

〈技術論文〉

체적부하를 갖는 유체 전달관로의 압력전파 특성

윤선주* · 손병진**

(1994년 4월 7일 접수)

The Propagation Characteristics of the Pressure in the Volume Loaded Fluid Transmission Line

Sun-Ju Yoon and Byung-Jin Son

Key Words : Pressure Propagation(압력전파), Frequency Response(주파수응답), Transient Response(과도응답), Propagation Constant(전파상수), Characteristic Impedance(특성임피던스), Distributed Friction Model(분포마찰모델), Average Friction Model(평균 마찰모델)

Abstract

The applications of the electrical transmission line theory to the pressure propagation characteristics in the volume loaded fluid transmission line with step and impulse input wave is demonstrated in this paper. The method is based on the premise that the time response is the inverse Fourier transform of frequency spectrum of the wave which spectrum is a product of frequency spectrum of input pressure wave and system transfer function. The frequency response and transient response of step and impulse input wave in the volume loaded fluid transmission line is analysed by the Laplace transform and inverse Laplace transform with FFT numerical algorithm. The numerical solution of the distributed friction model is compared with the average friction model and the infinite product model. And the result is showed that FFT method may have major advantages for the simulation of fluid circuitary.

1. 서 론

유체 전달관로의 압력전파 특성은 유압계통, 제어 계통 및 지시계기계통 등에 있어서 중요한 동적 특성중의 하나로서, 초창기 대부분의 연구는 근사적으로 접근한 해석적인 방법이 이루어져 왔으나 근래에 와서는 수치적인 해석에 의한 연구가 시도되고 있다.

유체 전달관로의 입력파동의 전파에 관해서는

Rohmann과 Grogan⁽¹⁾이 무한소의 구성요소(infinitesimal element)로 구성된 유체 전달회로에 대해 직렬임피던스(series impedance), $Z(s)$ 와 분류어 드미턴스(shunt admittance), $Y(s)$ 를 조합한 전기적인 전달이론을 적용하여 해석을 시도하였으며, Brown⁽²⁾은 이러한 선형이론을 근거로 하여 Laplace변환에 의한 전파상수(propagation constant), $\Gamma(s)$ 와 특성임피던스(characteristic impedance), $Z_c(s)$ 을 체계적으로 유도하고 유체 전달관로에서의 주파수에 따른 점성의 영향을 고려한 압력전파 특성을 서술하므로써 스텝 입력파동과 임펄스 입력파동의 과도응답에 대한 감쇠효과를 해

*정회원, 인하공업전문대학 항공기계과

**정회원, 한양대학교 기계공학과

석하였다. 그리고 Brown과 Nelson⁽³⁾은 액체관로에서의 스텝응답(step response)에 대한 해석을 제시하였으며 Holmboe와 Rouleau⁽⁴⁾는 액체관로의 과도현상에 대한 점성 전단저항의 효과를 실험에 의해 제시하여 Brown의 이론적인 결과를 검증하였다. Oldenburger와 Goodson⁽⁵⁾은 무한승적(infinite product)의 기법에 의한 유압관로의 과도현상에 따른 전달함수의 해석을 단순화시켰으며 Katz⁽⁶⁾는 Laplace의 역변환에 의한 폐쇄관로의 과도현상을 해석하여 측정치와 일치한 결과를 얻었다. 최근에는 FFT 해석방법의 높은 계산효과 때문에 Fourier변환에 의한 유체 전달관로의 과도현상의 해석이 시도되고 있으며 Tsang 등⁽⁷⁾은 FFT해석을 도입함으로써 공기를 전달하는 개방관로와 폐쇄 관로에 있어서 스텝 입력파동과 임펄스 입력파동 및 임의의 입력파동을 받는 관로의 동적 특성을 예측하였다. 또한, Suo와 Wylie⁽⁸⁾는 FFT의 기법으로부터 주파수 변화에 따른 유체 전달관로의 과도현상을 해석할수 있는 효과적인 수치해석방법을 제시하기도 했다.

체적부하(volume load)를 갖는 유체 전달관로의 압력전파 특성은 Schuder와 Binder⁽⁹⁾로부터 해석되기 시작하였으며 市川과 山口,⁽¹⁰⁾ 市川과 佐藤⁽¹¹⁾ 그리고, Katz 등⁽¹²⁾에 의해 지속적으로 연구되어 왔다.

본 논문은 체적부하를 갖는 유체관로의 압력전파 특성으로서 주파수응답과 과도응답을 구하기 위해 FFT방법을 적용하여 수치적인 해석을 수행하였다. 유체 전달관로의 시간영역에서의 파동응답은 주파수영역에서 유체 전달관로의 전달함수(transfer function)와 입력파동의 곱으로 구한 파동의 주파수 분포를 Fourier변환을 하므로써 구할 수 있다는 전제를 근거로 하고 있으며 또한 일반적으로 유체 전달관로의 전달함수는 기본적인 구성요소들의 주파수분포를 주파수영역에서 합성하여 모험화할 수 있으므로,⁽¹³⁾ 스텝과 임펄스 혹은 주기적인 입력파동을 받는 관로의 주파수 특성은 비교적 단순한 계산절차에 의해 수치결과를 도출할 수가 있다. 그리고 본 논문에서는 체적부하를 갖는 유체관로의 압력전파 특성에 대한 수치해석결과를 평균마찰모델(average friction model)과 분포마찰모델(distributed friction model)로 분류하여 전파상수를 무한급수로 전개한 후, FFT 알고리즘에 의해 수치해석하므로써 두 모델에 대한 결과를 비교 검토

하였으며, Oldenburger와 Goodson⁽⁵⁾이 제시한 무한승적 모델(infinite product model)에 의한 해석 결과와도 비교 검토하였다.

2. 지배방정식과 전달함수

2.1 지배방정식

본 연구에서는 다음과 같은 가정하에서 유체 전달관로의 운동방정식과 에너지방정식 및 연속방정식을 도입하였다.^(12,14) (1) 층류유동(관로의 직경 Reynolds수가 2000 이하)이며, (2) 유체의 점도가 일정하고, 관로 벽면은 등온과정으로 가정한다. (3) 전달관로가 축대칭으로 가정하므로써, 원주방향의 속도 및 그 방향의 모든 변수의 미분항을 무시할 수 있다. (4) 길이에 비해 직경이 작은 관로의 해석에 적용하므로써, 반경방향의 열전달 항에 비해 축방향의 열전달 항은 무시한다.

원통좌표계의 완전 Navier-Stokes 방정식으로부터, 축대칭유동의 축방향속도 $u(x, r, t)$ 와 반경방향의 속도 $v(x, r, t)$ 로 설정하면 운동방정식은 다음과 같다.⁽¹⁴⁾

x -방향

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_0 \left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

r -방향

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu_0 \left[\frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{4}{3} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{4}{3} \frac{v}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

그리고 에너지방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} \\ = \frac{\nu_0 \gamma}{\sigma_0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] \\ - \frac{\rho_0}{\rho_0 c_v} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial u}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, K 는 체탄성계수, γ 는 비열비, c_v 는 정적 비열, 그리고 σ_0 는 Prandtl수를 나타낸다.

또한 원통좌표계의 연속방정식으로부터 연속방정

식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o \frac{\partial v}{\partial r} + \rho_o \frac{v}{r} + \rho_o \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

이때 유체의 체적 탄성계수는

$$K = \frac{dp}{d\rho/\rho_o} \quad (5)$$

이다. 가정(3)에 의해 $v \ll u$ 이며, 위수정리에 의해 $u(\partial u/\partial x) \ll \partial u/\partial t$, $v(\partial u/\partial r) \ll \partial u/\partial t$ 그리고 $\partial^2 u/\partial x^2 \ll \partial u/\partial t$ 이므로 운동방정식에서 식(2)는 소거되며, 식(1)은 1차원의 운동방정식으로 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{\nu_o} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (6)$$

그리고 에너지방정식에서 가정(3)과 (4)에 의해 미소항을 무시하고, 축방향의 속도구배에 대해 식(4)의 연속방정식을 도입한 후 기체상태방정식과 함께 정리하면, 식(3)은 다음과 같다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) - \frac{\sigma_o}{\nu_o} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{(\gamma-1)}{\gamma p_o} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \quad (7)$$

또한 식(4)에서 $v(\partial \rho/\partial r)$ 와 $u(\partial \rho/\partial x)$ 는 다른항에 비해 무시할 수 있는데, 이 경우 체적 탄성계수가 $2 \times 10^8 \text{ kg}_f/\text{m}^2$ 정도의 값을 갖는 경우에 가정이 타당하다고 제시되었다.⁽¹²⁾ 그리고 가정(3)에 의한 $v \ll u$ 의 조건에 따라 식(4)와 식(5)를 결합하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

식(6), 식(7) 및 식(8)을 $u(x, r, 0) = 0$ 와 $p(x, r, 0) = 0$ 및 $\theta(x, r, 0) = 0$ 의 조건하에서 Laplace 변환하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{s}{\nu_o} \left(U + \frac{1}{\rho_o s} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) - \frac{\sigma_o s}{\nu_o} \left(\Theta - \frac{(\gamma-1)\theta_o}{\gamma p_o} P \right) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{sP}{K} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

2.2 전파상수와 특성임피던스의 특성

전자유압 계통(electrohydraulic system)에서의 전기적인 전달이론은 Rohmann과 Grogan⁽¹⁾으로 부터 구체화되기 시작하여 Brown 등⁽²⁾에 의해 체

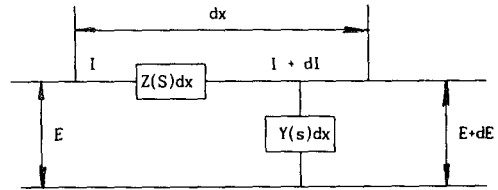


Fig. 1 Element model of transmission line

계적으로 정리되었으며 이를 유체의 압력전파 특성을 해석하는데 활용되고 있다.

전기적인 전달이론에 있어서 무한소의 길이 Δx 를 갖는 전기회로의 경우, 전달신호변수 E (기전력)와 I (전류)와의 관계는 Fig. 1과 같이 표현할 수 있다.

이때 Z 는 단위길이당의 직렬임피던스라고 하고, Y 는 단위길이당의 분류어드미턴스라고 한다. 그리고 직렬임피던스와 분류어드미턴스가 위치 x 에서의 신호변수 E , I 를 위치 $x + \Delta x$ 에서의 $E + \Delta E$, $I + \Delta I$ 로 변화시키므로

$$\begin{aligned} \Delta E &= -(Z \Delta x) I \\ \Delta I &= -(Y \Delta x) E \end{aligned}$$

가 되며, Δx 가 0에 접근하면 다음이 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= -ZI \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -YE \end{aligned} \quad (12)$$

이와같은 관계를 유체 전달관로의 압력전파 특성에 적용하는 경우, 기전력(E)는 압력(P)에 대응되고 전류(I)는 유량(Q)에 대응되므로 다음식이 주어진다.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -ZQ \quad (13)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -YP \quad (14)$$

이 식을 전기전달이론을 유체 전달관로의 압력전파 특성에 적용하기 위해, 운동방정식, 식(6)의 좌측 점성항이 평균유속에 비례한다고 다음과 같이 가정한다.⁽⁹⁾

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} - R_f u, \quad R_f = \frac{8\nu_o}{r_o^2} \quad (15)$$

이 식을 초기조건 $u(x, r, 0) = 0$ 에서 Laplace변환

하고, 관로의 단면적 A 에 대해 유량 $Q=AU$ 를 도입하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\rho_o(s+R_f)}{A}Q \quad (16)$$

그러므로 이 식을 다음과 같이 식(13)와 대응시키면, 이때 Z 는

$$Z = \frac{\rho_o(s+R_f)}{A} \quad (17)$$

으로 나타낼 수 있으며, 압력구배가 형성된 유체 전달관로에 있어서의 질량유량의 효과를 나타내는 $Z(s)$ 를 유체 전달관로의 직렬임피던스라고 한다. 또한 식(11)로부터 유량 $Q=AU$ 를 도입하면

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{As}{K}P \quad (18)$$

를 구할 수 있으며, 식(14)와 대응시키면, Y 는

$$Y = \frac{As}{K} \quad (19)$$

로 표현된다. 이때 유체의 에너지방정식에 함축된 압축성의 효과를 나타내는 $Y(s)$ 를 유체 전달관로의 분류어드미턴스(shunt admittance)라고 한다.

직렬임피던스와 분류어드미턴스가 각각 식(17)과 식(19)로 주어지는 유체 전달관로의 압력전파모델을 평균마찰모델(average friction model)이라 하며, 압력전파과정에서 관로 벽면의 단열과정과 평균 점성효과를 고려한 경우이다.

그리고 분포마찰모델(distributed friction model)의 경우, 운동방정식(9)의 두번째 항을 다음과 같은 새로운 변수로 치환하면

$$W = U + \frac{1}{\rho_o s} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (20)$$

운동방정식은 다음과 같은 Bessel 방정식이 된다.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{s}{\nu_o} W = 0 \quad (21)$$

이 방정식의 해로부터 $\partial P/\partial X$ 와 Q 의 값을 구한 후, 식(13)과 대응시키면 직렬임피던스 $Z(s)$ 는

$$Z(s) = \frac{\rho_o s / \pi r_o^2}{1 - \frac{2J_1(jr_o \sqrt{s/\nu_o})}{jr_o \sqrt{s/\nu_o} J_0(jr_o \sqrt{s/\nu_o})}} \quad (22)$$

가 된다. 같은 방법으로 식(10)의 두번째 항의 일부를 다음과 같은 새로운 변수로 치환하면

$$\psi = \theta - \frac{(\gamma-1)\theta_o P}{\gamma p_o} \quad (23)$$

식(10)의 에너지방정식은 다음과 Bessel 방정식이 된다.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{\sigma_o s}{\nu_o} \psi = 0 \quad (24)$$

이 방정식의 해로부터 $\partial Q/\partial x$ 와 P 의 값을 구한 후, 식(14)와 대응시키면, 분류어드미턴스 $Y(s)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Y(s) = \frac{\pi r_o^2}{\rho_o c_o^2} s \left[1 + 2(\gamma-1) \times \frac{J_1(jr_o \sqrt{\sigma_o s/\nu_o})}{jr_o \sqrt{\sigma_o s/\nu_o} J_0(jr_o \sqrt{\sigma_o s/\nu_o})} \right] \quad (25)$$

이때 c_o 는 음속을 나타낸다. 따라서 직렬임피던스와 분류어드미턴스가 식(22)와 식(25)로 주어지는 경우, 관로 벽면이 등온과정이고, 전달유체의 점성효과를 고려한 유체 전달관로의 분포마찰모델이라 한다.

그리고 유체 전달관로의 중요한 매개변수인 전파상수와 특성임피던스는 다음과 같이 정의되므로

$$\Gamma(s) = \sqrt{ZY} \quad (26)$$

$$Z_c(s) = \sqrt{Z/Y} \quad (27)$$

평균마찰모델의 경우는

$$\Gamma(s) = \frac{s}{c_o} \left(1 + \frac{R_f}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

$$Z_c(s) = \frac{\rho_o}{c_o} \left(1 + \frac{R_f}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

로 주어지며, 분포마찰모델의 경우는

$$\Gamma(s) = \frac{s}{c_o} \left\{ \frac{1 + 2(\gamma-1) \frac{J_1(jr_o \sqrt{\sigma_o s/\nu_o})}{jr_o \sqrt{\sigma_o s/\nu_o} J_0(jr_o \sqrt{\sigma_o s/\nu_o})}}{1 - 2 \frac{J_1(jr_o \sqrt{s/\nu_o})}{jr_o \sqrt{s/\nu_o} J_0(jr_o \sqrt{s/\nu_o})}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

$$Z_c(s) = \frac{\rho_o c_o}{\pi r_o^2} \left[\left\{ 1 - \frac{2J_1(jr_o \sqrt{s/\nu_o})}{jr_o \sqrt{s/\nu_o} J_0(jr_o \sqrt{s/\nu_o})} \right\} \times \left\{ 1 + \frac{2(\gamma-1)J_1(jr_o \sqrt{\sigma_o s/\nu_o})}{jr_o \sqrt{\sigma_o s/\nu_o} J_0(jr_o \sqrt{\sigma_o s/\nu_o})} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

로 주어진다.

3. 유체 전달도관의 압력전파 특성

3.1 전달함수

유체 전달관로의 압력전파모델에서 필요한 전달

함수는 관로의 위치에 따른 압력변화와 유량의 변화를 구할 수 있는 입력함수와 출력함수의 비를 나타낸다. 이를 구하기 위해 식(13)과 식(14)로부터

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = ZYP \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = ZYQ \quad (33)$$

을 구할 수 있다. 이때, $\Gamma = \sqrt{ZY}$, $Z_c = \sqrt{Z/Y}$ 이므로, 식(32)와 식(33)의 해는 각각

$$P = C_1 \cosh \Gamma x + C_2 \sinh \Gamma x \quad (34)$$

$$Q = -\frac{C_1 \Gamma}{Z_c} \sinh \Gamma x - \frac{C_2 \Gamma}{Z_c} \cosh \Gamma x \quad (35)$$

로 구해지며 경계조건 $x=0$ 에서의 P_1 , Q_1 과 $x=L$ 에서의 P_2 , Q_2 를 뒷식에 대입하면

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \Gamma L & -Z_c \sinh \Gamma L \\ -\frac{1}{Z_c} \sinh \Gamma L & \cosh \Gamma L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \Gamma L & Z_c \sinh \Gamma L \\ \frac{1}{Z_c} \sinh \Gamma L & \cosh \Gamma L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

이 된다.

그러므로 전달함수 G_1 와 G_2 는

$$G_1 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1 \cosh \Gamma L - Q_1 Z_c \sinh \Gamma L}{P_2 \cosh \Gamma L + Q_2 Z_c \sinh \Gamma L} \quad (38)$$

$$G_2 = \frac{Q_1}{P_1} = \frac{\frac{P_2}{Z_c} \sinh \Gamma L + Q_2 \cosh \Gamma L}{P_2 \cosh \Gamma L + Q_2 Z_c \sinh \Gamma L} \quad (39)$$

와 같이 정의되는 것으로 G_1 는 입구압력 P_1 에 대한 출구압력 P_2 의 파동응답 특성이며 G_2 는 입구압력 P_1 에 대한 입구유량 Q_1 의 파동응답 특성을 나타낸다.

체적부하를 갖는 유체 전달도관의 압력전파 특성을 고찰하기 위해 Fig. 2와 같이 관로 출구에 용량 V_0 의 체적부하를 갖는 경우를 살펴보면, 관로 출

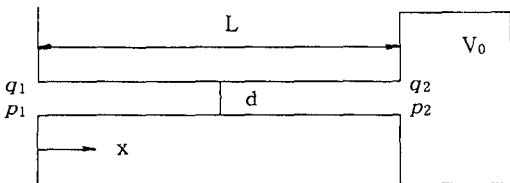


Fig. 2 Fluid transmission line terminated by a volume load

구의 유량과 압력과의 관계는

$$\frac{Q_2}{P_2} = V_0 \frac{S}{K} \quad (40)$$

가 된다.⁽¹⁰⁾ 식(19), (26) 및 식(27)로부터

$$Z_c = \frac{K}{A_s} \Gamma \quad (41)$$

이 되며, 식(40)과 식(41)을 식(37)의 압력 P_1 , P_2 의 관계에 대입하므로서 체적부하를 갖는 유체 전달도관의 전달함수는 다음과 같이 주어진다.

$$G = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\cosh \Gamma L + \frac{V_0}{AL} \Gamma L \sinh \Gamma L} \quad (42)$$

3.2 주파수응답 특성

체적부하를 갖는 유체 전달도관의 전달함수는

$$G = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\cosh \Gamma L + \frac{V_0}{AL} \Gamma L \sinh \Gamma L} \quad (43)$$

로 주어지므로 주파수 전달함수는 $s=j\omega$ 로 대치하므로서 다음과 같이 표현할 수가 있다.

$$G(j\omega) = \frac{1}{A+jB} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} e^{-j \tan^{-1}(B/A)} \quad (44)$$

이 식으로부터 주파수 전달함수 $G(j\omega)$ 의 진폭비와 위상지연을 계산할 수 있다.

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad (45)$$

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1}(B/A)$$

이때, 평균마찰모델인 경우에는

$$\Gamma(s) = \frac{s}{c_0} \left(1 + \frac{R_f}{s}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{단, } c_0 = \sqrt{K/\rho_0}$$

$$\Gamma(j\omega) = jT_0 \cdot \omega \left(1 - j \frac{R_f}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{단, } T_0 = \frac{1}{c_0} \quad (16)$$

로 표현할 수 있다. 분포마찰모델의 경우 전파상수, $\Gamma(s)$ 와 $\Gamma(j\omega)$ 는 식(30)으로부터 액체인 경우 $\gamma=1$ 이 되므로 각각 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Gamma(s) = \frac{s}{c_0} \left\{ 1 - \frac{2J_1(jr_0\sqrt{s/\nu_0})}{jr_0\sqrt{s/\nu_0} J_0(jr_0\sqrt{s/\nu_0})} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Gamma(j\omega) = \frac{j\omega}{c_0} \times \left\{ 1 - \frac{2J_1(j^{\frac{3}{2}} r_0 \sqrt{\omega/\nu_0})}{j^{\frac{3}{2}} r_0 \sqrt{\omega/\nu_0} J_0(j^{\frac{3}{2}} r_0 \sqrt{\omega/\nu_0})} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

그리고 정상층류의 점성저항을 고려한 경우 Oldenburger와 Goodson⁽⁵⁾에 의해 제시된 무한승적 모델

(infinite product model)에서의 전달함수와 주파수 전달함수는 각각 다음과 같이 무한승적으로도 주어진다.

$$G(s) = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (s^2/\omega_{nk}^2 + 2j\zeta_k s/\omega_{nk} + 1)} \quad (47)$$

$$G(j\omega) = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (-\omega^2/\omega_{nk}^2 + 2j\zeta_k \omega/\omega_{nk} + 1)} \quad (48)$$

이때, $\omega_{nk} = \beta_k/T_e$ 로 주어지는 고유 각주파수(natural angular frequency)이며 $\zeta_k = R_f T_e/2\beta_k$ 로 주어지는 점성감쇠비(viscous damping ratio)이다. 또한 $T_e = L/c_o$ 로 주어지는 전달지연시간(transmission delay time)이며 β_k 는 전파상수 $\Gamma(j\omega)L$ 의 허수부로서 체적부하의 용량(V_0)과 관련하여 다음식을 만족하는 근이다.

$$\beta_k \tan \beta_k = \frac{AL}{V_0} \quad (49)$$

그러므로 진폭비와 위상지연은

$$|G| = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} \right)^2 + \left(\frac{2\zeta_k \omega}{\omega_{nk}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (50)$$

$$\angle G = - \sum_{k=1}^{\infty} \tan^{-1} \frac{2\zeta_k \omega/\omega_{nk}}{1 - \omega^2/\omega_{nk}^2} \quad (51)$$

으로 전개할 수 있다.

3.2 과도응답 특성

용량 V_0 의 체적부하를 갖는 관로유동에 있어서 전달함수는 식(43)과 같이 주어지므로 스텝함수를 입력함수로 지정하는 경우, $P_1 = p_m/s$ 로 주어지며, 임펄스함수를 입력함수로 주어지는 경우에는 $P_1 = P_m$ 로 주어진다. 관로끝의 압력 P_2 는 주파수영역에서의 전달함수와 입력함수의 곱으로 표현된다. 스텝 입력함수의 경우에는,

$$P_2 = \frac{P_m}{s} \cdot \frac{1}{\cosh \Gamma L + \frac{V_0}{aL} \Gamma L \sinh \Gamma L} \quad (52)$$

으로 주어지며 이때, 전파상수는 평균마찰모델과 분포마찰모델로 분류하여 해석할 수 있다. 그리고 무한승적 모델의 전달함수에 있어서는 스텝 입력함수의 경우에는 다음과 같이 주어진다.

$$P_2 = \frac{P_m}{s \prod_{k=1}^{\infty} (s^2/\omega_{nk}^2 + 2\zeta_k s/\omega_{nk} + 1)} \quad (53)$$

시간영역에서의 과도응답 특성인 $p_2(t)$ 는 식(52), (53)으로 주어지는 주파수영역에서의 과도응답을 FFT 알고리즘을 이용하여 Laplace역변환을 하므로써 구할 수 있다. 압력전파 특성중 점성감쇠 계수비가 $\zeta_1 = R_f T_e/2\beta_1$ 로 주어지므로 이 값을, $\zeta_1 < 1$ 로 설정하므로써 감쇠진동계(damped oscillation system)의 과도응답 특성을 비교 검토할 수 있다.

4. 결과 및 검토

유체 전달관로의 압력전파 특성에 대한 수치해석은 여러가지 근사적인 방법에 의해 수행되어 왔으며, 최근 타 분야에서 광범위하게 사용되고 있는 FFT 알고리즘을 이용한 수치해석방법이 유체전달관로에 적용되기 시작하였다. 특히 Tsang 등⁽⁷⁾은 폐쇄관로와 개방관로에 대해 Cooley-Turkey 알고리즘을 기초하여 시간 $t > 0$ 인 조건에서 전달함수의 Laplace변환을 불연속 Fourier변환(DFT)으로 전개하므로써 주파수영역에서의 파동응답 특성을 구하였으며, Fourier 역변환을 이용하여 시간영역에서의 파동응답 특성을 구하였다.

본 논문에서는 유체 전달관로에서의 파동응답 특성을 구하고자 FFT 알고리즘을 적용하여 수치해석하였다.

체적부하를 갖는 유체 전달관로의 수치해석용 모형의 제원은 市川과 佐藤⁽¹¹⁾의 실험용 모형의 제원을 활용하였다. 관로의 길이 $L = 2.86$ (m), 관로의 반지름 $r_o = 0.002$ (m), 체적부하의 용량 $V_0 = 23.2 \times 10^{-6}$ (m³)으로서 전달관로 유체의 음파의 전파속도 $c_o = 1,279 \times 10^3$ (m/sec), 동점성계수 $\nu_o = 1.66 \times 10^{-4}$ (m²/sec)의 작동유를 사용하여 수치해석을 하였다. 따라서 체적부하의 용량비는 $V_0/aL = 0.610$ 이며 저항계수 $R_f = 332$ (1/sec)로 입력제원이 설정되었다. 그리고 점성감쇠 계수비 $\zeta_1 = 0.268 [R_f T_e/2\beta_1, \beta_1 = 1, 016]$ 로서 $\zeta_1 < 1$ 이므로 압력전파 특성은 감쇠진동계의 특성으로 한정하였다.

수치해석은 Cooley-Turkey 알고리즘⁽¹³⁾을 기초로 한 FFT 프로그램에 의해 유체 전달관로의 전달함수에 대한 Laplace 역변환을 하므로써 주파수 응답곡선과 과도응답으로 스텝과 임펄스 응답곡선을 구하였다. 주파수응답에서 Bode선도에서 가로축은 주파수를 대수눈금으로 설정하고, 세로축의 게인(gain)을 대수량 $20 \log_{10}|G(j\omega)|$ (db)로 설정하여 진폭곡선을 구하였으며, 위상곡선의 경우에는

위상각(phase degree)으로 설정하였다. 과도응답 곡선에는 가로축을 시간축으로 표시하고 세로축을 입구의 평균압력(P_m)에 대한 관로의 출구압력비로 표시하였다.

본 논문에서 검토하고자 한 유체 전달관로의 모델이 분포마찰모델(D. F. model)이므로 해석의 비교기준이 되는 무한승적 모델(I. P. model)과 비교한 결과, Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5와 같이 해석결과를 구할 수 있었다. 이 경우에 무한승적의 전개항의 수를 $k=1, k=2$ 인 두가지 경우만을 선택하였으나, $k>3$ 이상의 해석결과는 $k=2$ 까지 해석한 결과와 거의 차이가 없으므로 생략하였으며 전개후, 선택한 Laplace변수는 s 의 3차항까지 절단하여 분포마찰모델과 계수를 일치시켰다. 무한승적 모델의 해석결과는 무한승적의 전개항과 무관하게 거의 일치하는 결과를 나타내었다. 분포마찰모델은 주파수 응답의 경우, 주파수가 커질수록 s 의 3차항 이상

전개한 무한승적 모델과 거의 일치하므로 분포마찰 모델의 정확성을 입증할 수 있다고 본다. 스텝과 임펄스응답의 경우에는 진폭이 약간 감소하며 위상 지연이 나타나는 것은 점성의 영향으로 볼 수 있었다.

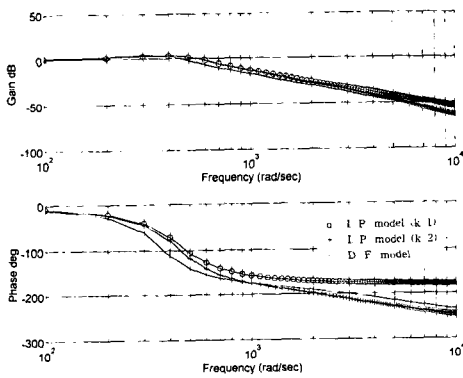


Fig. 3 Frequency response of the infinite product and distributed friction model

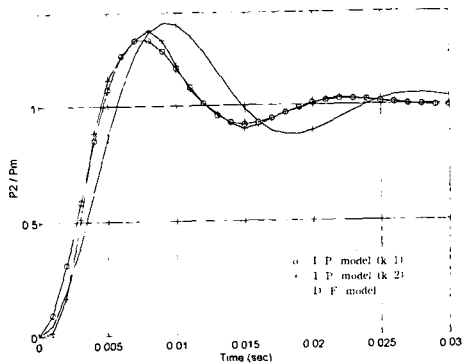


Fig. 4 Step response of the infinite product and distributed friction model

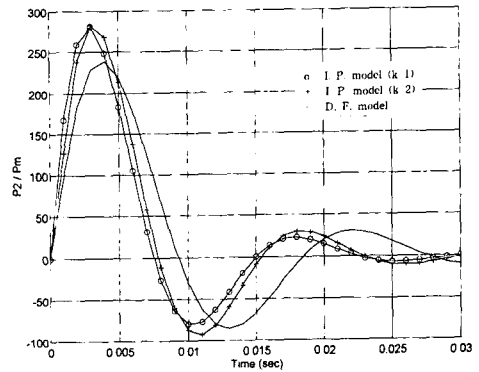


Fig. 5 Impulse response of the infinite product and distributed friction model

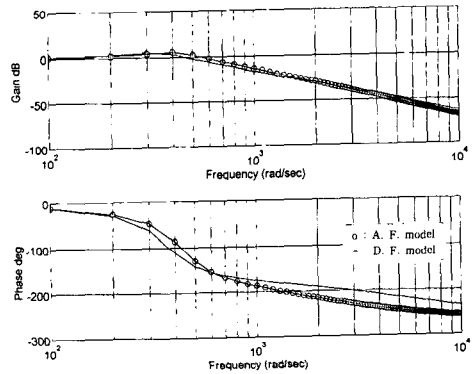


Fig. 6 Frequency response of the average and distributed friction model

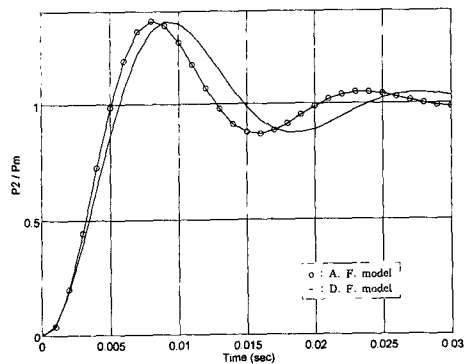


Fig. 7 Step response of the average and distributed friction model

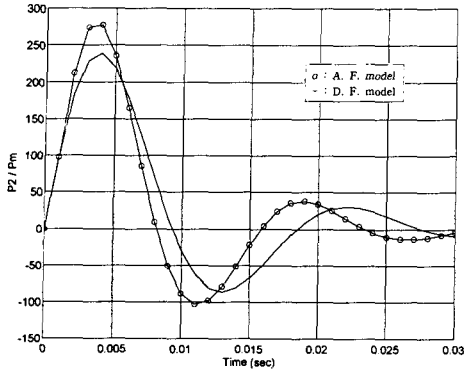


Fig. 8 Impulse response of the average and distributed friction model

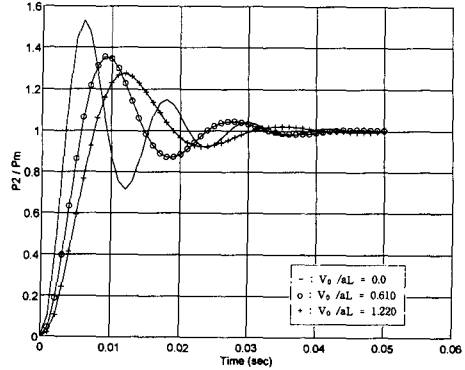


Fig. 10 Step response of with the variation of volume load in the distributed friction model

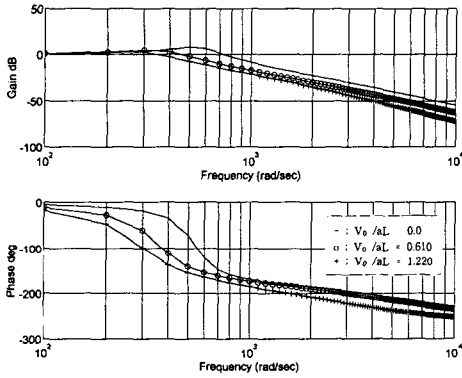


Fig. 9 Frequency response with the variation of volume load in the distributed friction model

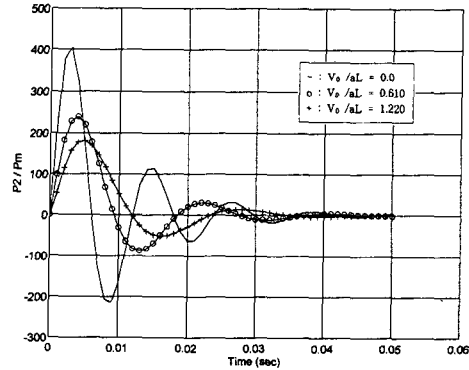


Fig. 11 Impulse response with the variation of volume load in the distributed friction model

그리고 유체 전달관의 압력전파 특성에 있어서 점성의 영향을 검토하고자 평균마찰모델(A. F. model)과 분포마찰모델을 비교 해석한 결과, Fig. 6 과 같은 주파수 응답곡선과 Fig. 7 및 Fig. 8과 같은 스텝과 임펄스 응답곡선을 구하였다. 주파수 응답의 경우 평균마찰모델과 분포마찰모델은 거의 일치하지만 스텝과 임펄스 응답곡선에서 분포마찰모델의 최초 피크압력(peak pressure)이 감소하며, 위상지연이 나타남을 알 수 있는데 이는 분포마찰모델이 평균마찰모델보다 마찰손실에 다른 점성의 영향을 더 정확히 고려하고 있음을 보여주고 있다.

체적부하의 용량변화에 따른 분포마찰모델의 주파수응답과 과도응답의 결과를 비교 검토하고자 $V_0/aL=0.610, 1.22$ 인 경우를 선정하여 해석한 결과, Fig. 9, Fig. 10, Fig. 11과 같은 경향은 얻을 수가 있었다. 이때 $V_0/aL=0$ 인 경우는 폐쇄 전달관(blocked transmission line)의 특성을 나타낸

다.

주파수 응답의 경우에 체적부하의 용량이 커질수록 진폭비가 감소하고 위상지연이 커지며 과도응답의 경우에 있어서도 용량이 커질수록 최초의 피크압력의 감소와 위상지연이 나타나고 있다. 정정시간(settling time, t_s)은 이 경우에 $t_s=0.05$ sec 정도로 일치됨을 알 수가 있었다.

5. 결 론

본 논문은 체적부하를 갖는 유체 전달도관의 압력전파 특성을 FFT 알고리즘을 이용하여 해석하였으며 평균마찰모델과 분포마찰모델 및 무한승적모델의 해석결과의 비교 분석하고 체적부하의 용량변화에 따른 비교 분석한 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수가 있었다.

- (1) 분포마찰모델과 무한승적 모델을 해석한 결

과 주파수가 높은 경우, 주파수 응답이 거의 일치하였으며, 과도응답의 경우 위상지연을 수반하지만 진동의 감쇠특성이 서로 일치하므로 유체 전달관로의 압력전파 특성에 분포마찰모델을 적용함에 타당성을 입증할 수 있었다.

(2) 평균마찰모델과 분포마찰모델에 있어서 주파수 응답은 유사한 경향을 나타내지만 과도응답에서 분포마찰모델에서의 최초 피크압력의 감소와 위상 지연은 점성의 영향을 나타내는 것으로 점성이 클수록 압력파동의 감쇠가 크게 나타남을 알 수 있었다.

(3) 유체 전달관로에서는 예측한 대로 체적부하의 용량이 커질수록 과도응답에서의 최초의 피크압력이 점진적으로 감소하며 용량에 비례하여 위상이 지연되지만 파동의 정정시간은 거의 일정함을 알 수 있었다.

참고문헌

- (1) Rohmann, C. P. and Grogan, E. C., 1957, "On the Dynamics of Pneumatic Transmission Lines," *Trans. ASME*, Vol. 79, pp. 853~867.
- (2) Brown, F. T., 1962, "The Transient Response of Fluid Lines," *ASME Journal of Basic Engineering*, Vol. 84, No.4, pp. 547~553.
- (3) Brown, F. T. and Nelson, S. E., 1965, "Step Responses of Liquid Lines with Frequency-Dependent Effects Viscosity," *ASME Journal of Basic Engineering*, Vol. 87, pp. 504~510.
- (4) Holmboe, E. L. and Rouleau, W. T., 1967, "The Effect of Viscous Shear on Transients in Liquid Lines," *ASME Journal of Basic Engineering*, Vol. 89, pp. 174~180.
- (5) Oldenburger, R. and Goodson, R. E., 1964, "Simplification of Hydraulic Line Dynamics by Use of Infinite Products," *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, pp. 1~10.
- (6) Katz, S., 1975, "Transient Response of Terminated Pneumatic Transmission Lines by Frequency Response Conversion," *ASME Paper No. 75-WA/FIcs-4, Winter Annual Meeting*, Houston, Texas, November 30-December 4.
- (7) Tsang, S. H. L., Benson, M. W. and Granberg, R. H., 1985, "The Open and Blocked Distributed Air Transmission Line by the Fast Fourier Transform Method," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 107, No. 3, pp. 213~219.
- (8) Suo, L. and Wylie, E. B., 1989, "Impulse Response Method for Frequency-Dependent Pipeline Transients," *J. of Fluids Eng., ASME*, Vol. 11, pp. 478~483.
- (9) Schuder, C. B. and Binder, R. C., 1959, "The Response of Pneumatic Transmission Lines to Step Input," *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, Vol. 81, pp. 578.
- (10) 市川, 山口, 1968, "油壓管路의 周波數 特性," *日本機械學會論文集*, 71~599, pp. 1702~1708.
- (11) 市川, 佐藤, 1967, "油壓管路의 油擊作用과 過渡應答," *日本機械學會論文集*, 33~252, pp. 1232~1238.
- (12) Kirchner, J. M. and Kata, S., 1975, *Design Theory of Fluidic Components*, Academic Press.
- (13) Brigham, E. O., 1974, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall.
- (14) D'souza, A. F., 1964, "Dynamic Response of Fluid Lines," *ASME Journal of Basic Engineering*, Vol. 86, No. 3, pp. 589~598.