

〈論 文〉

## 가우스 적분점을 수정한 2차원 6-절점 요소 및 3차원 16-절점 요소에 의한 자유진동해석

김정운\* · 경진호\*\* · 권영두\*\*\*

(1994년 5월 12일 접수)

### The Free Vibration Analyses by Using Two Dimensional 6-Node Element and Three Dimensional 16-Node Element with Modification of Gauss Sampling Point

Jeong-Oun Kim, Jin-Ho Kyung and Young-Doo Kwon

**Key Words** : Relative Stiffness Stiffening Phenomena (상대적 강성과잉현상) Modified Gauss Integration Point (수정 가우스 적분점), 6-Node Element (6-절점 요소), 16-Node Element (16-절점 요소), Free Vibration (자유진동), Multi-Layered Beam (다층보), Multi-Layered Plate (다층판)

#### Abstract

We propose a modified 6-node element, where the sampling point of Gauss quadrature moved in the thickness direction. The modified 6-node element has been applied to static problems and forced motion analyses.<sup>(9)</sup> In this study, this method is extended to the finite element analysis of the natural frequencies of two dimensional problems. We also propose a modified 16-node element for three dimensional problems, which behaves much like a 20-node element with smaller degree of freedom. The modified 6-node and 16-node elements have been applied to the modal analyses of beams and plates, respectively. The results agree well with the results of the 8-node or 20-node element models.

#### 1. 서 론

굽힘 문제의 유한요소해석에 있어서, 2차원인 경우는 8-절점 요소가, 3차원인 경우는 20-절점 요소가 사용될 수 있다.<sup>(1)</sup> 그러나 이러한 요소들은 자유도가 크기 때문에 널리 사용되지는 않는다. 반면에 보요소, 판요소 및 셸요소 등과 같은 많은 구조 요소들이 매우 광범위하게 사용되고 있다.<sup>(2~4)</sup>

이러한 구조 요소들은 길이에 대한 두께의 비가

작을 때 강성과잉현상을 나타내며, 강성과잉현상을 줄이기 위하여 특별한 수정방법이 제안되었다.<sup>(5,6)</sup> 이와 같은 요소들은 보강재의 두꺼운 부분에 사용되는 고체 요소와의 연결이 불편하며, 회전 자유도라는 비 벡터량을 포함하고 있다. 이와 같이 자유도에 비 벡터량이 포함되어 있기 때문에, 비선형 해석에 있어서는 하나의 하중 증분 내에서 선형화된 많은 적분 단계가 요구된다. 만일 선형화 단계의 수가 충분하지 않으면 평형 반복 계산에 의해서도 제거되지 않는 오차가 축적된다. 그래서 여러 가지 개선된 방법들이 제시되었으나 문제점이 완전히 해결되지는 않고 있다.<sup>(7,8)</sup>

이와 같은 문제들을 고려하여 2차원인 경우는

\*정회원, 국방과학연구소

\*\*정회원, 한국기계연구원

\*\*\*정회원, 경북대학교 기계공학과



식(1)에서 각층의 푸아송비와  $s_{jk}$ 에 관계되는  $Y$  방향으로의 부적합한 하중이 나타남을 알 수 있다. 이러한 이유는 절점 7과 8을 부당하게  $Y$  방향으로 고정시킴으로써 나타난 것이다. 그래서 절점 7과 8을  $U=U_7=-U_8$ 와  $V=V_7=V_8$ 로 구속을 해제시킨다. 이렇게 수정된 변위벡터를  $\{U\}'_8$ 라 하고, 이때의 작은 변위  $U$ 를 무시하면 수정된 등가절점력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{F\}'_8 &= \int_{0^v} [B_{L0}]_8^T [D] [B_{L0}]_8 \{U\}'_8 d^0 V \\ &= \sum_{k=1}^{NL} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [B_{L0}]_8^T [D] [B_{L0}]_8 \{U\}'_8 {}^0 J W_i W_j b_k \frac{h_k}{h} \\ &= \sum_{k=1}^{NL} \sum_{i=1}^N \frac{{}^0 J W_j b_k E_k \theta}{2(1-\nu_k^2)} \frac{h_k}{h} \begin{bmatrix} s_{jk}^2 (\theta - 2\nu_k V) \\ 2s_{jk}^2 (\nu_k \theta - 2V) \\ -s_{jk}^2 (\theta - 2\nu_k V) \\ 2s_{jk}^2 (\nu_k \theta - 2V) \\ s_{jk}^2 (\theta - 2\nu_k V) \\ 2s_{jk}^2 (\nu_k \theta - 2V) \\ -s_{jk}^2 (\theta - 2\nu_k V) \\ 2s_{jk}^2 (\nu_k \theta - 2V) \\ 0 \\ 2s_{jk}^2 (\nu_k \theta - 2V) \\ 0 \\ -4s_{jk}^2 (\nu_k \theta - 2V) \\ 0 \\ -2s_{jk}^2 (\nu_k \theta - 2V) \\ 0 \\ -4s_{jk}^2 (\nu_k \theta - 2V) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

위의 식에서  $Y$ 방향의 절점력이 0이 되기 위해, 변위  $V$ 는 다음식의 관계를 만족하여야 한다.

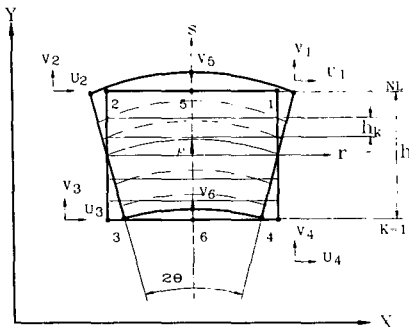


Fig. 2 Deformed configuration of 6-node element laminated beam in pure bending

$$V = \frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^{NL} \left( \frac{E_k b_k h_k \nu_k}{1 - \nu_k^2} \right) / \sum_{k=1}^{NL} \left( \frac{E_k b_k h_k}{1 - \nu_k^2} \right) \quad (3)$$

식(3)의  $V$ 를 식(2)에 다시 대입하여 정리하면, 등방성 다층 평면요소의 순수굽힘변형에 대응하는 등가 절점력  $\{F\}'_8$ 는 식(4)와 같이 된다.

$$\{F\}'_8 = \sum_{k=1}^{NL} \sum_{i=1}^N \frac{{}^0 J W_j b_k E_k \theta}{2(1-\nu_k^2)} \frac{h_k}{h} \begin{bmatrix} s_{jk}^2 (1-\nu_k^2) \\ 0 \\ -s_{jk}^2 (1-\nu_k^2) \\ 0 \\ s_{jk}^2 (1-\nu_k^2) \\ 0 \\ -s_{jk}^2 (1-\nu_k^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

그리고 Fig. 2와 같이 순수굽힘상태에 있는 층수가  $NL$ 인 2차원 6-절점 요소의 등가 절점력  $\{F\}'_6$ 는 다음과 같다.

$$\{F\}'_6 = \int_{0^v} [B_{L0}]_6^T [D] [B_{L0}]_6 \{U\}'_6 d^0 V = \sum_{k=1}^{NL} \sum_{i=1}^N \frac{{}^0 J W_j b_k E_k \theta}{2(1-\nu_k^2)} \frac{h_k}{h} \begin{bmatrix} s_{jk}^2 \\ 0 \\ -s_{jk}^2 \\ 0 \\ s_{jk}^2 \\ 0 \\ -s_{jk}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

굽힘이 일어나는 동일한 형상에 대해서 6-절점 요소와 8-절점 요소의 등가 절점력이 식(6)의 관계를 만족할 때 6-절점 요소와 8-절점 요소의 변형에너지는 등가 관계를 만족한다.

$$\{F\}'_6 = \{F\}'_8 \quad (6)$$

여기서,  $\{F\}'_6$ 는  $\{F\}'_8$ 의 차원으로 확장된  $\{F\}'_6$ 를 의미한다. 식(6)과 같은 힘의 평형관계로부터, 6-절점 요소에서 임의의  $K$ 층의 두께방향으로의 가우스 적분점 위치  $S_{6JK}$ 가 8-절점 요소에서의 가우스 적분점 위치  $S_{8JK}$ 와 식(7)을 만족하면, 유한요소의 절점력의 등가 관계가 성립될 수 있다.

$$S_{6JK} = S_{8JK} (1 - \nu_K^2)^{1/2} \quad (7)$$

식(7)은 8-절점 요소에 대한 6-절점 요소의 두께방향으로의 가우스 적분점 수정식이다. 이 때  $S_{JK}$ 를 수정하지 않고  $E_K$ 를 수정할 수도 있으나, 이는 인장문제 또는 인장-굽힘문제에서 길이 방향의 변위 또는 강성을 옳지않게 평가하게 된다. 그리고 평면변형률 상태에 있는 보에서의 가우스 적분점 수정식은 식(7)의 푸아송비를 수정함으로써 식(8)과 같이 구할 수 있다.

$$S_{6JK} = S_{8JK} \left\{ 1 - \left( \frac{\nu_K}{1 - \nu_K} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (8)$$

2.2 3차원 16-절점 요소의 가우스 적분점 수정식  
 등방성 3차원 판의 굽힘변형 특성은 평면응력 상태와 평면변형률 상태 두가지의 극단적인 경우의 사이에 위치하나, 실제 여러 가지 수치계산을 통하여 평면응력 상태에 매우 근접함을 알 수 있다. 이러한 관점으로부터 3차원 판에 대한 16-절점 요소 사용시, 20-절점 요소에 대한 두께방향으로의 가우스 적분점 수정식은 다음과 같다.

$$t_{(16),JK} = t_{(20),JK} (1 - \nu_K^2)^{1/2} \quad (9)$$

여기서,  $t_{(16),JK}$ 는 16-절점 요소의  $K$ 번째 층의 두께방향의 가우스 적분점 위치를 나타내며,  $t_{(20),JK}$ 은 20-절점 요소의  $K$ 번째 층의 가우스 적분점의 위치를 나타낸다.

한편, 식(9)가 판의 굽힘강성 수정에 대해서는 매우 효과적이거나, 비틀림 강성에 대해서는  $(1 - \nu_K^2)$  factor의 원치않는 저평가를 하게 되므로, inplane 전단 탄성계수를 식(10)과 같이 수정함으로써 원래의 비틀림 강성을 회복하게 하며, 이 문제를 해결하였다.

$$G_{(16)12K} = G_{(20)12K} / (1 - \nu_K^2) \quad (10)$$

여기서,  $G_{(20)12K}$ 는 20-절점 요소에서의  $K$ 번째 층의 1-2 평면상의 전단 탄성계수이고,  $G_{(16)12K}$ 는

16-절점 요소에서의 전단 탄성계수이다.

### 3. 모드해석

비감쇠 자유진동시의 운동방정식을 구하면 식(11)과 같다.

$$[M]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{0\} \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned} [K] &= [K_{Lo}] \\ &= \sum_{k=1}^{N_L} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_{Lo}]_k [D]_k [B_{Lo}]_k^T \frac{h_k}{h} dr ds dt \\ &= \sum_{k=1}^{N_L} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N [B_{Lo}]_k [D]_k [B_{Lo}]_k^T J W_i W_j W_k b_k \frac{h_k}{h} \end{aligned} \quad (12)$$

$\{U\} = e^{i\omega t}$ 라 두고 식(10)을 다시 정리하면 다음과 같은 고유치 문제가 된다.

$$\begin{aligned} \omega^2 [M]\{\Psi\} &= [K]\{\Psi\} \\ \lambda [M]\{\Psi\} &= [K]\{\Psi\} \end{aligned} \quad (13)$$

식(12)를 subspace iteration method<sup>(15)</sup> 및 generalized Jacobi method<sup>(15)</sup>를 사용하여 고유진동수와 모드형상 벡터를 구한다.

### 4. 계산 예 및 실험

수치계산은 먼저 8-절점 요소를 사용하여 보의 모드해석을 하고, 이를 실험결과 및 이론치<sup>(16)</sup>와 함께 비교함으로써 8-절점 요소의 보문제에 대한 적용시의 정확성을 확인하였다. 그리고 20-절점 요소를 사용하여 판의 모드해석을 하고, 또한 이를 실험결과 및 이론치<sup>(16)</sup>와 함께 비교하여 20-절점 요소의 판 문제에 대한 적용시의 정확성을 확인하였다.

한편 가우스 적분점 수정식의 타당성을 검증하기 위하여 경계조건이 완전 자유상태인 보의 고유진동 해석을 8-절점 요소, 6-절점 요소 및 수정 6-절점 요소를 사용하여 수행하고, 각 결과들을 비교하였다. 또한 판문제에 대한 수정식의 타당성을 검증하기 위하여 판의 고유진동해석을 20-절점 요소, 16-절점 요소 및 수정 16-절점 요소를 사용하여 수행, 비교하였다.

끝으로 적층보 및 적층판에 대한 수정식의 타당성을 검증하기 위해 3층으로 적층된 샌드위치 보

및 샌드위치 판을 모델로 하여, 각각 8-절점 요소, 6-절점 요소, 수정 6-절점 요소와 20-절점 요소, 16-절점 요소 및 수정된 16-절점 요소들을 이용하여 수치해석을 수행하였다.

4.1 8-절점 요소를 이용한 단층보의 자유진동 해석 및 실험

양단이 자유상태에 있는 단층보의 8-절점 요소 모델과 시험편의 형상을 Fig. 3에 나타내었다. Fig. 3의 시험편의 재질은 KS D 3512의 SCP1-T-S-B이며, 이 형상을 6개의 8-절점 요소로 등분할하여 자유진동해석을 하였으며, 강성행렬 계산에 있어서 가우스 르장드르 적분차수는 2×2를 사용하였다. 그리고 해석결과를 검증하기 위하여 고유 진동수를 실측하였다.

시험편은 주변의 경계조건이 완전 자유상태가 되도록 시험편의 양 끝단에서 안쪽으로 약 30 mm 정도를 세션 고무줄 위에 걸쳐 놓았다. 그리고 집중 질량의 첨가로 인한 응답의 오차를 줄이기 위하여 질량이 작은 가속도계(ENDEVCO 222C)를 밀납으로 시험편에 부착하였다. 실험은 충격해머(PCB 086B05)로 시험편에 충격을 준 다음, 그 응답을 FFT 주파수 분석기(AD3525)로 분석하였다.

Table 1에 8-절점 요소의 해석결과, 이론치 및 실험치를 함께 비교하였다. 실험결과와 해석결과가 대체로 잘 일치한다고 할 수 있다.

4.2 20-절점 요소를 이용한 단층보의 자유진동 해석 및 실험

4변이 완전 자유상태인 단층보에 대한 20-절점 요소를 이용한 3차원 유한요소 모델과 시험편의 치수를 Fig. 4에 나타내었으며, 이 모델에 대하여 자유진동해석을 하였다. 자유진동해석시 가우스 르장드르 적분차수는 3×3를 사용하였다. 그리고 해석

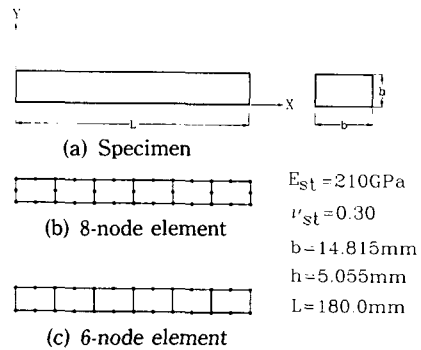


Fig. 3 Two dimensional geometry, material properties and finite element models of beam with free-free boundary condition

결과와 비교하기 위하여 고유 진동수를 실측하였다. 실험에 사용된 시험편의 재질은 단층보의 경우와 같이 KS D 3512의 SCP1-T-S-B이다.

시험편은 주변의 경계조건이 완전 자유상태가 되도록 시험편의 양 끝단에서 안쪽으로 약 30 mm 정도를 세션 고무줄 위에 걸쳐 놓는 방법과 나일론 세션으로 매다는 방법 두가지로 하였다. 보의 실험에서와 동일한 가속도계(ENDEVCO 222C)를 밀납으로 시험편에 부착하였다. 실험은 충격해머(PCB 086B05)로 시험편에 충격을 준 다음 그 응답을 FFT 주파수 분석기(AD3525)로 분석하였다. 실험 결과 시험편의 지지상태에 따른 두가지 방법에서는 같은 특성을 보였다. 실험결과와 20-절점 요소의 해석결과를 이론치와 함께 Table 2에 나타내었으며, 이 두가지의 결과는 4번째 모드의 결과를 제외하고는 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

4.3 수정된 6-절점 요소를 이용한 단층보의 자유진동해석

6-절점 요소에서의 가우스 적분점 수정의 효율성

Table 1 Comparison of theoretical natural frequencies, experimental ones, and those of 8-nodes element of beam with free-free boundary condition

Mode number	Theoretical frequency, Hz	Experimental frequency, Hz	8-Node frequency, Hz	% error
1st mode	815.5	827.5	828.1	0.07
2nd mode	2248.0	2275.0	2286.8	0.52
3rd mode	4407.0	4425.0	4541.5	2.63

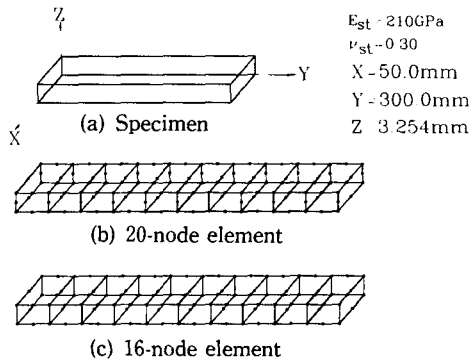


Fig. 4 Three dimensional geometry, material properties and finite element models of plate with all-free boundary condition

을 검증하기 위하여 양단이 자유상태에 있는 단층보를 2차원 6-절점 요소로 Fig. 3(c)와 같이 분할하였다. 유한요소는 8-절점 요소의 해석에서와 같이 6개의 요소로 등분할하였으며, 가우스 르장드르 적분차수도 2×2를 사용하였다. 6-절점 요소의 해석결과를 Table 3에서 8-절점 요소의 해석결과와

비교하였다. 계산결과를 보면 가우스 적분점을 수정한 경우가 수정하지 않는 경우보다 8절점 요소의 해석결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

#### 4.4 수정된 16-절점 요소를 이용한 단층판의 자유진동해석

단층판의 경우에 있어서 가우스 적분점 수정의 효율성을 검증하기 위하여 20-절점 요소와 16-절점 요소를 사용하여 Fig. 4(c)와 같이 각각 10개의 요소로 등분할하여, 자유진동해석을 하였다. 이 때의 가우스 르장드르 적분차수는 3×3를 사용하였다. 16-절점 모델과 수정된 16-절점 모델에 의한 계산결과를 Table 4에서 20-절점 요소를 사용한 경우의 해석 결과와 비교하였다.

단층판의 경우 16-절점을 사용할 때, 가우스 적분점만을 수정한 경우 즉 식(9)를 적용할 경우는 굽힘모드의 고유 진동수는 잘 일치하나 비틀림에 의한 고유 진동수는 오차가 크게 나타났다. 이 때 가우스 적분점 수정에 기인한 비틀림 강성의 저평가를 보정하는 식(10)을 식(9)와 동시에 적용하면

Table 2 Comparison of theoretical natural frequencies, experimental ones, and those of 20-nodes element of plate with all-free boundary condition

Mode number	Theoretical frequency, Hz	Experimental frequency, Hz	20-Node frequency, Hz	% error
1st mode	189.1	192.5	193.6	0.57
2nd mode	521.4	532.5	544.7	2.29
3rd mode (torsional)	-	705.0	697.6	1.05
4th mode	1022.2	1045.0	1102.1	5.46
5th mode (torsional)	-	1430.0	1424.0	0.42

Table 3 Comparison of the results of modified 6-node and unmodified 6-node models with the results of 8-node model of beam

Mode number	8-Node Hz	Unmodified 6-node Hz(% error)	Modified 6-node Hz(% error)
1st mode	828.1	868.0(4.82)	828.2(0.01)
2nd mode	2286.8	2395.9(4.77)	2287.1(0.01)
3rd mode	4541.5	4751.9(4.63)	4539.2(0.05)
4th mode	7762.4	8097.7(4.32)	7742.5(0.25)

**Table 4** Comparison of the results of modified 16-node and unmodified 16-node models with the results of 20-node model of plate

Mode number	20-Node Hz	Unmodified 16-Node Hz (% error)	Modified 16-Node* <sup>1</sup> Hz (% error)	Modified 16-Node* <sup>2</sup> Hz (% error)
1st mode	193.6	203.2 (4.96)	193.9 (0.15)	193.9 (0.15)
2nd mode	544.7	573.7 (5.32)	547.7 (0.55)	548.4 (0.68)
3rd mode (torsional)	697.6	698.5 (0.13)	666.6 (4.44)	698.4 (0.11)
4th mode	1102.1	1165.6 (5.76)	1113.6 (1.04)	1116.0 (1.26)
5th mode (torsional)	1424.0	1430.8 (0.48)	1365.6 (4.10)	1428.0 (0.28)

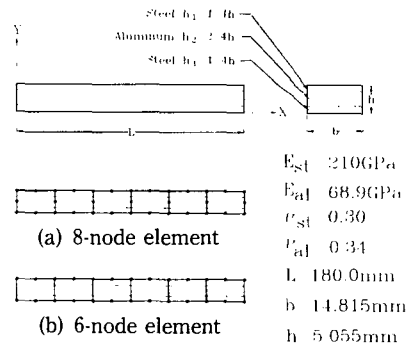
\*1 : The results by using Eq.(9)

\*2 : The results by using Eq.(9) and Eq.(10)

굽힘 모드와 비틀림 모드를 동시에 만족함을 알 수 있다.

#### 4.5 수정된 6-절점 요소를 이용한 적층보의 자유진동해석

적층보에 대한 가우스 적분점 수정식의 타당성을 밝히기 위해 Fig. 5와 같이 강과 알루미늄으로 적층된 샌드위치 보에 대하여 8-절점 요소와 6-절점 요소로 모델링하여 자유진동해석을 하였다. 각층간의 재료상수의 차이에 기인한 stress jump (inplane force의 변화)는 B matrix (strain-displacement matrix)의 평가시, 한 요소이나 각층에서 각각 sampling을 함으로써 적절히 고려가 되고 있다. 가우스 적분점 수정을 적용한 결과와 적용하지 않은 해석결과를 8-절점 요소의 같은 해석결과와 이

**Fig. 5** Two dimensional geometry, material properties and finite element models of three layer beam with free-free boundary condition (steel/aluminum/steel laminated beam)**Table 5** Comparison of the results of modified 6-node and unmodified 6-node models with theoretical natural frequencies and the results of 8-node model of three layer beam with free-free boundary condition (steel/aluminum/steel laminated beam)

Mode number	Theoretical frequency Hz	8-Node Hz	Unmodified 6-Node Hz (% error)	Modified 6-Node Hz (% error)
1st mode	956.6	978.3	1022.0 (4.5)	977.8 (0.0)
2nd mode	2636.9	2756.8	2871.0 (4.1)	2750.6 (0.3)
3rd mode	5169.3	5616.9	5817.9 (3.6)	5584.8 (0.6)
4th mode	8545.2	9865.7	10136.7 (2.8)	9755.9 (1.1)

본치를 함께 Table 5에 나타내었다. Table 5에서 보는 바와 같이 적층보에서도 가우스 적분점을 수정한 경우의 해석결과가 수정하지 않은 해석의 결과 보다 8 절점 요소의 해석결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

4.6 수정된 16-절점 요소를 이용한 적층판의 자유진동 해석

적층판에 대한 가우스 적분점 수정식의 타당성을 밝히기 위해 Fig. 6과 같은 샌드위치 판에 대하여, 강으로만 적층된 경우와 강과 알루미늄으로 적층된 경우에 대하여 20-절점 요소와 16-절점 요소로 모

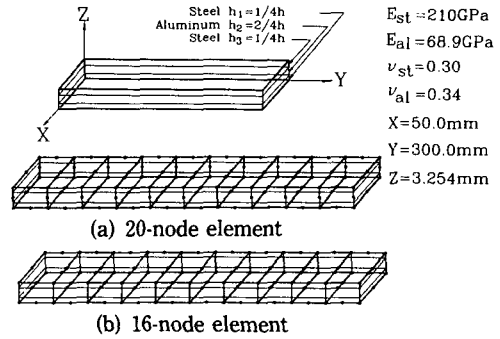


Fig. 6 Three dimensional geometry, material properties and finite element models of three layer plate with all-free boundary condition (steel/aluminum/steel laminated)

Table 6 Comparison of the results of modified 16-node and unmodified 16-node models with the results of 20-node model of three layer plate with all free boundary condition (steel/aluminum/steel laminated)

Mode number	Theoretical frequency Hz	20-Node Hz	Unmodified 16-Node Hz (% error)	Modified 16-Node Hz (% error) *1
1st mode	225.4	226.8	237.5 (4.67)	227.1 (0.13)
2nd mode	621.2	636.7	668.5 (5.00)	640.1 (0.53)
3rd mode (torsional)		818.4	819.3 (0.11)	819.0 (0.07)
4th mode	1217.9	1263.3	1352.7 (5.41)	1296.3 (1.01)
5th mode (torsional)	-	1669.6	1676.8 (0.43)	1673.4 (0.23)

\* 1 : The results by using Eq.(9) and Eq.(10)

Table 7 Comparison of the results of modified 16-node and unmodified 16-node models with the results of 20-node model of three layer plate with all free boundary condition (steel/steel/steel laminated)

Mode Number	Theoretical frequency Hz	20-Node Hz *1	Unmodified 16-Node Hz (% error) *1	Modified 16-Node Hz (% error) *1	Modified 16-Node Hz (% error) *2
1st mode	192.2	193.4	202.3 (4.65)	193.3 (0.05)	193.6 (0.10)
2nd mode	529.7	543.8	570.6 (4.98)	545.6 (0.33)	544.4 (0.11)
3rd mode (torsional)	-	699.6	700.4 (0.11)	700.1 (0.07)	726.3 (3.81)
4th mode	1038.5	1098.4	1157.4 (5.37)	1107.5 (0.83)	1098.6 (0.02)
5th mode (torsional)	-	1427.6	1433.7 (0.43)	1430.6 (0.21)	1480.3 (3.69)

\* 1 : The results of 1x10 elements models

\* 2 : The results of 3x10 elements models



델링하여 자유진동해석을 하였다. 16-절점 모델과 수정된 16-절점 모델에 의한 해석결과와 20-절점 모델의 결과 이론치와 함께 Table 6, Table 7에 나타내었다. Tables 6, 7에서 보면 가우스 적분점을 수정한 경우의 해석결과가 수정하지 않은 해석의 결과 보다 20-절점 요소의 해석결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 또한 단층판의 경우와 마찬가지로 식(9)와 식(10)을 동시에 적용하는 경우가 매우 효과적임을 알 수 있다. 그리고 16-절점요소는 굽힘강성을 크게 평가하나 비틀림 강성은 20-절점 요소에 유사하게 평가하고, 수정식(9)에 의해 굽힘강성을 교정하는 과정에서 비틀림 강성이 작게 평가 되며, 이를 수정식(10)에 의해 환원한다고 말할 수 있다. 그리고 중앙부에 다른 재질 특히 질량 감소 효과가 큰 재질로 샌드위치된 적층판의 경우는 고유 진동수가 크게 나타났으나(Table 6), 동일한 재질로 적층된 판의 고유 진동수(유한요소도 층별로 분할)는 단층판의 고유 진동수와 유사하게 나타났다.(Table 7)

## 5. 결 론

2차원 8-절점 요소와 6-절점 요소의 굽힘변형 에너지에 대한 등가관계로부터 6-절점 요소에서 두께 방향으로의 가우스 적분점 수정식을 유도하였으며, 이를 단층보와 다층보의 모드해석에 적용한 결과 수정식의 효율성을 확인하였다. 그리고 이 수정식을 3차원 요소로 확장하여 가우스 적분점 수정식을 구하였으며, 적분점 수정으로 인한 판의 비틀림 모드에서의 오차를 수정하기 위하여 횡탄성계수의 수정식을 구하였다. 이러한 수정식들을 16-절점 요소로 분할된 사용하는 단층판과 다층판의 모드해석에 적용하여 그 효율성을 확인하였다. 수정된 6-절점 요소와 16-절점 요소는 8-절점 또는 20-절점 요소에 비해 자유도 수를 줄일 수 있으며, 단층보, 다층보, 단층판 및 다층판들의 모드해석에 효과적으로 적용할 수 있다고 생각된다.

앞에서 해석한 결과들을 통하여 단층보와 적층보의 자유진동해석시 6-절점 2차원 요소를 사용하는 경우는 가우스 적분점을 수정한 경우가 수정하지 않은 경우보다 8-절점 요소의 해석결과와 잘 일치함을 알 수 있었다. 또한 단층판과 적층판의 자유진동해석시 16-절점 요소를 사용할 때, 가우스 적분점만을 수정한 경우, 즉 식(9)에 의한 수정법을

적용할 경우는 굽힘 모드의 고유 진동수는 잘 일치하나, 판의 비틀림 모드에 있어서는 오차가 나타났다. 그래서 비틀림 강성의 저 평가효과를 줄이기 위해 식(10)을 식(9)와 동시에 적용하면 굽힘 모드와 비틀림 모드를 동시에 만족함을 알 수 있다. 6-절점 혹은 16-절점 요소를 사용할 때에는 두께의 길이에 대한 비가 작을 때 발생하는 강성과잉 현상이 없으며 모든 자유도가 벡터량이라는 장점을 가지고 있다.

## 후 기

본 논문은 한국과학재단의 1992/1993년도 목적기초 연구비 지원에 의하여 이루어진 것으로 지원에 감사 드립니다.

## 참고문헌

- (1) Kim, Y. H. and Lee, S. W., 1988, "A Solid Element Formulation for Large Deflection Analysis of Composite Shell Structures," *Computer & Structures*, Vol. 30, No. 1/2.
- (2) Ausserer, M. F and Lee, S. W, 1988, "An Eighteen Node Solid Element for Thin Shell Analysis," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 26.
- (3) Wood, R. D and Zienkiewicz, O. C., 1976, "Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells," *Computer & Structures*, Vol. 7, pp. 725 ~ 7354.
- (4) Bathe, K. J. and Bolourchi, S., 1980, "A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element," *Computer and Structures*, Vol. 11.
- (5) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 23, pp. 1583 ~ 1600.
- (6) Belytschko, T., Liu, W. K., J. Ong, S. J. and Lam, D., 1985, "Implementation and Application of a 9-Node Lagrange Shell Element with Spurious Mode Control," *Computer & Structures*, Vol. 20, No.1~3.
- (7) Surana, K. S., 1983, "Geometrically Nonlinear Formulation for the Curved Shell Element," *Int.*

- J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 19.
- (8) Bathe, K. J., Ramm, E. and Wilson, E. L., 1975, "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 9, pp. 353~386.
- (9) 김정운, 정래훈, 권영두, 1993, "6절점 Isoparametric 요소의 가우스 적분점 수정에 관하여," 대한기계학회논문집, 제17권, 제12호, pp. 3007~3019.
- (10) Leissa, A. W., 1973, "The Free Vibration of Rectangular Plates," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 31, pp. 257~293.
- (11) Gorman, D. J., 1978, "Free Vibration Analysis of the Completely Free Rectangular Plate by the Method of Superposition," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 57, pp. 437~447.
- (12) Craig Jr, R. R., 1981, *Structural Dynamics, An Introduction to Computer Methods*, New York, John Wiley
- (13) Warburton, G. B., 1976, *The Dynamical Behaviour of Structures, 2nd Edition*, Pergamon International Library.
- (14) Allemang, R. J. and Brown, D. L., 1987, *Experimental Modal Analysis, Handbook on Experimental Mechanics*, Society for Experimental Mechanics, Prentice-Hall Inc..
- (15) Bathe, K. J., 1982, *Finite Element Procedure in Engineering Analysis*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- (16) Blevins, Robert D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold Ltd., New York, NY.