981, "Improved Hybrid-stress Axisymmetric Element Including Behavior for Neary Incompressible Material," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 17, pp. 483~501.
- (16) Pian, T. H. H. and Sumihara, K., 1984, "Rational Approach for Assumed Stress Finite Elements," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 20, pp. 1685~1695.
- (17) Spilker, R. L. and Munir, N. I., 1980, "The Hybrid-stress Model Thin Plates," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 15, pp. 1239~1260.
- (18) Spilker, R. L., Masker, S. M. and Kania, E., 1981, "Plane Isoparametric Hybrid Elements: Invariance and Optimal Sampling," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 17, pp. 1469~1496.
- (19) Enggelmann, B. E., Whirley, R. G. and Goudreau, G. L., 1989, "A Simple Element Formulatioonn for Large-scale Elastoplastic Analysis," *Analytical and Computational Models of Shells*, CED-Vol. 3, pp. 399~416.
- (20) Chen, W. and Tang, L., 1981, "Isoparametric Quasi-Conforming Element," (*In Chinese*), *J. Dalian Inst. Technol.*, Vol. 20., pp. 63~74.
- (21) Wu, C. C., Huang, M. G. and Pian, T. H. H., 1987, "Consistency Condition and Convergence Criteria of Incompatible Elements: General Formulation of Incompatible Functions and Its Application," *Comput. & Struct.*, Vol.27, pp. 639~644.
- (22) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M., 1961, *Theory of Elastic Stability*, Mcgraw-Hill, New-York.
- (23) Hughes, T. J. R., 1980, "Generalization of Selective Integration Procedures to Anisotropic and Nonlinear Media," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 15, pp. 1413~1418.
- (24) Wu, C. C., 1991, "Numerical Stability and Constitution Anaysis of λ -type Incompatible Elements," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 31, pp. 1669~1682.