

〈論 文〉

## h-분할법에 의한 사각형 유한요소망의 적응적 구성

채 수 원\*

(1994년 5월 12일 접수)

### An Adaptive Construction of Quadrilateral Finite Elements Using h-Refinement

Soo-Won Chae

**Key Words** : Finite Element Mesh(유한요소망), Automatic Mesh Generation(요소망의 자동생성), Quadrilateral Element(사각형요소), Looping Algorithm(루핑 알고리즘), Error Analysis(오차해석), Adaptive Refinement(적응분할), h-Refinement(h-분할법)

#### Abstract

An efficient approach to the automatic construction of effective quadrilateral finite element meshes for two-dimensional analysis is presented. The procedure is composed of, firstly, an initial mesh generation and, secondly, an h-version of adaptive refinement based on error analysis. As for an initial mesh generation scheme, a modified looping algorithm has been employed. For the adaptive refinement process, an error indicator obtained by computing the residual error of the equilibrium equations in the energy norm with a relaxation factor has been employed. Examples of mesh generation and self-adaptive mesh improvements are given. These example solutions demonstrate that an effective mesh for a given error tolerance can be obtained in a few steps of the analysis processes.

#### 1. 서 론

유한요소법은 기계설계나 구조해석 등의 공학적인 문제의 해석에 일반적으로 널리 사용되고 있다. 유한요소법의 사용에 있어서 가장 중요한 결정중의 하나는 사용할 요소와 요소망을 결정하는 일이다. 대부분의 경우 사용자는 이전의 경험을 토대로 이러한 결정을 하게 된다. 그러나 최근 들어 CAD시스템 이용의 증가와 더불어 유한요소해석을 자동화하고자 하는 노력이 많이 이루어지고 있다. 특히

효율적인 요소망을 자동적으로 구성하는 일은 매우 중요한 일로 대두되고 있다.

일반적으로 효율적인 요소망이란 주어진 자유도를 가지고 최대의 정확도를 얻을 수 있는 요소망을 말한다. 효율적인 요소망을 얻기 위한 방법으로는 대략 세가지를 들 수 있다. 첫째는 절점재구성 방법(node relocation method) 또는 r-분할법으로서, 이는 유한요소망의 자유도를 고정시킨 채, 즉 요소망의 위상(topology)을 변화시키지 않고 절점의 위치를 변화시킴으로써 요소망의 효율을 개선시켜 나가는 방법이다.<sup>(1,2)</sup> Kikuchi 등<sup>(2)</sup>은 보간오차이론(interpolation error theorem)을 적용하여 보간함수에서 오는 오차를 최소화시키는 방법을 사용함으

\*정회원, 홍익대학교 기계공학과

로써 비교적 좋은 요소망을 얻고 있다. 그러나 이 방법은 매개변수인 절점을 계속적으로 변화시키는데 많은 양의 계산이 필요하며, 또 초기에 충분한 자유도를 가진 요소망을 사용하지 않으면 주어진 정확도를 만족시키는 결과를 얻을 수 없다는 문제가 있다. 두번째 방법은 요소망에 사용되는 자유도를 늘려감으로써 해석결과의 정확도를 높이는 것으로서, 요소분할방법(element refinement, h-분할법)과 고차보간방법(higher-order interpolation, p-분할법) 및 양자를 보완한 hp-분할법 등이 있다. 이 방법은 해석결과에 대한 오차를 각 요소별로 계산하여 오차가 많이 발생한 요소들의 자유도를 늘려나가는 것이다. 여기서, h-분할법은 해석에 사용된 보간함수(interpolation function)의 차수(order)는 변화시키지 않고 해당요소를 더 작은 여러개의 요소들로 세분화(subdivide) 시킴으로써 자유도를 늘려가는 방법이며, 이는 기존의 프로그램을 쉽게 보완하여 사용할 수 있는 장점이 있다.<sup>(3, 4)</sup> p-분할법은 요소의 크기를 변화시키지 않고 보간함수의 차수를 높여 나가는 것으로서, 이는 기존의 프로그램에 쉽게 적용시키기가 어렵다.<sup>(5)</sup> 이 밖에 h-분할법과 p-분할법을 동시에 사용하는 hp-분할법도 있으나,<sup>(6)</sup> 그 방법이 매우 복잡하여 실제문제에의 적용은 어렵다. 지금까지는 위의 세가지 방법 중에서 기존의 프로그램에 쉽게 적용할 수 있는 h-분할법이 가장 많이 사용되고 있다. 이상과 같이 요소망에 사용되는 자유도를 계속 늘려가는 방법에 의하면 주어진 정확도를 만족시키는 요소망을 얻을 수 있게 된다. 그러나 초기에 조악한 요소망을 사용하는 경우, 최종 요소망을 얻을 때까지 여러번에 걸친 요소의 분할과정(refinement process)이 필요하므로 계산량이 많아지고, 또한 최종 요소망은 초기 요소망에 기하학적으로 국한되어(constrained) 세분화되는 단점이 있다.

세번째는 요소망의 재구성(remeshing) 방법으로써,<sup>(7,8)</sup> 이는 초기해석에서 얻어진 특정한 해석변수들의 분포상태를 기준으로 요소망에 사용되는 자유도와 위상을 모두 바꾸어 전혀 새로운 요소망을 재구성 하는 것이다. 이때 요소망 재구성의 기준이 되는 해석 변수들로는 등에너지선도(isoenergetics), 주응력선도(isostatics), 등변위선도(contours of constant displacement) 등이 있으며, 이는 이러한 변수들의 분포가 효율적인 요소망과 유사하다는 가정에 근거를 두고 있다. 이 방법의 가장 큰 장점은

새로운 요소망이 초기 요소망에 제한되지 않고 재구성될 수 있다는 데 있으나, 반면에 재구성된 요소망이 주어진 정확도를 만족시킨다는 보장이 없다는 문제가 있다.

이상과 같은 방법중에서 본 연구에서는 두번째 방법중 h-분할법과 세번째 방법인 요소망 재구성 방법을 초기 요소망의 생성에 사용함으로써 주어진 정확도를 만족하는 요소망을 얻고자 한다. 또한 일반적인 해석에 있어서 사각형 요소가 삼각형 요소에 비해 계산효율이 높고 기존의 유한요소해석 프로그램이 사각형 요소를 많이 사용하고 있으므로, 본 연구에서는 8-절점 사각형 요소를 사용하였다. 한편 이러한 방법들을 적용하는 데 있어서 고려해야 할 중요한 사항은 분할기준으로서 어떠한 오차지표(error indicator)를 사용할 것인가하는 문제들을 수 있으며, 본 연구에서는 Chae 및 Bathe가 제안한 오차지표를 사용하였다.<sup>(9)</sup>

## 2. 효율적인 요소망의 적응적 구성

효율적인 요소망을 생성하기 위한 개략적인 도표는 Fig. 1에 나타나 있다. 이 방법은 사용자의 경험을 토대로 초기에 가급적 효율적인 요소망을 구성한 후, 적응분할과정을 1, 2 차례 더 수행하여 주어진 오차한계를 만족하는 최종 요소망을 얻도록 하는 것이다. 초기 요소망을 생성할 때 참고로 할 수 있는 해석변수로는 변형에너지밀도(strain energy

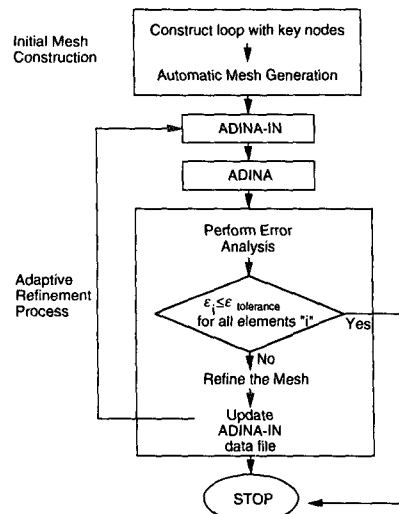


Fig. 1 Effective Mesh Construction Process

density) 분포나 계산결과에 대한 오차해석을 통하여 얻는 오차분포 등을 고려할 수 있으나, 이들 변수의 분포와 효율적인 요소망과의 정량적인 상관관계는 아직 정립되지 않은 상태이다. 따라서 정성적인 관점에서 변형에너지 밀도나 오차분포가 큰 부분에서 요소의 크기를 작게 하는 등의 방법을 경험적으로 사용하게 된다.

2.1 초기 요소망의 생성

효율적인 초기 요소망을 생성하기 위하여 본 연구에서는 채수원 등이<sup>(10)</sup> 제안한 수정 루핑 알고리즘(modified looping algorithm)을 사용하였다. 이 방법은 해석영역을 절취선(cut line)을 사용하여 하나 또는 여러개의 연속루프를 구성한 후, 각 루프를 최적분할선(best split line)을 사용하여 부루프들로 계속해서 나누어가며 사각형 요소를 생성하는 것이다. 이때 해석영역의 경계는 직선, 원호 및 3차 스플라인 등의 조합으로 정의될 수 있다. 최적분할선은 Fig. 2에서와 같이 하나의 가시절점씩

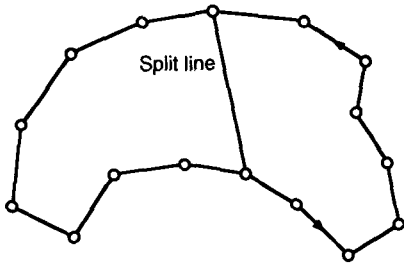
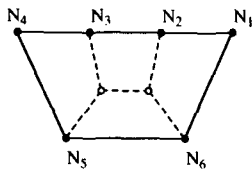
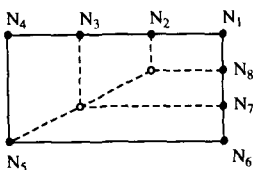


Fig. 2 An example of a candidate split line



(a)



(b)

Fig. 3 (a) An example of a 6-node loop operator  
(b) An example of an 8-node loop operator

(visible nodes pair)으로 구성되며 이 연결선으로 하나의 루프가 두개의 부루프로 분할된다. 따라서 최초의 연속루프를 분할해 가면서 부루프가 레이어 루프, 6-절점 루프 또는 8-절점 루프가 되면 각각 해당하는 오퍼레이터로 요소망을 생성한다. 분할선을 이용하여 루프를 분할시켜 가는 과정에서 생성되는 루프의 형태는 가늘고 긴 모양을 한 것이 많으며, 이중 양 끝단에 이웃한 내각이 90°에 가깝고 나머지 내각은 180°로 구성되어 있는 루프에서는 절점간격과 내각을 계산하여 사각형 요소에 적합할 경우 직접 분할한다. 이를 레이어 오퍼레이터(layer operator)라고 한다. 또한 루프를 분할시켜 가는 과정에서 루프가 6-절점 또는 8-절점에 도달하게 되면 각 루프의 형태에 따라 적합한 모양으로 요소망을 구성하며 이를 각각 6-절점 및 8-절점 루프 오퍼레이터라 한다. (Fig. 3) 이와 같이 얻은 요소망은 Laplacian smoothing 기법을 사용하여 개선하였으며, 이는 해석영역의 내부에서 생성된 절점의 위치를 현재 위치와 주위에 연결된 절점들의 평균 위치와의 평균값으로 재조정하는 것이다.

2.2 오차해석

유한요소해석 결과의 오차에 대한 연구는 많이 이루어져 왔으며,<sup>(3,4,11,12)</sup> 본 연구에서는 Chae 및 Bathe<sup>(9)</sup>가 제안한 오차지표를 사용하였다. 이는 8-절점요소를 사용하는 경우 요소내의 체적힘 잔유량(body force residual)이 전체 오차에서 가장 큰 비중을 차지한다는 사실을 이용한 것이다. 먼저 일반적인 탄성문제를 고려하면 평형방정식은 다음과 같다.

$$R_i = \tau_{ij,j} + f_i^B = 0 \text{ in } \Omega \tag{2}$$

이 때 경계조건은 다음과 같다.

$$T_i = \tau_{ij}n_j - t_i = 0 \text{ on } \Gamma_t$$

$$u = u_0 \text{ on } \Gamma_u$$

여기서,  $t_i$ 는 traction,  $\Gamma_t$ 는 traction 경계, 그리고  $\Gamma_u$ 는 변위경계를 나타낸다. 따라서 해석에 사용되는 유한요소 "m"에서는 다음 두 가지 형태의 오차가 발생하게 된다.

$$R_i = \tau_{ij,j}^E + f_i^B \neq 0 \text{ in } \Omega_m$$

$$T_i = \tau_{ij}^E n_j - t_i \neq 0 \text{ on } \Gamma_m ; i, j = x, y, z \tag{3}$$

여기서,  $\Omega_m$ 은 요소 "m"의 내부영역을 의미하며,  $\Gamma_m$ 은 요소 "m"의 경계를 나타낸다. 한편 오차지

표는 에너지 형태로 사용하는 것이 힘의 형태로 사용하는 것보다 더 효율적임이 알려져 있으며, 이에 이완계수  $1/h_m$ 을 도입함으로써 전체 해석결과에 큰 영향을 미치지 않고도 응력집중 부위에서 보다 정확한 결과를 얻을 수 있다.<sup>(9)</sup> 따라서 식(3)의 잔류항  $R_x$  및  $R_y$ 를 사용하여 다음과 같은 오차지표를 정의하기로 한다.

$$\eta_m = \frac{h_m}{E} \int_{\Omega_m} (R_x^2 + R_y^2) d\Omega_m \quad (4)$$

여기서,  $h_m$ 은 요소의 특징길이(characteristic length),  $E$ 는 재료의 Young's modulus를 나타낸다. 또한 이를 무차원화 시키기 위한 기준값으로, 다음과 같이 계의 총 변형에너지를 계의 특징길이로 나누어 사용한다.

$$U_{ref} = \frac{E_{total \ strain \ energy}}{L_{system}} \quad (5)$$

따라서 요소 "m"의 무차원화된 오차지표와 전체 오차지표는 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_m = \frac{\eta_m}{U_{ref}}, \quad \epsilon_{total} = \sum_m \epsilon_m \quad (6)$$

### 2.3 h-분할법

본 연구에서 사용하는 적응분할방법은 h-분할법(h-refinement method)으로 이는 한 개의 요소가 네 개의 작은 요소들로 나뉘어지는 것이다. 이러한 분할과정을 자동적으로 수행하기 위하여 각 요소들의 변(edge), 절점(node) 및 이들 사이의 연결성 정보를 저장하고 수정할 수 있는 자료구조(data structure)가 사용되었다. 대부분의 적응적 해석 프로그램들은 이러한 자료관리를 위하여 트리구조(tree-structure)를 이용한다. 이러한 트리구조에서는 연결성 자료가 매우 간략한 형태로 저장되며 요소의 분할과정도 단지 트리를 확대함으로써 가능하게 되어 있다. 반면에 트리구조는 중복되는 연결성 정보를 가지고 있지 않으므로 자료관리가 간단하지 않으며, 여러번에 걸친 상방향 및 하방향의 조사를 하여야 하며, 이에 상당한 시간이 소요된다. 따라서 본 연구에서는 중복된 정보를 갖고 있는 B-rep 형태의 자료구조가 사용되었다. 이러한 자료구조의 단점은 분할과정중 발생하는 연결성 정보를 계속해서 바꾸는 것이 복잡하다는 것이다. 그러나 이러한 단점은 미리 고안된 기본 분할단위(basic refinement unit)를 사용하므로써 해결할 수

있다.

분할단위를 설명하기 전에 먼저 몇가지 용어에 대한 정의를 하도록 한다. 여기서 정규절점(regular node)은 독자적인 자유도를 갖는 독립절점(independent node)을 말하며, 비정규절점(irregular node)은 독자적인 자유도를 갖지 않으며 그 운동이 다른 독립절점에 의해 구속되어 있는 비독립절점(dependent node)을 의미한다. 또한 정규변(regular edge)은 세 개의 정규절점, 즉 두 개의 끝 절점과 한 개의 중간절점, 으로 구성되어 있고 변(edge)의 양 측에 각각 한 개의 요소나 경계와 인접하고 있는 경우를 말한다. 비정규변(irregular edge)은 비정규절점을 포함하고 있으며 변의 한편에는 한 개의 요소만 있는 반면에 다른 편에는 두 개 이상의 요소가 있는 경우를 말한다. 정규 및 비

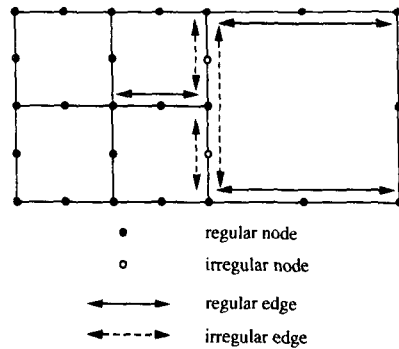
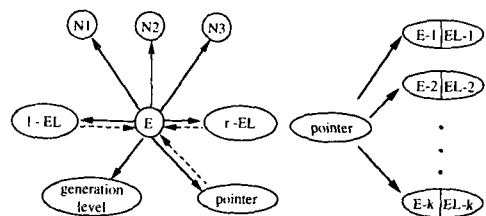
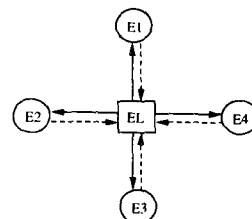


Fig. 4 Regular and irregular nodes and edges



(a) Edge connectivity data



(b) Element connectivity data

Fig. 5 Data structure for refinement process

정규절점과 변의 예는 Fig. 4에 나타나 있다. 여기서 사용되는 자료구조는 Fig. 5에서 보는 바와 같이 변과 절점 및 요소의 연결 정보를 저장하고 있으며  $E$ 는 변(edge),  $N$ 은 절점(node),  $EL$ 은 요소(element)를 나타낸다. 분할과정은 기본분할단위에 의하여 Fig. 6과 같이 수행된다. 분할과정중 인접요소간의 적합조건(compatibility condition)을 만족시키기 위해 구속방정식(constraint equation)을 사용한다. 따라서 구속방정식들을 생성, 삭제 또는 수정하는 일은 간단하지 않다. 따라서 이 과정을 단순화시키기 위하여 중간 절점들이 항상 변의 중간에 위치하는 경우로 가정한다. 일반적으로 2차(quadratic)요소에서 중간 절점이 각 변의 중점에 위치할 때 계산효율이 제일 좋으므로 이는 그다지 문제가 되지 않는다.

예를 들어 Fig. 7과 같은 경우를 고려해 보자. 비정규절점인 절점 4와 절점 5의 변위,  ${}^4\Delta_i$ ,  ${}^5\Delta_i$ 는 인접한 정규절점인 절점 1, 2 및 3의 변위에 의해 다음과 같이 나타내진다.

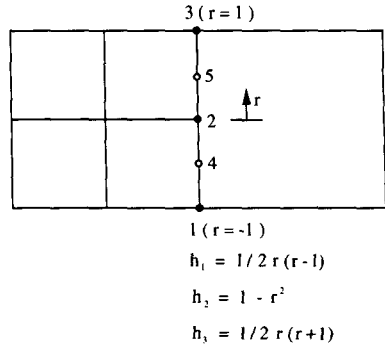


Fig. 7 Example of constraint equations

$${}^4\Delta_i = h_1|_{r=-0.5} \cdot {}^1\Delta_i + h_2|_{r=-0.5} \cdot {}^2\Delta_i + h_3|_{r=-0.5} \cdot {}^3\Delta_i$$

$$= \frac{3}{8} \cdot {}^1\Delta_i + \frac{3}{4} \cdot {}^2\Delta_i - \frac{1}{8} \cdot {}^3\Delta_i$$

$${}^5\Delta_i = h_1|_{r=-0.5} \cdot {}^1\Delta_i + h_2|_{r=-0.5} \cdot {}^2\Delta_i + h_3|_{r=-0.5} \cdot {}^3\Delta_i$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot {}^1\Delta_i + \frac{3}{4} \cdot {}^2\Delta_i + \frac{3}{8} \cdot {}^3\Delta_i \quad (7)$$

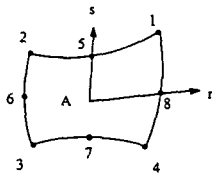
이 때 절점 1 또는 3이 비정규절점 이면 위의 구속 방정식은 해당 구속방정식을 윗식에 대입하므로써 수정된다. 절점 1 과 3이 모두 비정규절점인 경우는 매우 복잡하고 또 실제로 거의 발생하지 않으므로 생략되었다. 경계에 있는 변을 분할하는 경우 새로 생성되는 절점의 경계조건이 생성되며, 외력(pressure load)이 작용하는 경우도 새로 생성되는 변에서 외력이 적절히 생성된다.

### 3. 적용실예

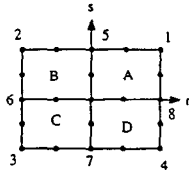
본 연구에서 개발한 방법을 적용하여 효율적인 요소망을 구성하여 보았다. 일반적으로 효율적인 요소망을 구성하는 데 유일한 방법은 없다. 만약 문제에 대해 충분한 정보를 가지고 있는 경우에는, 주요절점들을 주의깊게 해석영역 경계에 배치함으로써, 한두번 만에 주어진 정확도를 만족시키는 요소망을 생성할 수도 있다. 그렇지 않은 경우에는 초기에 비교적 균일한 요소망을 구성한 후 적응분할과정을 여러번 적용함으로써 얻을 수 있게 된다.

#### 3.1 축대칭 압력용기의 응력해석

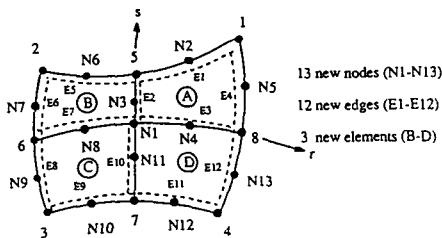
먼저 Fig. 8에 나타나 있는 축대칭 압력용기의 응력해석에 관한 문제를 고려해 보자. 이 문제는 처음에 Floyd에<sup>(13)</sup> 의하여 해석되었는데, 압력용기에 내압이 작용할 때 응력집중이 예상되는 부위(line of stress output)에서의 응력분포를 계산하는



(a) Original element



(b) Subdivided elements in isoparametric coordinates



(c) Subdivided element in read coordinates

Fig. 6 Basic refinement unit for an eight-node quadrilateral element

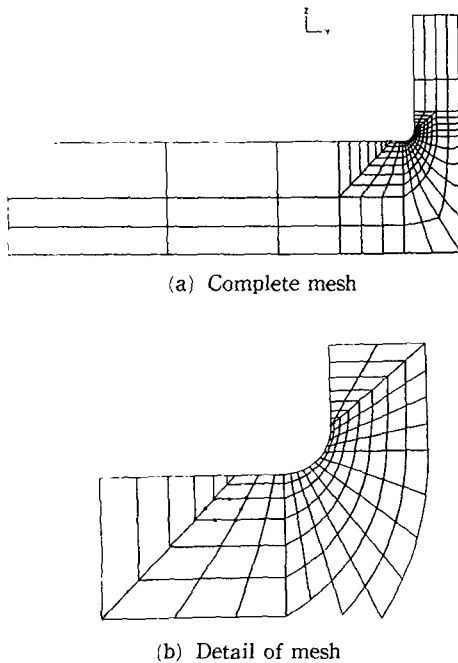
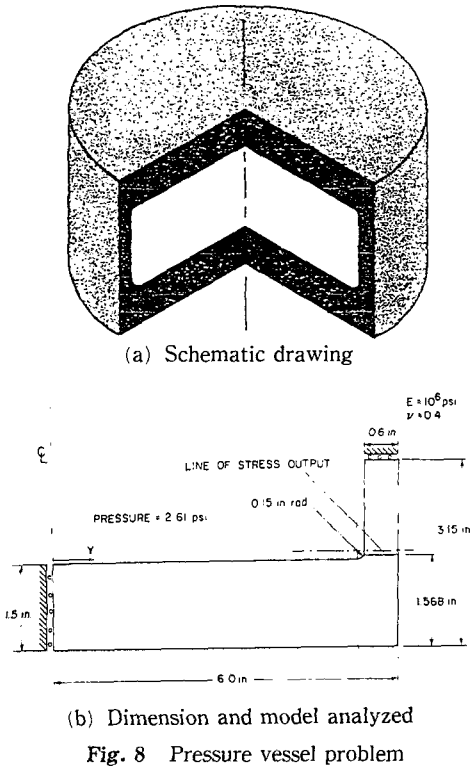


Fig. 9 181 eight-node element mesh for axisymmetric pressure vessel[14]

데 어려움이 따른다고 보고되었다. 이 문제 해석의 핵심은 적절하고도 충분한 정도의 요소망을 사용하는 데 있다.

한편 Sussman과 Bathe<sup>(14)</sup>는 충분한 정도의 해석 결과를 얻기 위해 여러가지 요소망을 사용해 본 결과 181개의 8-절점 요소가 사용된 효율적인 요소망을 구성하였다. 이 요소망은 Fig. 9에 나타나 있고, 이 때 관심부위(line of interest)에서의 주응력 분포는 Fig. 10과 같으며, 이는 Floyd에 의한 광탄성 실험결과와 잘 일치하였다. 여기서 응력은 각 요소의 절점에서 변형-변위 관계를 이용하여 직접 구한 것으로 매끄럽게 처리되거나(smoothing), 보간법(extrapolation)을 사용하지 않은 것이다. 따라서 각 절점에서의 응력값의 개수는 해당 절점을

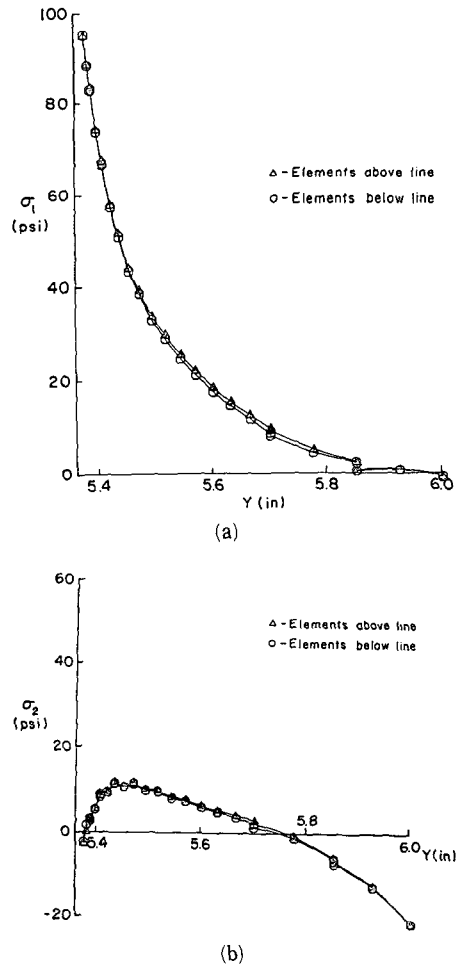


Fig. 10 (a) Maximum principal stress for 181 element mesh  
(b) Minimum principal stress for 181 element mesh

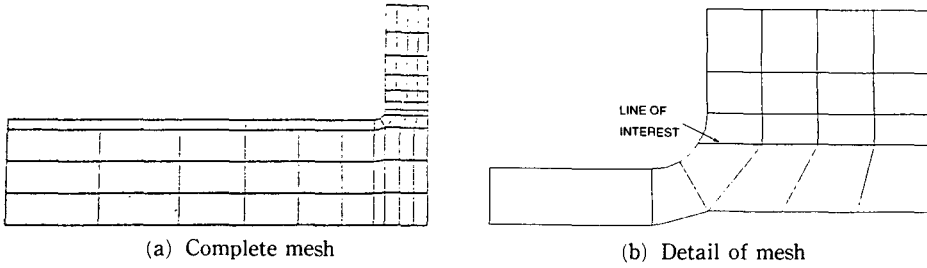


Fig. 11 69 element model ( $\epsilon_{total}=8.1396$ , S.E(Strain energy) $=0.297371 \times 10^{-2}$ lbf-in)

포함하고 있는 요소의 수와 동일하게 된다. Fig. 9에서의 요소망은 매우 효율적인 요소망으로 이와 같은 요소망을 얻기 위해서는 여러번의 시행착오를

통한 노력과 경험이 필요하다.

그러나 h-분할법에 의하면 사전경험 없이도 이와 같은 요소망을 구성할 수 있게 된다. Fig. 11은 69개의 요소로 된 비교적 조악한(coarse) 초기요소망을 보여주고 있으며, 이 때의 응력분포는 Fig. 12에 나타나 있다. Fig. 12에서 볼 수 있듯이 응력 집중 부위에서 인접요소간의 응력불연속 정도가 매우 크므로 사용된 요소망이 충분히 조밀하지 못한 것을 알 수 있다. 따라서 Fig. 9와 비슷한 정도의 요소망을 얻기 위해 오차한계를  $\epsilon=0.015$ 로 정하고 적응분할과정을 수행하면 네 번의 적응분할과정을(69 요소 - 117 요소 - 159 요소 - 174 요소 - 180 요소) 거쳐 Fig. 13과 같이 180개의 요소로 된 요소망을 얻는다. 이 때의 응력분포는 Fig. 14에 나타나 있으며, 이는 인접요소간의 응력차가 거

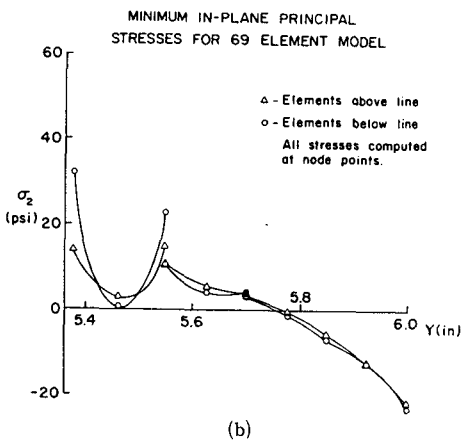
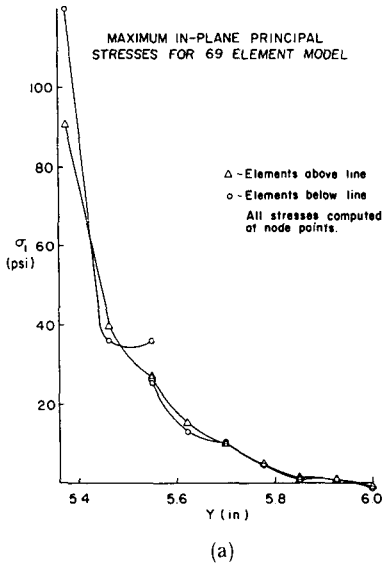


Fig. 12 (a) Maximum principal stress for 69 element mesh  
(b) Minimum principal stress for 69 element mesh

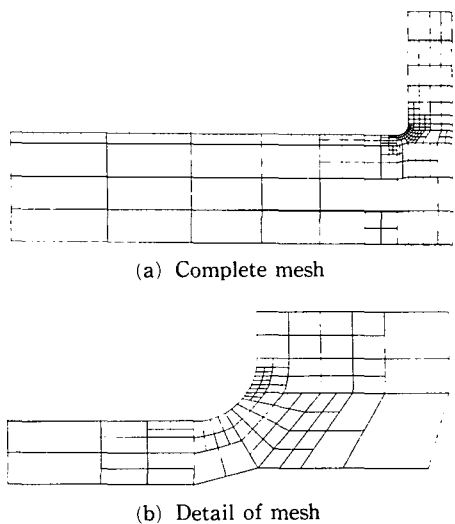


Fig. 13 Final mesh with 180 element after 4th refinement (69el  $\rightarrow$  117el  $\rightarrow$  159el  $\rightarrow$  174el  $\rightarrow$  180el ;  $\epsilon_{total}=0.5288$ , S.E. =  $0.298221 \times 10^{-2}$  lbf-in,  $\epsilon_{tolerance}=0.015$ )

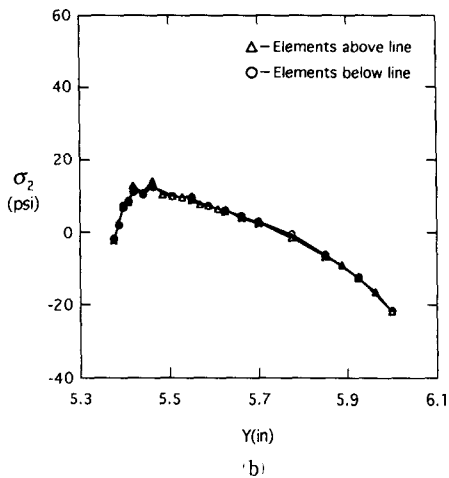
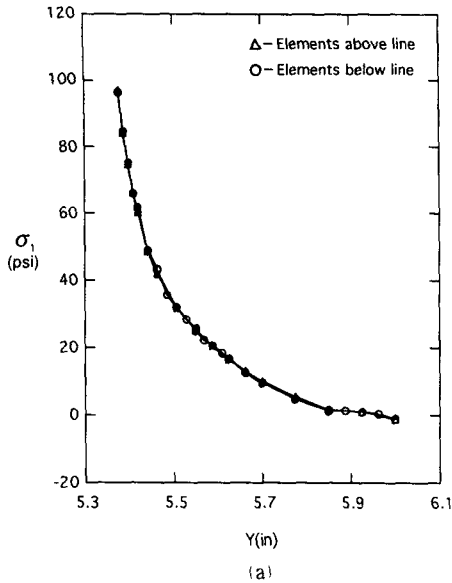


Fig. 14 (a) Maximum principal stress for 180 element mesh  
(b) Minimum principal stress for 180 element mesh

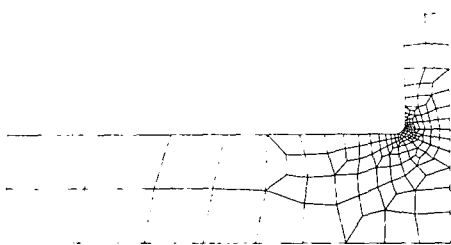


Fig. 15 An initial mesh with 160 elements ( $\epsilon_{total} = 1.3914$ , S.E. =  $0.298098 \times 10^{-2}$  lbf-in)

의 없는 기존의 실험 및 해석결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 한편 초기 요소망을 요소망 자동생성 프로그램을 사용하여 자동적으로 생성하는 경우 Fig. 15와 같이 160개의 요소로 된 초기 요소망을 얻으며, 이 때 오차한계를  $\epsilon = 0.015$ 로 정하고 적응분할 과정을 수행하면 한 번의 적응분할과정을 거쳐 Fig. 16과 같이 229개의 요소로 된 요소망을 얻는다. 이 때의 응력 분포는 Fig. 17과 같으며 이는 기존의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. Fig. 13 및 Fig. 16에서와 같이 적응분할 과정을 통해 얻은 최종 요소망들은 Fig. 9에서의 효율적인 요소망과 비교해 볼 때 요소의 크기와 밀도등이 서로 비슷한 것을 알 수 있다.

이상과 같이 효율적인 요소망을 얻기 위해서 초기 요소망을 주의깊게 구성하면 적응분할과정의 수를 줄일 수 있다. 한편 사용자가 주어진 문제에 대한 경험이 없는 경우에는 비교적 균일한 초기 요소망을 사용하고 1~2 차례의 적응분할과정을 더 수행하면 비슷한 정도의 결과를 얻을 수 있다. 이 때 초기 요소망을 자동적으로 구성하는 경우 적응분할 단계를 줄일 수 있으나, 사용된 요소들이 많이 찌그러진(distorted) 경우에는 비효율적일 수도 있다는 점을 유의해야 한다. 따라서 문제에 따라서는 초기에 비교적 균일한 사각형 요소망을 사용하고

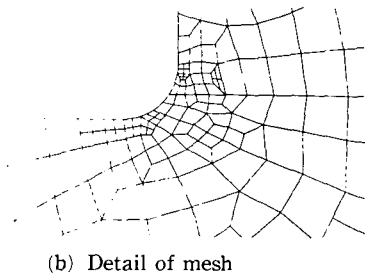
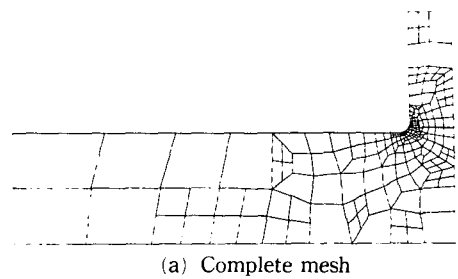


Fig. 16 Final mesh with 229 element after 1st refinement ( $\epsilon_{total} = 0.5613$ , S.E. =  $0.298226 \times 10^{-2}$  lbf-in,  $\epsilon_{tolerance} = 0.015$ )



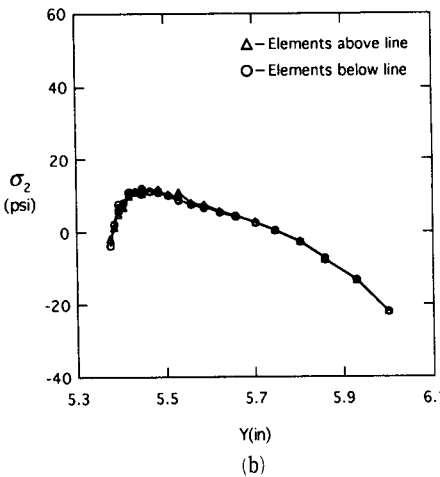
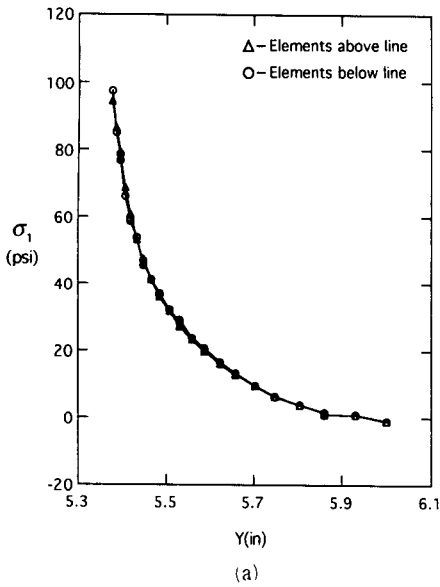


Fig. 17 (a) Maximum principal stress for 229 element mesh  
(b) Minimum principal stress for 229 element mesh

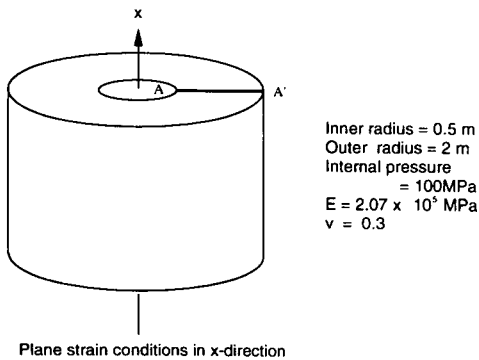
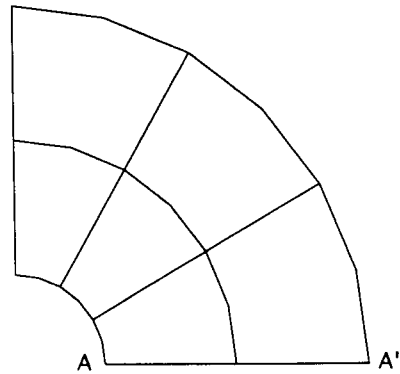


Fig. 18 Thick cylinder under internal pressure

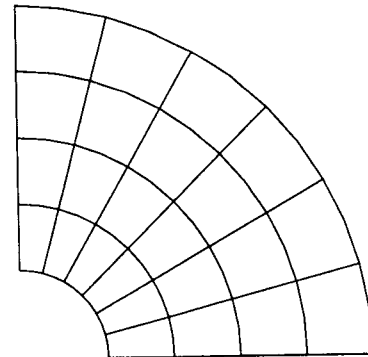
적응분할 단계를 1~2 차례 더 수행하는 것이 바람직한 경우도 있을 수 있다.

3.2 내압을 받고 있는 두꺼운 실린더의 해석 (평면변형)

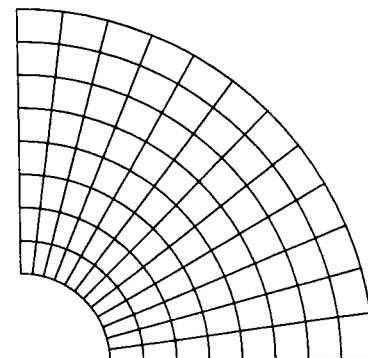
평면변형의 문제로서 Fig. 18에서와 같이 내압을



(a) Initial mesh with 6 elements ( $\epsilon_{total} = 7.18$ , S.E. = 0.0131923)

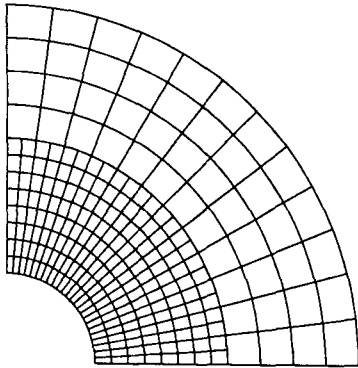


(b) 1st refinement (24 elements,  $\epsilon_{total} = 1.58$ , S.E. = 0.0134410)

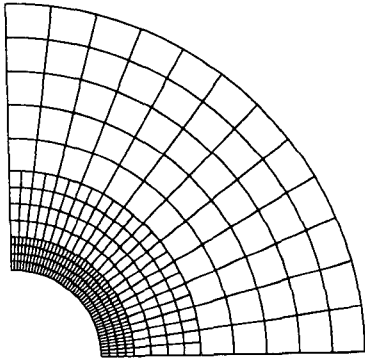


(c) 2nd refinement (96 elements,  $\epsilon_{total} = 0.25$ , S.E. = 0.0134765)

Fig. 19 Continued

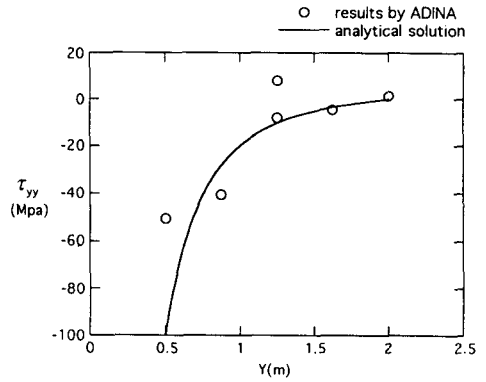


(d) 3rd refinement (240 elements,  $\epsilon_{total} = 0.0361$ , S.E. = 0.0134797)

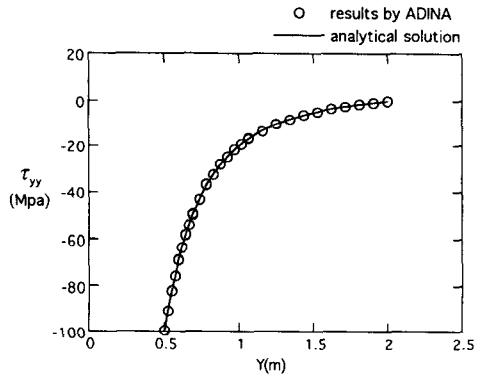


(e) 4th refinement (384 elements,  $\epsilon_{total} = 0.0113$ , S.E. = 0.0134799)

Fig. 19 Mesh refinement process with uniform elements ( $\epsilon_{total} = 0.0002$ , S.E.  $\equiv$  strain energy ; N·m)

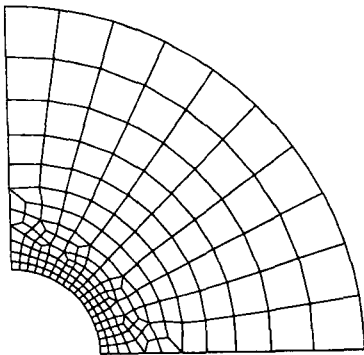


(a) Initial mesh with 6 elements

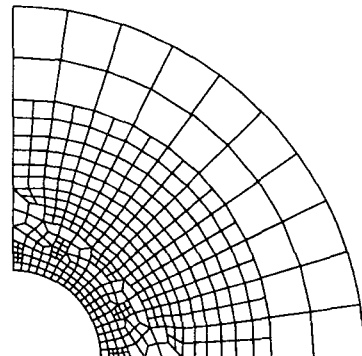


(b) Final mesh with 384 elements

Fig. 20  $\tau_{yy}$  distribution along the line A-A'



(a) Initial mesh with 178 elements ( $\epsilon_{total} = 0.0326$ , S.E. = 0.01348185)



(b) 1st refinement (352 elements,  $\epsilon_{total} = 0.0155$ , S.E. = 0.01348197)

Fig. 21 Mesh refinement process with uniform elements ( $\epsilon_{total} = 0.0002$ , S.E.  $\equiv$  Strain Energy ; N·m)

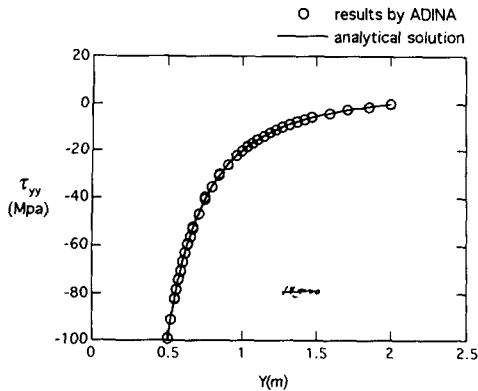


Fig. 22  $\tau_{yy}$  distribution along the line A-A' for the final mesh with 352 elements

받고 있는 두꺼운 실린더를 고려해 보자. 이 문제 해석의 목표는 선 A-A' 상에서 응력분포를 구하는 것이다. 해석을 위한 유한요소 모델은 대칭성을 고려하여 실린더의 1/4만 고려하였으며, Fig. 19(a)에서와 같이 6개의 8-절점 요소로 된 초기 요소망을 사용하였다. 그 결과 선 A-A' 상의 응력분포는 Fig. 20(a)와 같이 얻어졌으며, 이는 이론해와 잘 일치하지 않음을 알 수 있다. 따라서 보다 정확한 값을 얻기 위하여 오차한계로  $\epsilon=0.0002$ 를 사용하여 네 차례에 걸친 분할과정을 수행한 결과 Fig. 19(e)와 같이 384개의 요소로 된 요소망을 얻었다. Fig. 19에서 보는 바와 같이 적응분할 결과 얻은 요소망은 정확히 대칭을 이루고 있으며, 선 A-A' 상의 응력분포는 Fig. 20(b)와 같이 이론해와 잘 일치함을 알 수 있다.

한편 초기 요소망을 자동 요소망생성 프로그램에 의해 효율적으로 구성하면 Fig. 21(a)에서와 같이 178개의 요소로 된 요소망을 얻게 된다. 여기서 오차한계를 앞에서와 같이  $\epsilon=0.0002$ 를 사용하면, 한 차례의 적응분할과정을 거쳐 Fig. 21(b)에서와 같이 352개의 요소로 된 요소망을 얻게 된다. 그 결과 선 A-A' 상의 응력분포는 Fig. 22와 같이 이론해와 잘 일치함을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 2차원 해석에서 사각형 요소를 사용하여 효율적인 유한요소망을 자동적으로 구성하는 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 초기 요소망의 구성과 h-적응분할방법을 조합한 것이다. 초기

요소망의 생성을 위해서는 루핑알고리즘을 기초로 한 방법을 주로 사용하였으며, 기존의 전처리기에 서 얻을 수 있는 비교적 균일한 요소망도 사용할 수 있게 하였다. 적응분할을 수행하기 위한 기준으로는 요소내의 체적잔유량의 에너지 형태에 이완계수를 도입한 것을 사용함으로써, 주어진 오차한계를 만족하는 효율적인 요소망을 2~3 차례의 해석과정만에 얻을 수 있게 되었다.

#### 후 기

본 연구의 일부는 '94 홍익대학교 교내 연구비에 의해 수행된 것으로, 이에 관계자 제위께 감사드립니다.

#### 참고문헌

- (1) Shephard, M. S. and Gallagher, R. H., 1979, "Finite Element Grid Optimization," *ASME Special Publication PVP-38*.
- (2) Diaz, A. R., Kikuchi, N. and Taylor, J. E., 1983, "A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41, pp. 29~45.
- (3) Gago, J. P. De S. R., Kelly D. W., Zienkiewicz, O. C. and Babuska, I., 1983 "A posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method : Part II — Adaptive Mesh Refinement," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 19, pp. 1621~1656.
- (4) Babuska, I., Zienkiewicz, O. C., Gago, J. and Oliveira, E. R. de A., 1986 *A Wiley-Interscience Publication : Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Computations*, John Wiley & Sons.
- (5) Barna A. Szabo, 1986 "Mesh Design for the p-Version of the Finite Element Method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 55, pp. 181~197.
- (6) Zienkiewicz, O. C., Zhu, J. Z. and Gong, N. G., 1989 "Effective and Practical h-p Adaptive Analysis Procedures for the Finite Element Method," *Int. J. Num. Eng.*, Vol. 28, pp. 879~891.

- (7) Melosh, R. J. and Marcal, P. V., 1977, "An Energy Base for Mesh Refinement of Structural Continua," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 11, pp. 1083~1091.
- (8) Shephard, M. S., Gallagher, R. H., and Abel, J. E., 1980, "The Synthesis of Near Optimum Finite Element Meshes with Interactive Computer Graphics," *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 15, 1021~1039.
- (9) Chae, S. W. and Bathe, K. J., 1986, "On Automatic Mesh Construction and Mesh Refinement in Finite Element Analysis," *J. Computers & Structures*, Vol. 32, No. 3/4, pp. 911~936.
- (10) 채수원, 신보성, 민중기, 1993, "사각형 유한요소망의 자동생성," 대한기계학회논문집, 제17권, 제12호, pp. 2995~3006.
- (11) Zienkiewicz, O. C. and Zhu J. Z., 1987, "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 24, pp. 337~357.
- (12) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z., 1992, "The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 2 : Error Estimates and Adaptivity," Vol. 33, pp. 1365~1382.
- (13) Floyd, C. G., 1984, "The Determination of Stresses Using a Combined Theoretical and Experimental Analysis Approach," *2nd Int. Conf. on Computational Methods and Experimental Measurements* (Ed. C. A. Brebbia).
- (14) Sussman, T. and Bathe, K. J., 1986, "Studies of Finite Element Procedures-Stress Band Plots and the Evaluation of Finite Element Meshes," *Engineering Computations*, September, 3, pp. 178~191.